

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224527

UNIVERSAL
LIBRARY

TIGHT BINDING BOOK

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بی۔ اے۔ کے لغ

تخلیسی

(کوادرڈی نیٹ جو مٹری، گریس اینڈ روزنبرگ)
مُتَرَجِمُ

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے

پروفیسر ریاضیات کلیہ جامعہ عثمانیہ حیدرآباد دکن

۱۳۳۲ھ ۱۳۳۲ھ ۱۹۲۲ء

کتاب الطبع و النشر

فہرست مضامین

ہندسیہ تحلیل

صفحہ	مضمون
	حصہ اول، خط مستقیم
۱ - ۷۴	قائم اور مائل محور۔ خط مستقیم کی مساوات۔ خطوط اولاً + ۲۷ لاما + ب مآء۔ کے متعلقہ مسائل۔ دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ۔ محوروں کی تبدیلی۔ نئے اور پرانے محدودوں کا خطی ربط۔ محوروں کی تبدیلی سے مساوات کا درجہ نہیں بدلتا۔ غیر متغیر۔ آزمائشی پرچہ۔
۱ - ۷۴	حصہ دوم، دائرہ اور مخروطی تراشیں
۱ - ۱۷	باب اول۔ دائرہ کی مساوات۔ وتر اور تماس۔ تماس ہونے کی شرط۔
۱۸ - ۴۲	باب دوم۔ دائرہ کا قطب اور قطبی۔ تماس کا طول۔ بنیادی محور۔ تماسوں کے جوڑے کی مساوات۔ تقییب آزمائشی پرچہ ۱

۶۲ - ۴۴ ۶۲	<p>باب سوم - مکانی - بنانے کی آلی ترکیب - مساوات $\lambda = \mu + \nu$ - اصلی محوروں کے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات - درجہ دوم کی رقمیں مربع کامل بناتی ہیں - مکانی کاماس</p>
۸۵ - ۶۴	<p>آزمائشی پرچہ ۱ باب چہارم - قطع ناقص - مساوات $\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} = 1$ ناقص کی شکل، اصلی محوروں کے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات - قطبی مساوات، ماسکی فاصلوں کا مجموعہ بنانے کی آلی ترکیب - دائرہ ناقص کی انتہائی صورت ہے - ناقص کاماس - ناقص کے لئے شرط $\lambda > b$</p>
۱۱۳ - ۸۶ ۱۱۳	<p>باب پنجم - قطع زائد - مساوات $\frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\mu^2}{b^2} = 1$ زائد کی شکل - ان محوروں کے لحاظ سے مساوات جو اصلی محوروں کے متوازی ہوں - ماسکی فاصلوں کا فرق - بنانے کی آلی ترکیب - زائد کاماس - متقاربوں کی مساوات - قائم زائد - زائد کے لئے شرط $\lambda > b$ مساوات $\lambda a = \mu b$ - $(\lambda + \mu)$ جبکہ متقاربوں کو محور مانا جائے -</p>
۱۳۸ - ۱۱۵	<p>آزمائشی پرچہ ۲ باب ششم - درجہ دوم کی عام مساوات - مرکز کے لحاظ سے مساوات نصف نوروں کی مساواتیں اور طول متقارب -</p>
۱۴۶ - ۱۳۹	<p>باب ہفتم - عام مساوات سے ناقصوں کا مرسم کرنا</p>
۱۵۳ - ۱۴۷	<p>باب ہشتم - عام مساوات سے زائدوں کا مرسم کرنا</p>

۱۵۴-۱۶۳	باب نہم - عام مساوات جبکہ لوہ = ۵۷ - مکانی کا وتر خاص اور محور -
۱۶۴-۱۶۸	باب دہم - عام مساوات سے مکافیوں کا مرتسم کرنا -
۱۶۹-۱۸۵	باب یازدہم - عام طور پر مخروطیوں کا مرتسم کرنا آزمائشی پرچہ ۳
۱۸۵	باب دوازدہم - وتر اور مماس - فاصلہ کی مساوات درجہ دوم - (لا، ما) پیر کا مماس - متقاربوں کی مساوات نسبتی مساوات درجہ دوم - مماسوں کا جوڑا - وتر اور مماس - علی القوائم مماس - امدادی دائرہ
۱۸۷-۲۲۷	باب سیزدہم - متوازی دتروں کے نقاط تقصیف مزدوج قطر مزدوج زاویہ - مکانی کی مساوات جبکہ مماس اور قطر محور ہوں -
۲۲۸-۲۵۸	باب چہار دہم - عماد - مکانی کے عماد کی مساوات شکل ما = م لا - ۲ لوم - لوم ۲ میں - مخروطی کی مساوات جبکہ مماس اور عماد محور ہوں -
۲۵۹-۲۷۴	آزمائشی پرچہ ۴ -
۲۷۴	باب پانزدہم - قطب اور قطبی - قطبیوں کی مساوات مکانی ربط - ہندسی ترکیب -
۲۷۶-۲۹۸	باب شانزدہم - منبذی تعبیر - خارج المرکز زاویہ - ناقص کا رقبہ - ناقص کے وتر اور مماس کی مساوات -
۲۹۹-۳۳۳	عماد -
۳۳۴-۳۵۰	باب ہفدہم - مخروطی کی قطبی مساوات جبکہ ماسکے قطب ہو - منحنی کی شکل - وتر اور مماس کی مساوات -
۳۵۰	آزمائشی پرچہ ۵

۳۷۹-۳۵۲	باب پندرہم - مخروطیوں کے نظام - س + ک سی =
۳۹۶-۳۸۰	نس + ک سی = کی تعبیر - محوروں کو مس کرنیوالی
۳۹۶-۳۸۰	مخروطی کماسوں کی مشترک مساوات - ہم ماسکہ مخروطیاں
۳۹۶-۳۸۰	باب نوزدہم - لغات - مہن + مہ ق + ر =
۳۹۶-۳۸۰	باب بیستم - موسیقی تقسیم - موسیقی صفیں اور نیلیں
۳۹۶-۳۸۰	کمل ذواربعہ الاضلاع اور اس کی موسیقی خاصیتیں -
۳۹۶-۳۸۰	آزمائشی پرچہ -
۳۹۶-۳۸۰	باب بیست و یکم - جلیبی نسبتیں - صفیں اور نیلیں
۳۹۶-۳۸۰	پانچویں مسئلہ - درجہ اول -
۳۹۶-۳۸۰	سوالات کے پرچہ -
۳۹۶-۳۸۰	جوابات -

ہند تحلیلی

حصہ اول

خط مستقیم

۱۔ محدود۔ جبر مقابلہ کے اصولوں کو جب نقاط، خطوط اور اشکال کے ہندسہ میں استعمال کیا جاتا ہے تو اسے ہندسہ تحلیلی کہتے ہیں اور اگر یہ نقاط خطوط وغیرہ ایک ہی سطح میں واقع ہوں تو یہ مستوی ہندسہ تحلیلی کہلاتا ہے۔

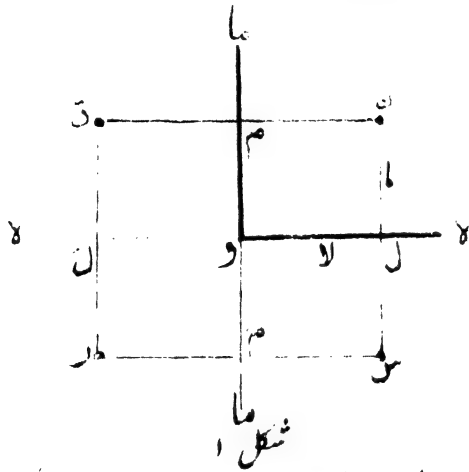
چونکہ تمام ترکیبیں جن کا آئندہ ذکر ہوگا صرف اس بات پر مبنی ہیں کہ خطوط کے طولوں کو اعداد اور حروف جبریہ سے تعبیر کیا جائے اس لئے تمام صورتوں میں ہمیں ایک ایسی اکائی منتخب کرنی چاہئے جس کی رقم میں باقی تمام طول بیان ہو سکیں۔ پس اگر ایک فٹ کو اکائی مقرر کریں تو ہ فٹ کو عددہ تعبیر کرے گا۔

اگر ایک سطح میں ایک نقطہ کا مقام متعین کرنا مقصود ہو تو یہ ضرور ہے کہ اس سطح میں چند نقطے یا خط ثابت کر لئے جائیں اور بحفاظ ان کے نقطہ مذکورہ کے مقام کا تعین کیا جائے ایسا کرنے کی سب سے آسان ترکیب یہ ہے کہ ہم اس نقطہ کے مقام کو دو ثابت خطوط مستقیم کی طرف منسوب کریں جو باہم متقاطع علی القواہم ہوں۔

فرض کرو کہ 'ولا' و 'وما' (شکل ۱) دو ثابت خطوط مستقیم ہیں جو ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں اور نقطہ 'ن' کا مقام متعین کرنا مقصود ہے 'ن' کو 'وما' کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ 'ولا' سے ل پر ملتا ہے۔ اب نقطہ 'و' سے 'ن' تک جانے میں میں فاصلہ 'ول' خط 'ولا' پر اور فاصلہ 'ل' خط 'وما' کے متوازی ملے کر پڑتا ہے، پس اگر ہمیں 'ول' اور 'ل' کے طول معلوم ہو جائیں تو

ہم نقطہ ن کا مقام سطح مذکورہ میں ثابت کر سکتے ہیں۔
ان دو طولوں کو کامیٹری قائم محدود یا اختصاراً نقطہ ن کے محدود کہتے ہیں،
ول نقطہ ن کا فصلہ کہلاتا ہے اور ل ن معین، نیز خطوط ولا اور و ما
کو محور اور نقطہ و کو مبدا کہتے ہیں۔

اگر ول میں طول کی لا اکائیاں ہوں اور ل ن میں ما اکائیاں یعنی اگر نقطہ ن کا فصلہ
لا اور معین ما ہو تو ن کو نقطہ (لا، ما) سے موسوم کرتے ہیں، ولا کو لا کا محور
اور و ما کو ما کا محور کہتے ہیں۔



شکل ۱

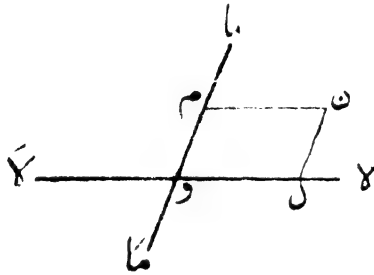
اگر ہم ول اور ل ن کے طولوں میں بالترتیب کل اکائیوں کی تعداد بھی معلوم ہو جائے
تو بھی ن کا مقام پورے طور پر متعین نہیں ہو سکتا کیونکہ ہمیں یہ ضرور معلوم ہونا چاہیے کہ
ول نقطہ و کے کس طرف کھینچا گیا ہے، وائیں طرف یا بائیں طرف، نیز ل ن نقطہ
ل سے اوپر کی طرف کھینچا گیا ہے یا نیچے کی طرف۔

ہم ان خطوط کی سمتوں کو نقطہ ن کے محدودوں کی علامات سے تعبیر کریں گے اور اس
جگہ ہم اس حسابی دستور کو اختیار کرتے ہیں جو علم شدت میں مروج ہے۔ یعنی جب
ول نقطہ و سے دائیں طرف کو کھینچا جائے تو اسے مثبت خیال کرتے ہیں اور اگر یہ و
سے بائیں طرف کو کھینچا جائے تو منفی خیال کرتے ہیں، نیز اگر ل ن نقطہ ل سے
اوپر کی طرف کھینچا گیا ہو تو اسے مثبت خیال کرتے ہیں اور اگر نیچے کی طرف کھینچا گیا ہو تو

متقی۔ دوسرے الفاظ میں نقطہ و کے دائیں طرف جتنے نقاط ہوں ان کے فاصلوں کو مثبت خیال کرتے ہیں اور بائیں طرف کے نقاط کے فاصلوں کو منفی نیز نقطہ و کے اوپر جتنے نقاط ہوں ان کے معینوں کو مثبت شمار کرتے ہیں اور نیچے کے نقاط کے معینوں کو منفی۔

شکل میں خطوط ولا اور و ما کے اندر جو خانہ گھرا ہوا ہے اس کو مثبت ربع کہتے ہیں کیونکہ ان تمام نقاط کے فاصلے اور معین جو اس خانہ میں واقع ہیں مثبت ہیں مائل محور۔ بعض اوقات یہ زیادہ سودمند ہوتا ہے کہ ایک نقطہ مفروضہ کا مقام بلحاظ مائل محوروں کے (جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ نہ بناتے ہوں) متعین کیا جائے۔

اگر ولا اور و مائل محور ہوں اور ن نقطہ مفروضہ ہو تو ن ل کو



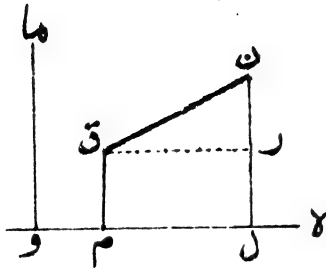
شکل ۲

و ما کے متوازی کھینچو ولا سے نقطہ ل پر ملے۔ تب و ل نقطہ ن کا فاصلہ ہے اور ل ن معین، یاد رہے کہ اس صورت میں بھی علامات کے متعلق ہم وہی حسابی دستور قائم رکھیں گے جو ہم نے قائم محوروں کے لئے اختیار کیا ہے۔ ہم زاویہ لا و ما کو جو خطوط ولا اور و ما کے اندر گھرا ہوا ہے سہ سے تعبیر کریں گے اور یہ زاویہ قائمہ سے بڑا یا چھوٹا ہو سکتا ہے۔

۲۔ دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ ان کے محدودوں کی رقوم میں دریافت کر دو۔

قائم محور

فرض کر دو کہ نقاط مفروضہ ن (لا، ما) اور ق (لا، ما) ہیں، معین



شکل ۳

ن ل اور ق م کھینچو، نقطہ
ق میں سے خط ر خط و ل کے
متوازی کھینچو جو ن ل یا
ن ل ممدودہ سے لقطہ ر پر
پڑے۔

تب ن ق = ق ل + ر ن
(تعلیم میں م اش ۴)

ق ر = ول - و م = لا - لام

ر ن = لن - لم ق = ما - م

ن ق = (لا - لام) + (ما - م) (۱)

اگر نقطہ ق مبدا ہو تو لا = م = ۰ اور اس لئے ون = لا + ما
مائل محور۔ اس صورت میں بھی عمل یہی ہے، صرف اس فرق کا خیال رکھا جائے کہ
خط و لا پر عمود نہیں ہیں، پس

ن ق = ق ل + ر ن - ۲ ق ل ر ن x جم ق ر ن

موجب سابق ق ر = لا - لام اور ر ن = ما - م

نیز زاویہ ق ر ن = ۳۶۰ - سہ اے

ن ق = (لا - لام) + (ما - م) + ۲ (لا - لام) (ما - م) جم سہ (۲)

نتیجہ صریح۔ ون = لا + ما + ۲ لا م جم سہ

نوٹ۔ اگر نقطہ ق مثبت ربع میں واقع نہ ہو تو لا یا ما یا یہ دونوں منفی ہوں گے،

طالب علم کو شکلیں کھینچ کر اس کی تصدیق کرنی چاہئے کہ ہر صورت میں

ق ر = لا - لام اور ر ن = ما - م اگر طولوں کی جبریہ علامات کا لحاظ رکھا جائے

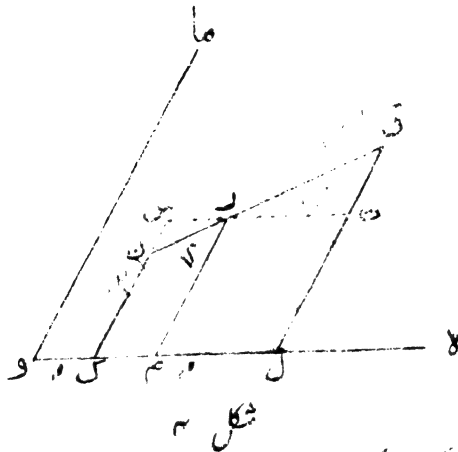
مشقیں

ذیل کی مشقوں تمام اور ۸ میں محور قائم ہیں۔

۱۔ ایک بچہ کو طول کی اکائی مان کر نقاط ذیل کے مقامات کو شکل میں تعبیر کرو۔

(۱) (۰، ۰) (۲، ۰) (۱، ۰) (۳، ۰) (۰، ۱) (۵، ۱) (۱، ۱)

(۱) اندرونی تقسیم یعنی جب ر نقطہ ن اور ق کے درمیانی خط لک ق پر واقع ہو۔
معین ن ک، ق ل، ر م کینچو اور نقطہ ر سے خط س ر ت خط
ولا کے متوازی اس طرح کھینچو کہ وہ ن ک اور ق ل کو نقاط س اور ت
پر قطع کرے۔



شکل ۳

تب و م = و ک + ک م = لا + س ر (۱)

$$\text{اور } \frac{\text{س ر}}{\text{ن ر}} = \frac{\text{رت}}{\text{رق}} \quad (\text{متشابه مثلثوں سے})$$

$$\frac{\text{س ر}}{\text{ن ر}} = \frac{\text{س ر} + \text{رت}}{\text{ن ر} + \text{رق}}$$

$$\text{س ر} = \frac{\text{ن ر}}{\text{ن ر} + \text{رق}} \times \text{س ت} = \frac{\text{ن ر}}{\text{ن ر} + \text{رق}} \times (\text{لا} - \text{لا})$$

جسے (۱) میں مندرجہ کرنے سے

$$(۳) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{لا} + \text{م} + \text{م} + \text{لا}}{\text{م} + \text{م}} \\ \frac{\text{لا} + \text{م} + \text{م} + \text{لا}}{\text{م} + \text{م}} \end{array} \right.$$

نتیجہ صحیح - خط ن ق کے نقطہ تنصیف کے محدودیں

$$\left(\frac{لا + لا}{۲} , \frac{ما + ما}{۲} \right)$$

۲) خارجی تقسیم یعنی جب نقطہ ر خط ن ق محدودہ پر دائیں یا بائیں جانب کیس واقع ہو۔
اگر ر خط ن ق کو خارجاً نسبت م : م سے تقسیم کرے تو

$$\frac{ن ر}{ق ر} = \frac{م}{م}$$

اب ن ر = ر ق - ر ق جبراً لحاظ سے

$$\frac{ن ر}{ر ق} = \frac{م}{م}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر خارجی تقسیم کے لحاظ سے ر کے محدود مطلوب ہوں تو مندرجہ بالا اجمالات میں میں صرت م کی علامت بدل دینی چاہئے پس

$$لا = \frac{م - لا}{م - م} = \frac{م - لا}{م - م} = \frac{م - لا}{م - م} \dots (۴)$$

نئی شکل کھینچ کر طالب علم اس کی تصدیق کرے۔

یاد رہے کہ مندرجہ بالا نتائج قائم اور مائل ہر دو اقسام کے محاور کی صورت میں درج شدہ ہیں

مثال ۱ - نقاط (۱) (۲) (۳) (۴) کے ملائیوائے خط کو ایک نقطہ نسبت ۵:۶ سے خارجاً تقسیم کرتا ہے اس کے محدود دریافت کرو۔

خارجی تقسیم کے لئے جو ضابطہ اوپر مندرج ہے اس کو استعمال کرنے سے محدود ہیں

$$\frac{۱ - (۳) - ۵}{۵ - ۶} = \frac{۱ - (۲) - ۵}{۵ - ۶} = \frac{۱ - (۱) - ۵}{۵ - ۶} = \frac{۱ - (۰) - ۵}{۵ - ۶} = \frac{۱ - (-۵)}{۵ - ۶} = \frac{۱ + ۵}{۵ - ۶} = \frac{۶}{-۱} = -۶$$

مثال ۲ - اقلیدس م ۶ شس ۳ کے نتیجہ کو انکر نسبت کرو کہ ایک مثلث کے زاویوں کے داخلی منصف ایک دوسرے کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ (۱) (لا، ما) ، (۲) (لا، ما) ، (۳) (لا، ما) ، (۴) (لا، ما) ایک مثلث کے راس ہیں نیز فرض کرو کہ اضلاع ب ج ، ج ا ، ا ب کے طول ا، ب، ج

ہیں اور دایا را، ب، ج کے منصفہ عمود کے اضلاع گواہ 'ع'، 'ف' پر ملتے ہیں۔

تب ب د : ا ج = ب د : ا ج = ج : ب

اس لئے د کے محدود ہوئے

ب : لا : ا ج : لا ، ب : ما : ا ج : ما

ب : ج + ج : ب + ج

نقطہ د کے محدود لا، ما ہیں اس لئے

نقطہ ع کے محدود ج و خط کو نسبت

ب : ج : ا : ج سے تقسیم کرتا ہے

ا : لا : ب : لا : ج : لا ، ا : ما : ب : ما : ج : ما ہوں گے۔

ا : ب : ج : ب : ج

ا : ب : ج کے محدود ہر طرح سے متشائل ہیں جس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم ب

کو ا : ب : ج سے تقسیم کریں ا ج : ف کو نسبت ا : ب : ج سے تو

ہم یہ ثابت کریں گے کہ نقطہ ع داخل ہوگا۔

یہاں یہ کہ نقطہ ع اندرونی دائرہ کا مرکز ہے، اگر اس دائرہ کا نصف قطر

$$\frac{ا : ب : ج}{ا : ب : ج} = \frac{ا : ب : ج}{ا : ب : ج}$$

$$\frac{ا : ب : ج}{ا : ب : ج} = \frac{ا : ب : ج}{ا : ب : ج}$$

$$\frac{ا : ب : ج}{ا : ب : ج} = \frac{ا : ب : ج}{ا : ب : ج}$$

$$\frac{ا : ب : ج}{ا : ب : ج} =$$

سبب متشائل کی یہ ایک عمدہ مثال ہے، طالب علم اسے غور سے پڑھے، اس

عمل میں خط اوہ پر ایک ایسا نقطہ مطلوب ہے جس کے محدود بلحاظ ا، ب، ج

اور بلحاظ لا، لا، ما، ج اور بلحاظ ما، ما، ج متشائل ہوں یعنی یہاں یہ مطلوب

ہے کہ م، م کی قیمتیں ہم اس طرح منتخب کریں کہ جملہ

$$م (ب + ج + لا + م) + م لا$$

مشکل ہو، سب سے پہلے ہم م کو ب + ج کے مساوی لیتے ہیں تاکہ شمار کنندہ کسور سے خالی ہو جائے، اب چونکہ شمار کنندہ میں لا، م کا سر ب ہے اور لا، م کا ج اس لئے ہمیں م کو لا کے مساوی منتخب کرنا چاہئے۔
اب شمار کنندہ مشکل ہے اور نسبت م لا + ب + ج کے مساوی ہے اسلئے یہ بھی مشکل ہے، پس معلوم ہوا کہ نسبت ب + ج : لا کا انتخاب محض اتفاقی نہیں ہے۔

مشقیں

۹۔ ایک نقطہ نقاط (۷، ۷) اور (۶، ۵) کے ملانے والے خط کو نسبت ۷:۵ سے داخلا تقسیم کرتا ہے، اس کے محدود دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک نقطہ نقاط (۶، ۳) اور (۷، ۲) کے ملانے والے خط کو خارجاً نسبت ۵:۱ سے تقسیم کرتا ہے، اس کے محدود دریافت کرو۔

۱۱۔ معلوم کرو کہ محور لا نقاط (۶، ۴) (۱، ۷) کے ملانے والے خط کو کس نسبت سے تقسیم کرتا ہے [نسبت م:م ایسی معلوم کرو کہ م کی قیمت صفر ہو]

۱۲۔ نقاط (لا، لا) اور (لا، لا) کے ملانے والے خط کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے، نقطہ (لا، لا) سے شروع ہو کر جو ل، واں نقطہ تقسیم ہے اس کے محدود معلوم کرو۔

۱۳۔ اگر ایک مثلث کے اضلاع ب ج، ج ل، ل ب کے نقاط منصف د، ع، ف ہوں اور اگر ل، ب، ج کے محدود بالترتیب (لا، لا)، (لا، لا)، (لا، لا) ہوں تو ثابت کرو کہ د، ب، ع، ج، ف ایک ایسے نقطہ پر

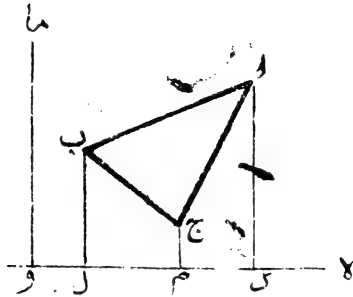
ملتے ہیں جس کے حدود $\frac{لا + لا + لا}{۳}$ ، $\frac{لا + لا + لا}{۳}$ ہیں (ہم جانتے ہیں کہ

نقطہ مثلث کا مرکز ثقل ہے)

۱۴۔ مثلث کا قریب اس کے رؤسوں کے محدود کی رقوم میں علوم کرو۔

قائم محور۔ فرض کرو کہ ل، ب، ج کے محدود بالترتیب (لا، لا)، (لا، لا)، (لا، لا) ہوں

(لام، مام) ہیں، معین اک، بل، ج م کھینچو، تب



ن شکل ۶

۵ اب ج = منحرف ب ک - منحرف ب م - منحرف ج ک

اب منحرف ب ک = ۵ ب ل ک + ۵ ب ا ک

$\frac{1}{4} ل ک (ل ب + ک ا) =$

$\frac{1}{4} (لام - مام) (لام + مام) =$

باقی رقبوں کو اسی طرح تخیل کرنے سے

۵ اب ج = $\frac{1}{4} لام مام - لام مام + لام مام - لام مام + لام مام - لام مام$ (۵)

یہاں ہم نے مثلث کے راسوں کو گھڑی کی سوئیوں کی مخالف سمت میں لیا ہے، اگر انہیں سوئیوں کی سمت میں لیا جائے تو مساوات (۵) سے رقبہ حاصل کرنے کیلئے اس کے بائیں رکن کی علامت تبدیل کرنی چاہئے۔

نتیجہ صریح - مثلث اب و کا رقبہ = $\frac{1}{4} (لام مام - لام مام)$

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} لام & مام \\ مام & لام \end{vmatrix} =$$

اس صورت میں مثلث کے راسوں 'ا'، 'ب' و 'ک' مخالف سمت ماعت لیا گیا ہے

پس مساوات ۵۱ کی ہندسی تعبیر ہے

۵ اب ج = ۵ و ا ب - ۵ و ج ب + ۵ و ج ا

مائل محورہ بناوٹ اور عمل ہی بنیاد پر ہوا فرق صرف یہ ہے کہ ہمیں خط ولا پر

عمود نہیں ہیں۔

$$\Delta \text{ ب ل ک} = \frac{1}{4} \text{ ب ل} \times \text{عمود نقطہ ک سے خط ب ل پر}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ ب ل} \times \text{ل ک جب سہ}$$

اور اسی طرح دوسرے رقبوں کے لئے۔ پس مائل محوروں کی صورت میں یہ فرق ہے کہ رقبہ کی تمام رقوم میں جب سہ شامل ہوتا ہے۔

۷۔ اور ب ج = $\frac{1}{4} \{ \text{لام مام} + \text{لام مام} + \text{لام مام} + \text{لام مام} \}$ جب سہ جہاں راسوں کو حسب سابق مخالفت سمٹ لیا گیا ہے، مساوات ذہ (تو یا د) رکھنا چاہئے۔

مثال۔ ایک ذواربۃ الاضلاع کے راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کے محد و مخالف سمت ساعت (لام، مام)، (لام، مام)، (لام، مام)، (لام، مام) ہیں، ثابت کرو کہ قائم محوروں کی صورت میں اس کا رقبہ

$\frac{1}{4} \{ \text{لام مام} + \text{لام مام} + \text{لام مام} + \text{لام مام} \}$ ہے لیکن اگر مائل ہوں تو اوپر کے جملہ میں ہیں جب سہ کا بطور جزو ضربی اضافہ کر دینا چاہئے (کیونکہ ذواربۃ الاضلاع کا کل رقبہ مثلثات 'ا' ب ج اور ب ج د کے رقبوں کے مجموعہ کے برابر ہے)

مشقیں

۱۴۔ نقاط ذیل کو ملانے سے جو مثلث بنتے ہیں ان کے رقبے دریافت کرو۔

(ا) (۰، ۳)، (۱، ۲)، (۲، ۱)

(ب) (۰، ۰)، (۱، ۱)، (۲، ۱)

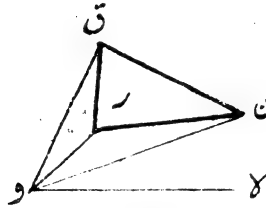
(ج) (۰، ۰)، (۱، ۰)، (۰، ۱)

۱۵۔ ایک ذواربۃ الاضلاع کے راس

($\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$)، ($\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$)، ($\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{4}$)

($\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$) ہیں، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

تب $ن ق = و ن + و ق - ۲ و ن \times و ق$ جم ن وق
 $ن ق = ر + ر - ۲ ر$ جم (طم - طم) (۱۱)
 مثال ۱۷۔ اس ضابطہ کو کارٹیسری قائم ضابطہ سے حاصل کرو۔
 ۸۔ ایک مثلث کا رقبہ اس کے رأسوں کے قطبی محدود کی رقوم میں دریافت کرو۔



شکل ۱۰

فرض کرو کہ ن (ر، طم) 'ق (ر، طم) 'ر (ر، طم)
 مثلث کے رأس ہیں جن کو مخالف سمت ساعت یا گیا ہے، نیز نقطہ ر
 مثلث ن وق کے اندر واقع ہوتا ہے

$$\Delta ن ق ر = \Delta ن وق - \Delta ر وق - \Delta ن وق$$

$$\Delta ن وق = \frac{۱}{۲} و ن \times و ق \text{ جب } ن وق$$

$$= \frac{۱}{۲} ر ر \text{ جب (طم - طم)}$$

باقی رقبوں کو اسی طرح تحول کرتے کے بعد

$$\Delta ن وق = \frac{۱}{۲} ر ر \text{ جب (طم - طم)} + \frac{۱}{۲} ر ر \text{ جب (طم - طم)} + \frac{۱}{۲} ر ر \text{ جب (طم - طم)} \dots (۱۲)$$

طالب علم کو رأسوں کے مختلف مقامات کے لئے شکلیں کھینچنے سے اس ضابطہ کی تصدیق کرنی چاہیے

مشقیں

۱۸۔ جہاں نقاط ذیل کے قطبی محدود ہوئے ہیں ان کے قائم محدود معلوم کرو نیز نقطوں کو
 شکل میں دکھاؤ

$$(۱) \text{ ما } ۲, ۵ (دب) - ۲۸, ۳ (ج) - ۳۸, ۴$$

۱۹۔ جن نقطوں کے کارٹیزی محمد حسب ذیل ہیں ان کے قطبی محدود دریافت کرو

(۱) - $\sqrt{18}$ - $\sqrt{18}$ (ب) $\sqrt{18}$ - $\sqrt{18}$ (ج) - ۵ -

۲۰۔ درمیانی فاصلہ معلوم کرو

(۱) $(\sqrt{18}, \sqrt{18})$ اور $(\sqrt{18}, \sqrt{18})$

(ب) $(\sqrt{18}, \sqrt{18})$ اور $(\sqrt{18}, \sqrt{18})$

۲۱۔ نقاط ذیل کو ملانے سے جو مثلث بنتے ہیں ان کے رقبے دریافت کرو

(۱) $(\sqrt{18}, \sqrt{18})$ ، $(\sqrt{18}, \sqrt{18})$ ، $(\sqrt{18}, \sqrt{18})$

(ب) $(\sqrt{18}, \sqrt{18})$ ، $(\sqrt{18}, \sqrt{18})$ ، $(\sqrt{18}, \sqrt{18})$

۲۲۔ منسلک (۱۲) کو قائم کارٹیزی ضابطہ سے حاصل کرو۔

۲۳۔ اگر ایک ذوالرباعۃ الاضلاع کے نقاط رأس (ب، ج، د) کے

قطبی محدود مخالف سمت سے سمیت (ب، ج، د) (ب، ج، د) (ب، ج، د)

(ب، ج، د) ہوں تو ثابت کرو کہ اس کا رقبہ

$\frac{1}{2} \times (ب، ج، د) + (ب، ج، د) + (ب، ج، د)$

$+ (ب، ج، د)$ ہو گا۔

۹۔ طریق اور مساواتیں - جب ایک نقطہ کسی خاص قاعدہ یا شرط کے

ماتحت حرکت کرے تو اس کے راستہ کو ہم اصطلاحاً طریق کہینگے۔

مثلاً ہم جانتے ہیں کہ ایک ایسے نقطہ کا طریق جو ایک ثابت نقطہ سے ہمیشہ ایک ہی فاصلہ پر

رہتا ہے ایک دائرہ کا محیط ہے، جب ایک نقطہ کسی ایک ہی مقام پر مقید نہیں ہوتا بلکہ

ایک خط پر حرکت کر سکتا ہے تو اس کے محدودوں دائرہ محدود کہتے ہیں۔

جب ایک نقطہ کسی خاص قاعدہ یا شرط کے تابع حرکت کرتا ہے تو اس کے

محد کسی متناظر جہر یہ ربط کو پورا کرتے ہیں، مثلاً اگر ایک نقطہ اس طرح حرکت کرے

کہ اس کا فاصلہ ثنائی حرکت میں مبداء سے ہمیشہ ۱ ہو تو اس کے قائم کارٹیزی محدود

ہمیشہ مساوات $۱ = \sqrt{۲} \times \sqrt{۲}$ (دفعہ ۲)

پس ہر ایک ایسے منحنی کے جواب میں جو ایک نقطہ کسی خاص قاعدہ کے تابع

حرکت کرنے سے مرسم کرتا ہے ایک غیر متبدل جبریہ ربط ہوتا ہے جس کو منحنی کے ہر ایک نقطہ کے محدود پورا کرتے ہیں، اس جبریہ ربط کو منحنی کی مساوات کہتے ہیں۔ اور برعکس اس کے ہر ایک ایسی جبریہ مساوات کے جواب میں جس کے ذریعہ ایک متحرک نقطہ کے محدود باہم مربوط ہوں ایک منحنی ہوتا ہے جس پر یہ نقطہ ہمیشہ واقع ہوتا ہے جب تک کہ اس کے محدود مساوات معلومہ کو پورا کریں۔ اس منحنی کو مساوات کا طریق کہتے ہیں مثلاً اوپر کی مثال میں ایک ایسے دائرہ کی مساوات جس کا مرکز مبدأ ہو اور نصف قطر a ، $a^2 + y^2 = x^2$ ہے، اور مساوات $a^2 + y^2 = x^2$ کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز وہ ہے اور نصف قطر a ۔

ہم نے صحت سہولت کی خاطر قائم کارٹیسز محدودوں کا اوپر ذکر کیا ہے لیکن ظاہر ہے کہ اسی طرح ایک منحنی کی مساواتیں مائل کارٹیسز، اور قطبی محدودوں میں بھی ہو سکتی ہیں، اس تہید کے بعد ذیل کی تعریفات سمجھ میں آئیں گی۔
کسی منحنی کی مساوات ایک جبریہ ربط ہے جس کو منحنی کے ہر ایک نقطہ کے محدود پورا کرتے ہیں۔

برعکس اس کے مساوات کا طریق وہ منحنی ہے جس پر کے ہر ایک نقطہ کے محدود مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ یہ منحنی ایسا ہونا چاہئے کہ وہ تمام نقطے جو شرط کو پورا کریں اس پر واقع ہوں اور کوئی ایسا نقطہ جو منحنی پر واقع نہ ہو شرط کو پورا نہ کرے۔ فرض کرو کہ دو منحنی خطوط کی مساواتیں معلوم ہیں، اب ظاہر ہے کہ جس نقطہ یا نقاط پر یہ منحنی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں ان کے محدود دووں مساواتوں کو پورا کریں گے کیونکہ ہر ایک نقطہ تقاطع دووں منحنی خطوط پر واقع ہے۔ اس لئے اگر نقطہ تقاطع کے محدود مطلوب ہوں تو ہمیں دووں مساواتوں کو a ، $a^2 + y^2 = x^2$ طہ کے لئے (جو محدود زیر بحث ہوں) ایک ساتھ حل کرنا چاہئے۔

اوپر کی عبارت اور تعریضیں نہایت ضروری ہیں طالب علم کو چاہئے کہ آگے جانے سے پیشتر ان سے بخوبی واقف ہو لے۔

مساوات کے طریق کا مفہوم شاید اس طرح زیادہ واضح ہوگا، لا کو کوئی قیمتیں بالترتیب سے جاؤ اور ان کے جواب میں مائیں قیمتیں مساوات سے معلوم کرو اس طرح

کئی نقطے طریقہ پٹیس کے جن کو شکل میں مربع دار کا غریبہ مرتسم کرنے اور ملانے سے طریق کی شکل کا کچھ بہت چل سکتا ہے۔
مثال لا۔ ما۔ کے طریق کو مرتسم کرو۔

اوپر کے طریقہ کے موافق عمل کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقاط (۰،۰)، (۱،۱)، (۲،۲)، (۱،-۱)، (۰،-۲) مطلوبہ طریق پر واقع ہیں کہ یہ نقطے زاویہ لا و ما کے منصفین کی نشان دہی کرتے ہیں، مگر ہمیں ابھی یہ ثابت کرنا ہے کہ اس منصفین کے ہر ایک نقطہ کے محدود مساوات کو پورا کرتے ہیں اور یہ اقلیدہم اش ۶ سے ظاہر ہے، پس یہ منصفین طریق مطلوبہ۔

مشقیں

۲۴۔ ثابت کرو کہ محاور لا اور ما کی مساواتیں بالترتیب ما۔ اور لا۔ ہیں۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ مساوات $r = 1$ کا طریق ایک دائرہ کا محیط ہے

اور مساوات $r = 0$ کا طریق ایک خط استقیم ہے۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ جن خطوط کی مساواتیں لا۔ ما۔ اور لا۔ + ما۔ ہیں وہ

ایک دوسرے کو نقطہ (۱،۱) پر قطع کرتے ہیں۔

۲۷۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دونوں محوروں سے اس کے فاصلوں کے

مربعوں کا مجموعہ ۲ ہے، اس کا طریق دریافت کرو۔

۲۸۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کے فاصلہ کا مربع نقطہ (۱،۰)

سے ایک کے برابر ہو۔

۲۹۔ ایک ایسے طریق کی مساوات دریافت کرو جس کا ہر ایک معین اس کے متناظر

فضہ سے بقدر ایک معلومہ فاصلہ کے بڑا ہو۔

۳۰۔ ذیل کی مساواتوں میں سے ہر ایک کا طریق مرتسم کرو

$$(۱) \quad ۲ \text{ لا۔} - \text{ما۔} = ۱۶ \quad (ب) \quad \text{لا۔} + \text{ما۔} = ۱۶$$

$$(ج) \quad \text{ما۔} = ۴ \text{ لا۔} \quad (د) \quad \text{ما۔} = ۴$$

$$(ع) \quad \text{لا۔} = \text{ما۔} \quad (ن) \quad \text{لا۔} = -$$

(گ) $۳ لا + ۶ = ۶$ (ھ) $لا = لا$

۱۰۔ خط مستقیم کی مساوات

(ا) جب وہ کسی ایک محور کے متوازی ہو۔

اگر ایک خط مستقیم محور لا کے متوازی ہو تو اس کی مساوات ما تب ہوگی جہاں ب اس خط پر کے کسی نقطہ کا معین ہے، اسی طرح سے لا اور ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو محور ما کے متوازی ہو جہاں لا اس خط مستقیم پر کے کسی ایک نقطہ کا فصلہ ہے۔

(ب) خط مستقیم کی مساوات جب اس کی سمت دی ہوئی ہو اور اس پر کسی ایک نقطہ کے محد معلوم ہوں۔

قائم محور۔ فرض کرو کہ ق (لا، ما) نقطہ معلوم ہے اور خط مستقیم محور لا کے ساتھ زاویہ طہ (مخالف سمت ساعت) بناتا ہے۔

فرض کرو کہ ن (لا، ما) کوئی اور

نقطہ خط مستقیم پر ہے

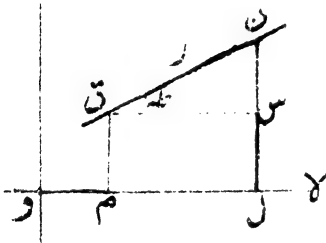
معین ق م، ن ل کھینچو اور لا

کے متوازی ق م کھینچو جو ن ل

یا ن ل محدودہ کو نقطہ س پر قطع کرے۔

نقطہ ن ذیل کی ہندسی شرط کو پورا

کرنا ہے



شکل ۱۱

س ن = ق س مس طہ

اسی شرط کو جبر و مقابلہ کی زبان میں بیان کرنے سے

ما - ما = (لا - لا) مس طہ

(۱۳)

یا $\frac{لا - لا}{جب طہ} = \frac{ما - ما}{جب طہ}$

اور یہ مساوات مطلوبہ ہے، اس مساوات کو بالعموم اس طرح لکھتے ہیں

ما - ما = ص (لا - لا) (۱۴)

جہاں خط کا میلان طہ، مسن ام ہے۔

اگر خط مستقیم محور ماکو مبداء سے اوپر فاصلہ ب پر قطع کرے تو ہم ق کو نقطہ (ب، ب) مان سکتے ہیں اور اس صورت میں مساوات ہوگی

$$(۱۵) \dots\dots\dots \text{ما} = \text{م} + \text{لا} + \text{لب}$$

اگر خط مستقیم مبداء میں سے گزرے تو اس کی مساوات ہوتی ہے

$$(۱۶) \dots\dots\dots \text{ما} = \text{م} + \text{لا}$$

نتیجہ صریح نقطہ ن کے محدد لا + رجم طہ، ما + رجب طہ ہیں۔

مائل محور۔ شکل اور عمل حسب بالا۔

$$\Delta \text{ن ق س} = \text{طہ}$$

$$\Delta \text{ق ن س} = \Delta \text{ما ر لا} \Delta \text{ق ق س}$$

$$= \text{سہ} - \text{طہ}$$

$$\frac{\text{ن س}}{\text{ق س}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{جب (سہ - طہ)}}$$

شکل ۱۲

اس سے معلوم ہوگا کہ مساواتیں (۱۲ تا ۱۶) اس صورت میں بھی وہی رہیں گی سوائے

اس کے کہ م کی بجائے جملہ جب (سہ - طہ) ہوگا جس سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ خط

مستقیم کا میلان ہے۔

$$(۱۷) \dots\dots\dots \text{مس} \text{طہ} = \frac{\text{م} \text{جب سہ}}{\text{م} + \text{جم سہ}}$$

مثال۔ محوروں کا زاویہ میلان ۴۵° ہے، جو زاویہ خط

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{(2h + 4h)} \text{ لا محور لا سے بنانا ہے اس کو دریافت کرو۔}$$

$$\text{اس جگہ سہ} = ۴۵^\circ \text{ اور م} = \frac{1}{4} (2h + 4h)$$

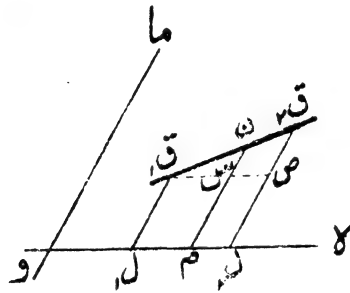
$$\text{مس} \text{طہ} = \frac{\text{م} \text{جب سہ}}{\text{م} + \text{جم سہ}} = \frac{\frac{1}{4} \text{م}}{\frac{1}{4} \text{م} + 1} = \frac{\text{م}}{1 + 4\text{م}}$$

$$\frac{(\sqrt{2}h + \sqrt{4}h) \frac{1}{4}}{\sqrt{2}h + (\sqrt{2}h + \sqrt{4}h) \frac{1}{4}} = \text{پس مس طہ}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}h + \sqrt{4}h}{\sqrt{2}h^2 + \sqrt{4}h}$$

طہ = ۳۰°

(ج) خط مستقیم کی مساوات جب اس پر کے کسی دو نقطوں کے محدود معلوم ہوں



شکل ۱۳

فرض کرو کہ ق، (لا، ما)، اور ق، (لا، ما) نقاط معلوم ہیں اور ن (لا، ما) خط پر کوئی اور نقطہ ہے۔

معین ق، ل، ق، ل، ن، م کھینچو اور ق، س ص کو دلا کے متوازی کھینچو کہ وہ ن م کو بس پر اور ق، ل کو ص پر قطع کرے۔ نقطہ ن اس ہندسی شرط کو پورا کرتا ہے

$$\frac{س ن}{ص ق} = \frac{ق س}{ق ص}$$

اس ہندسی ربط کے مقابل جملہ جبر یہ ہے

$$(۱۸) \dots\dots\dots \frac{لا - ما}{لا - ما} = \frac{لا - لا}{لا - لا}$$

یہ مساوات مطلوبہ ہے اور یہ قائم اور مائل ہر دو محوروں کے لئے درست ہے۔

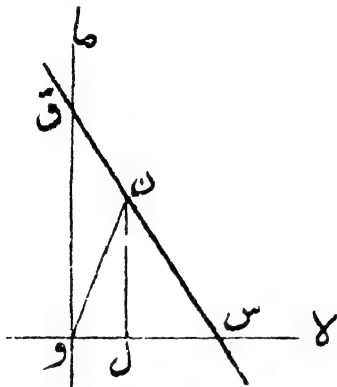
مثال - نقاط $(-۳، ۷)$ ، $(۱، -۲)$ کو ملانے والے خط کی مساوات دریافت کرو۔

$$\frac{(۷ - (-۲))}{(۱ - (-۳))} = \frac{۷ - ۷}{۱ - ۱}$$

$$\text{یا } \frac{(۷ + ۲)}{۴} = \frac{۷ - ۷}{۱ - ۱}$$

تحویل کے بعد $۱۹/۴ = ۱ + ۵/۴$

(د) خط مستقیم کی مساوات جبکہ محوروں پر اس کے مقطوعوں کے طول معلوم ہوں۔
یہ (ج) کی ایک خاص صورت ہے لیکن اس کے لئے ایک بلاواسطہ ثبوت



شکل ۱۲

ذیل میں مندرج ہے۔
تقاطع محور - فرض کرو کہ محاور ۷ اور
مابہر مقطوعات $OS = (۱)$ اور
وق $(= ب)$ ہیں نیز فرض کرو کہ خط
کوئی اور نقطہ $N (۱، ۷)$ ہے۔
نقطہ N ذیل کی شرط ہندسی کو پورا کرتا ہے
 $\Delta وق ن + \Delta ون س = \Delta وس ق$

اس ربط کے مقابل جملہ جبر یہ ہے

$$\frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ا} = \frac{۱}{۷}$$

(۱۹)

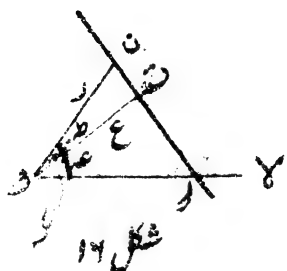
یہ مساوات تال محوروں کے لئے بھی درست ہے، فرق صرف یہ ہے کہ
جزو ضربی جب سہ ہر رقبہ میں شریک ہوتا ہے اور آخری طرفین سے خارج ہو جاتا ہے
(غ) عمودی صورت - مبدأ سے خط مستقیم پر عمود نکالا گیا ہے اس کا طول
ع معلوم ہے نیز وہ زاویہ (عہ) معلوم ہے جو یہ عمود محور ۷ سے بناتا ہے۔

[عہ کو مخالف سمت ساعت ناپا گیا ہے]

اور اس مساوات کا متناظر جبر یہ ربطیہ ہے

لاجم عمر + ماجم (سہ - عمر) = ع (۲۱)
 (ف) خط مستقیم کی قطبی مساوات
 (صورت عامہ)

فرض کرو کہ قطب سے جو عمود دوت خط
مستقیم پر نکالا جائے اس کا طول ع ہے
اور بموجب سابق ت کے محدد (ع لغہ)



فرض کرو کہ خط مستقیم پر ایک اور نقطہ
ن (نقطہ) ہے۔

نقطہ ن ذیل کی سند سی شرط پورا کرتا ہے۔

ون جمت ون = وت

ابحاث و ن = ذرو ن = دلو و ت = طه = ع

اس لئے متناظر جبریہ بط ہے رحم (طہ - عہ) = ع (۲۶)

مستقیس

۳۱۔ ساوات (۱۸) کو اس امر کی مدد سے ثابت کرو کہ Δ ن ق ق کا رقبہ صف ہوگا اگر ن خط ق ق یرواقع ہو۔

۳۲۔ کارٹیزی صورت (۲۰) کو قطبی صورت (۲۲) سے متبذل کرو اور برعکس اس کے۔
(گ) ایک ایسے خط کی قطبی مساوات جو دو نقاط معلومہ میں سے گزرے۔

فرض کرو کہ (ر، ط، ب) اور سب (ر، ط، ب) دونوں کا معلومہ ہیں اور خط (ر، ط، ب) پر کوئی اور نقطہ (ر، ط، ب) ہے۔

نقطہ ن اس ہندی رہا کو پورا کرتا ہے کہ مثلث اوب ن کا رقبہ مغیرہ ہے
برابر ہے اس لئے موجب دفعہ ۸ خط مستقیم کی مساوات مطلوبہ ہے

۱. رجب (طه - طه) + ۲. رجب (طه - طه) + ۳. رجب (طه - طه) + ۴. رجب (طه - طه)

یا $\frac{1}{2}$ جب (طہ - طہ) + $\frac{1}{2}$ جب (طہ - طہ) + $\frac{1}{2}$ جب (طہ - طہ) = ۰ (۲۳)

مشقیں

۳۳۔ دو خطوط نقطہ (۲، ۰) میں سے گزرتے ہیں اور محور لا کے ساتھ زاویے $\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2}$ بناتے ہیں، ان کی مساواتیں دریافت کرو۔

نیز ان خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو اوپر کے خطوط کے متوازی ہوں اور محور ما کو مبدأ سے نیچے فاصلہ ۲ پر ملیں۔ ان خطوط کے نقاط تقاطع محور لا کے ساتھ دریافت کرو۔

۳۴۔ خطوط ما = $\frac{1}{2}$ لا اور ما = $\frac{3}{4}$ لا کے درمیان محور لا سے دریافت کرو۔

ثابت کرو کہ خط ما = لا + ۳ ان کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ نقاط (۳، ۱)، (۲، ۳)، (۰، ۱۱) ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

۳۶۔ اگر و ما کے متوازی کوئی معین کھینچا جائے جو خطوط مستقیم ما = ص لا اور ما = ص لا + ب کو قطع کرے تو ثابت کرو کہ اس کا جو حصہ ان دو خطوط کے درمیان واقع ہوتا ہے اس کا طول مستقل ہے۔

۳۷۔ ایک دائرہ کا مرکز مبدأ ہے اور نصف قطر ۲، اس کا ایک قطر محور لا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے اور اس کے دونوں سروں پر دو ماس کھینچے گئے ہیں، ان کی مساواتیں دریافت کرو۔

۳۸۔ ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو نقاط (۳، ۵) اور (۴، ۴) کے ملانے والے خط کی تنصیف کرے اور محور لا سے زاویہ ۴۵° بنائے۔

۳۹۔ ایک مثلث کے راس (۰، ۰)، (۴، ۲) اور (۴، ۶) ہیں، اس کے اضلاع کی مساواتیں دریافت کرو۔

۴۰۔ ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو نقطہ ق (۲، ۲) میں سے گزرے اور محور پراس کے مقطوعات کا مجموعہ = ۹

۴۱۔ ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو نقطہ ق (۳، ۲) میں سے گزرے اور محور لا سے زاویہ ۴۵° بنائے، نیز جہاں یہ خط مستقیم لا + ما = ۱ کو قطع

$$(۱) \dots\dots\dots = \text{لا} + \text{ب} \quad \text{ما} + \text{ج}$$

$$(۲) \dots\dots\dots = \text{لا} + \text{ب} \quad \text{ما} + \text{ج}$$

$$(۳) \dots\dots\dots = \text{لا} + \text{ب} \quad \text{ما} + \text{ج}$$

مساواتوں (۱) اور (۲) سے $\text{لا} - \text{لا} = \text{ب} - \text{ب}$ (ما - ما) =

۔۔ (۱) اور (۳) سے $\text{لا} - \text{لا} = \text{ب} - \text{ب}$ (ما - ما) =

$$\text{اس لئے} \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}}{\text{ما} - \text{ما}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{ق} - \text{ق}}{\text{س} - \text{س}} = \frac{\text{ر} - \text{ر}}{\text{ن} - \text{ن}}$$

اس لئے ثابت ہوا کہ نقطہ ن خط ق ق پر واقع ہے۔

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

متبادل ثبوت - درج اول کی مساوات عامہ اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{ب}} \quad \text{جس کی شکل مساوات ما} = \text{ص} + \text{لا} + \text{ب کی ہے اہم ثابت}$$

کر چکے ہیں کہ شرائط مساوات آخر الذکر ایک ایسے خط مستقیم کے ہر نقطہ کے محددوں سے پوری ہوتی ہیں جو محور ما کو مبدأ سے فاصلہ ب پر قطع کرتا ہے اور محور لا سے زاویہ

مس - ام (قائم محوروں کی صورت میں) اور مس + ص جب سے (ما) محوروں کی صورت میں) بناتا ہے۔

نیز اس مساوات کو کسی اور نقطہ کے محدود پورا نہیں کر سکتے کیونکہ فرض کرو کہ ایک نقطہ ق خط مذکورہ کے باہر کچھ فاصلہ اوپر واقع ہے اور اس کے محدود (لا) (ما) ہیں۔

نیز فرض کرو کہ اس خط پر نقطہ ن ایسا ہے جس کا فاصلہ (لا) (ما) ہی ہے جو ق کا اور جس کا متین ما ہے۔

تب ما = ص + لا + ب چونکہ (لا) (ما) اس خط پر واقع ہے۔

لیکن ما < ما چونکہ ق نقطہ ن کے اوپر واقع ہے

ما < ص + لا + ب

اسی طرح سے اگر ق خط مذکور کے نیچے واقع ہو تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

ما + م + لا + ب

اس لئے معلوم ہوا کہ مساوات ما = م + لا + ب کو ہر ایک ایسا نقطہ جو ایک خاص خط مستقیم پر واقع ہو پورا کرتا ہے لیکن اور کوئی نقطہ پورا نہیں کر سکتا اس لئے ما = م + لا + ب ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

۱۲۔ دفعہ آخر کے استدلال سے ظاہر ہے کہ نقاط (لا، ما) اور (لام، ما) ایک خط مستقیم ما = م + لا + ب کے ایک جانب یا متقابل جانبوں میں واقع ہونگے اگر جملات (ما، م + لا، ب) اور (ما، م + لا، ب) کی علامات بالترتیب موافق یا مختلف ہوں اور چونکہ مساوات عامہ لا + ب + ما + ج = مساوات ما = م + لا + ب کو ایک مستقل مقدار میں ضرب دینے اور صورت مذکورہ میں تحویل کرنے سے حاصل ہوتی ہے اس لئے معلوم ہوا کہ نقاط (لا، ما) اور (لام، ما) خط مستقیم لا + ب + ما + ج = کے ایک جانب یا متقابل جانبوں میں واقع ہوں گے اگر جملات

لا + ب + ما + ج اور لا + ب + ما + ج کی علامات بالترتیب موافق یا مختلف ہوں، یاد رہے کہ جملات مندرجہ بالا خط مستقیم کی مساوات میں محدود (لا، ما) اور (لام، ما) مندرجہ کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۳۔ مساوات لا + ب + ما + ج = ذیل کی صورتوں میں لکھی جاسکتی ہے

$$ما = \frac{لا}{ب} - \frac{ج}{ب} \quad اور \quad \frac{لا}{ب} + \frac{ج}{ب} = 1$$

جن کا مقابلہ مساوات کی حسب ذیل صورتوں

ما = م + لا + ب اور لا + ب + ما + ج = ۱ سے کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ خط مستقیم کی مساوات عامہ لا + ب + ما + ج = کا میلان محور لا سے سن (لا) ہے اگر محور قائم ہوں اور سن (ب - وجہ سن) ہے اگر محور مائل ہوں، نیز ظاہر ہے کہ محاور لا اور ما پر قطوعات - ج اور - ج ہیں۔

۱۵۔ مساوات لا + ب + ما + ج = کو عمودی صورت لاجم عہ + جب عہ = ع میں (جہاں محور قائم ہیں) تخیل کرتے وقت احتیاط سے کام لینا چاہئے، چونکہ مساوات محلہ میں لا اور ما کے سروں کے مربعوں کا مجموعہ لازماً ایک کے برابر ہونا چاہئے اس لئے سب سے پہلے ہمیں مساوات کی کل ارقام کو لا + ب پر تقسیم کرنا چاہئے اس تخیل کے بعد مساوات ہوگی

$$\frac{لا}{لا + ب} = \frac{ب}{لا + ب} = \frac{ج}{لا + ب} \dots \dots (۱)$$

ہم جانتے ہیں کہ ع لازماً مثبت ہے [دفعہ ۱۰ (ع)] اس لئے معلوم ہوا کہ اگر ج مثبت ہو تو (۱) تخیل شدہ مساوات کی صحیح صورت ہے اور اگر ج منفی ہو تو مساوات (۱) جس میں جملہ ارقام کی علامات بدل دی جائیں مساوات مطلوبہ کی صحیح صورت ہوگی۔

مبدأ سے خط مستقیم پر کے عمود کا طول $\frac{ج}{لا + ب}$ ہوگا اگر ج مثبت ہو اور

$$\frac{-ج}{لا + ب} \text{ اگر ج منفی ہو۔}$$

ماثل محوروں کی صورت میں اگر مساوات لا + ب + ما + ج = کا مقابلہ لاجم عہ + ما جم (سہ - عہ) = ع سے کیا جائے تو

$$-ع \times \frac{ج}{ج} = \text{جم عہ}$$

$$-ع \times \frac{ب}{ج} = \text{جم (سہ - عہ)} = \text{جم سہ جم عہ} + \text{جب سہ جب عہ}$$

$$-ع \times \frac{ب}{ج} + ع = \frac{\text{اجم سہ}}{ج} = \text{جب سہ جب عہ}$$

$$\text{اور۔۔۔ ع} \times \frac{\text{اجب سہ}}{ج} = \text{جب سہ جم عہ}$$

مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$\text{ج} = \{ (\text{ا} + \text{ب}) + (\text{ا} + \text{ب}) \} = \text{ج}$$

ج جب سہ

$$\text{ع} = \pm \frac{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} + \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} + \text{ب}}$$

اور مساوات کی تحویل شدہ صورت اگر ج مثبت ہو

$$\text{ا} = \frac{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} + \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} + \text{ب}} - \frac{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} + \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} + \text{ب}}$$

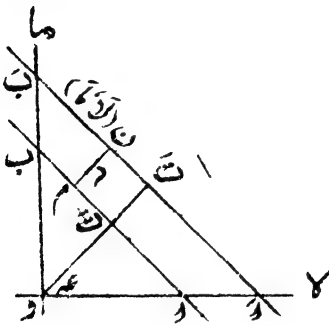
ج جب سہ

$$= \dots \dots \dots (۲)$$

ہوگی لیکن اگر ج منفی ہو تو اس مساوات میں سب ارقام کی علامتیں بدل دینے کے بعد مساوات مطلوبہ حاصل ہوگی۔

۱۶۔ نقطہ (ا، ا) کا عمودی فاصلہ خط مستقیم لا جم عم + ما جب عم = ع سے دریافت کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب خط مستقیم ہے اور ن نقطہ (ا، ا) ہے، فرض کرو کہ عمود ن ص کا طول د ہے جہاں ہم نے فرض کر لیا ہے کہ نقطہ ن اور مبدأ و خط ا ب کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔



شکل ۱۸

نقطہ ن میں سے ا ب کے متوازی ا ن ب کھینچو اور

نقطہ د سے خطوط ا ب اور ا ب پر مشترک عمود و ت نکالو۔ و ت = ع اور زاویہ لا و ت = عم [دفعہ ۱۰ (ع)] اب چونکہ نقطہ د سے خط ا ب پر عمود و ت ہے اور د و لا سے زاویہ عم بناتا ہے

اس لئے خط $اَب$ کی مساوات ہے

لاجم $عہ + مَاجِبِ عہ = وِت = ع + د$ [دفعہ ۱۰ (ع)]
 نیزن (لا، ما) کے محدود $اَب$ کی مساوات کو پورا کرتے ہیں
 \therefore لاجم $عہ + مَاجِبِ عہ = ع + د$

$\therefore د = لاجم عہ + مَاجِبِ عہ - ع$ (۲۴)

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر جملہ لاجم $عہ + مَاجِبِ عہ - ع$ میں نقطہ $ن$ کے محدود مندرجہ کردئے جائیں تو باخصل عمود کا طول مطلوب ہوگا۔

اگر اس کی تصدیق ہندسہ منظر ہو تو $ن$ کا معین $ن$ لکھیں اور $وِت$ پر عمود لی نکالو اس سے معلوم ہوگا کہ ضابطہ (۶۴) کو ہندسی طریق پر اس طرح بیان کر سکتے ہیں

$$م ن = وِجی + وِی ت - وِت$$

مشقیں

۴۵۔ دریافت کرو کہ نقاط (۱۶۱) اور (۲۰۲) خط لا۔ $۳ + ۵ = ۰$

کے ایک ہی جانب واقع ہیں یا متقابل جانبوں میں۔

۴۶۔ ثابت کرو کہ مبدا اور نقاط (۱۰۱)، (۰۰)، (۰۰)، (۰۰) ان چار مختلف خانوں میں واقع ہیں جو خطوط $۳ + لا = ۲$ اور $۵ + لا = ۳ + م = ۲$ کے تقاطع سے پیدا ہوتے ہیں۔

۴۷۔ (۱) مساوات $۳ + لا = ۲ + م = ۱۰$ کو قائم محوروں کے لحاظ سے عمودی صورت میں تحویل کرو۔

(۲) مساوات لا۔ $۳ + م = ۲$ کو عمودی صورت میں تحویل کرو اور محوروں کا

بازی میلان ۹۰ ہے۔

۴۸۔ ثابت کرو کہ مائل محوروں کی صورت میں اگر نقطہ (لا، ما) سے عمود خط

لاجم $عہ + مَاجِمِ (عہ - عہ) = ع$ پر نکالا جائے تو اس کا طول

لاجم $عہ + مَاجِمِ (عہ - عہ) = ع$ ہوگا۔

۴۹۔ مساوات عامہ لا۔ $۳ + م + ج = ۰$ کو عمودی صورت میں تحویل کر کے

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر نقطہ (لا، ما) سے خط لا۔ $۳ + م + ج = ۰$ پر عمود نکالا جائے

تو اس کا طول (بغیر لحاظ علامت) قائم محوروں کی صورت میں

$$1 \text{ (لا + ب + ما + ج)} \dots \dots \dots (۲۵)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ما}} + \frac{1}{\text{ج}}}$$

ہوگا اور مائل محوروں کی صورت میں

$$1 \text{ (لا + ب + ما + ج)} \dots \dots \dots (۲۶)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ما}} + \frac{1}{\text{ج}}}$$

ہوگا -

۱۸۔ اب تک ہم نے عمود کے طول کے متعلق بحث کی ہے، اب ہم اس کی علامت پر غور کریں گے، ظاہر ہے کہ عمود کی علامت نقطہ مذکورہ کے محدودوں (لا، ما) کو جملہ لا + ب + ج میں مندرج کرنے سے معلوم نہیں ہو سکتی کیونکہ خط کی مساوات ذیل کی کسی ایک صورت میں لکھنی جاسکتی ہے لا + ب + ج = یا۔ لا + ب + ج =۔ اب چونکہ نقطہ کے محدود مندرج کرنے سے عمود کی مطلق علامت معلوم نہیں ہو سکتی اس لئے اس کی سمت کا تعین یہ دیکھنے سے ہو سکتا ہے کہ نقطہ (لا، ما) خط مستقیم کے کس جانب واقع ہے، پس اس غرض سے ہم یہ معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ نقطہ (لا، ما) خط مستقیم کے اسی جانب واقع ہے جس جانب کہ مبداء اس کی متقابل جانب میں اور یہ باسانی معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ نقطہ (لا، ما) اور مبداء کے محدودوں کو جملہ لا + ب + ج میں بالترتیب مندرج کرنے سے اگر ہم دیکھیں کہ ماحصل کی علامت ہر صورت میں ایک ہی ہے تو ظاہر ہے کہ دونوں نقطے (لا، ما) اور مبداء خط مستقیم کے ایک ہی جانب واقع ہیں اور اگر یہ علامتیں مختلف ہوں تو یہ نقطے متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

مثال۔ نقطہ (ا، ب) کا عمودی فاصلہ خط $\frac{1}{\frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{ب}}} = ۱$ سے

دریافت کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔

$$\frac{1}{\frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{ب}}} = \frac{1 - ۲}{\frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{ب}}} = \frac{1 - \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ا}}}{\frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{ب}}} = ۵ = \text{مطلوبہ فاصلہ}$$

۱۹- دو خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم ہیں، ان کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔
 قائم محور۔ فرض کرو کہ خطوط مستقیم کی مساواتیں = م = لا + ب اور
 = م = لا + ب ہیں اور محور لا کے ساتھ ان کے میلان بالترتیب طہ، طہ ہیں
 اور ان کا درمیانی زاویہ فہ ہے۔

$$\begin{aligned} \text{تب فہ} &= \text{طہ} - \text{طہ} = \text{مس طہ} = \text{مس طہ} = \text{مس} \\ \text{مس فہ} &= \frac{\text{مس طہ} - \text{مس طہ}}{1 + \text{مس طہ}} \end{aligned}$$

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{مس} - \text{مس}}{1 + \text{مس}} \dots \dots \dots (۲۴)$$

[ملاحظہ ہو کہ اوپر کے عمل میں اگر ہم خطوط کی ترتیب الٹ دیں تو مس فہ کی قیمت
 تو وہی ہوگی مگر اس کی علامت بدل جائے گی یعنی اس صورت میں ہمیں فہ کے
 تکملہ کا ماس حاصل ہوگا]
 مائل محور۔ اس صورت میں

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{مس جب سہ} - \text{مس جب سہ}}{1 + \text{مس جب سہ}}$$

جس سے

$$\text{مس فہ} = \frac{(\text{مس} - \text{مس}) \text{ جب سہ}}{1 + (\text{مس} + \text{مس}) \text{ جب سہ}} \dots \dots \dots (۲۵)$$

مشق ہم خط مستقیم کی مساوات عام کو "ماسی" صورت م = لا + ب
 میں تحویل کرنے سے ثابت کرو کہ خطوط مستقیم

$$\text{لا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج} = \text{لا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج} =$$

کا درمیانی زاویہ قائم محوروں کی صورت میں مس = $\frac{\text{لا} + \text{ب} - \text{لا} + \text{ب}}{\text{لا} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب}}$ ہے اور

$$\text{مائل محوروں کی صورت میں مس} = \frac{(\text{لا} + \text{ب} - \text{لا} + \text{ب}) \text{ جب سہ}}{\text{لا} + \text{ب} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ب}}$$

اس مثال کے آخری دو نتائج کو یاد رکھنا ضروری نہیں، مثالیں حل کرنے میں سب سے اول مساوات معلومہ کو نامی صورت میں لے آنا چاہئے۔ اس کے بعد حسب ضرورت ضوابط (۲۷) اور (۲۸) کی مدد سے حل مطلوب حاصل ہو سکتا ہے۔

لیکن ان دو نتائج کو یاد رکھنا ضروری ہے۔
(۱) خطوط کے باہم متوازی ہونے کی شرط ہر دو قائمہ اورائل محوروں کی صورت میں (مس فہ = ۰)

$$\text{مس} = ۱ \text{ یا } ۲ = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} \dots \dots \dots (۲۹)$$

(ب) ایک دوسرے پر عمود ہونے کی شرط (مس فہ = ۹۰)
قائم محوروں کی صورت میں

$$\text{مس} = ۱ \text{ یا } ۲ = ۱ \text{ یا } ۲ = ۱ \text{ یا } ۲ \dots \dots \dots (۳۰)$$

پس معلوم ہوا کہ اس لیے خط مستقیم کی مساوات جو خط
۱ لا + ب ما + ج = ۰ کے متوازی ہو صرف مستقل رقم کے مناسب
تغیر سے حاصل ہو سکتی ہے (کیونکہ حسب بالا متوازی خطوط کے لئے نسبت لا : ب
وہی رہتی ہے) اس سلسلہ کے کسی خاص خط کی مساوات معلوم کرنے کے لئے
ضروری ہے کہ متوازی ہونے کی شرط کے علاوہ ایک اور شرط دی گئی ہو جس کو استعمال
کرنے سے ہم مساوات کی رقم مستقل معلوم کر سکیں۔

نیز اگر قائم محوروں کے لحاظ سے ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا
مقصود ہو جو لا + ب ما + ج = ۰ پر عمود ہو تو ہمیں لا، ما کے سروں کو
آپس میں بدل کر ان میں سے ایک کی علامت تبدیل کر دینی چاہئے، رقم مستقل کسی
دوسری شرط کی مدد سے حسب سابق معلوم ہو سکتی ہے۔

مشقیں

[۵۰ سے ۶۰ تک قائم محوروں کے لئے ہیں]

۵۰۔ نقطہ (ب، ۱) کا عمودی فاصلہ خط $\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} = ۲$ سے دریافت کرو۔

۵۱۔ ثابت کرو کہ مبدأ کے عمودی فاصلے میں خطوط مستقیم
 $۴ = ۱۰ + ۳ + ۶ = ۱۰ + ۵ + ۱۲ = ۲۶ + ۶ = ۳۲$ اور $۵۰ = ۱۰ + ۲۶$ سے مساوی ہیں۔

۵۲۔ ایک مثلث کے اضلاع ۳ ، ۴ ، ۵ اور ۱ ، ۲ ، ۳ اور ۱ کے مقابل کے اضلاع ہیں، اس کے رأسوں کے محدود دریافت کرو، نیز ان رأسوں سے مقابل کے اضلاع پر جو عمود نکالے جا سکتے ہیں ان کے طول دریافت کرو۔

۵۳۔ خطوط مستقیم ۴ ، ۳ ، ۵ اور ۱ ، ۲ ، ۳ اور ۱ کے درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

۵۴۔ خطوط مستقیم ۴ ، ۳ ، ۵ اور ۱ ، ۲ ، ۳ اور ۱ کے درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

۵۵۔ خطوط مستقیم ۴ ، ۳ ، ۵ اور ۱ ، ۲ ، ۳ اور ۱ کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے اسے دریافت کرو۔

۵۶۔ ان خطوط مستقیم کی مساواتیں دریافت کرو جو نقطہ $(۱، ۲)$ میں سے گزریں اور خط ۴ ، ۳ ، ۵ کے بالترتیب متوازی اور عمود ہوں۔

۵۷۔ ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو مبدأ میں سے گزرے اور نقاط $(۳، ۶)$ اور $(۵، ۴)$ کے ملانے والے خط پر عمود ہو۔

۵۸۔ جو خطوط مبدأ میں سے گزرتے ہیں اور خط ۴ ، ۳ ، ۵ سے ۶۰ کے زاویے بناتے ہیں ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

نیز ان نقاط کے محدود دریافت کرو جہاں یہ خط مذکور سے ملتے ہیں

۵۹۔ محور ۴ پر ایک ایسا نقطہ دریافت کرو جس کا عمودی فاصلہ خط ۳ ، ۴ ، ۵ سے ۴ ، ۳ ، ۵ کے نقطہ مذکور کے اس طرف واقع ہو جس طرف کہ مبدأ واقع نہیں ہوتا۔

۶۰۔ نقطہ $(۴، ۵)$ کے خط ۴ ، ۳ ، ۵ پر عمود نکالایا ہے، اس کے

۶۱۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ خطوط ۴ ، ۳ ، ۵ اور ۱ ، ۲ ، ۳ اور ۱ متوازی ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ ۶۰ ہو۔

۶۲۔ اگر $۳ + لا + ۴ = ۵$ اور $۴ + لا + ک = ۳$ ایک دوسرے پر عمود ہوں تو ک کی قیمت دریافت کرو، محور میں کا درمیانی زاویہ ۳۰° ہے۔

۶۳۔ خطوط $۴ = لا$ اور $۳ + ۵ = لا$ کا درمیانی زاویہ دریافت کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔

۶۴۔ خطوط مستقیم $۲ - لا = ۴ + ۵ =$ اور $۳ + لا + ۶ - ۸ =$ کا درمیانی زاویہ دریافت کرو، محور قائم ہیں۔

۲۰۔ دو خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع کے محدود۔

ہم جانتے ہیں (دفعہ ۹) کہ خطوط مستقیم $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$ اور $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$ کے نقطہ تقاطع کے محدودان دونوں مساواتوں کو ایک ساتھ حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں، پس مذکورہ محدود ہیں

$$\frac{ب - ج - ب - ج}{لا + لا + ب + ما + ج} = \frac{ج - لا - ج - لا}{لا + لا + ب + ما + ج}$$

۲۱۔ تین خطوط مستقیم کے ایک ہی نقطہ میں سے گزرنے کی شرط۔ فرض کرو کہ تین خطوط مستقیم حسب ذیل ہیں

$$لا + لا + ب + ما + ج = ۰ \dots\dots (۱)$$

$$لا + لا + ب + ما + ج = ۰ \dots\dots (۲)$$

$$لا + لا + ب + ما + ج = ۰ \dots\dots (۳)$$

ان کے مترکز یا ایک ہی نقطہ میں سے گزرنے کی شرط یہ ہے کہ (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع کے محدود مساوات (۳) کو پورا کریں یعنی

$لا + لا + ب + ج + (ب - ج - ب - ج) + (ج - لا - ج - لا) = ۰ \dots\dots (۴)$
طالب علم دفعہ ہذا اور گذشتہ کے نتائج کو حفظ کیا اور کھٹے کی کوشش نہ کرے، صرف ان کے اصول کا سمجھنا اور یاد رکھنا کافی ہے۔

جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے اسے مساوات (۱) کا بغور ملاحظہ کرنا چاہیے۔ خطوط کے مترکز ہونے کی یہ شرط ہے کہ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) کا مجموعہ معادیر لا، ما میں ایک مشترک حل ہو، لا اور ما کو ساقط کرنے سے

یہ شرط حاصل ہوگی

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ج} & \text{لا} \\ \hline \text{ب} & \text{ج} & \text{لا} \\ \hline \text{ب} & \text{ج} & \text{لا} \\ \hline \end{array} = 0$$

مساوات مندرجہ بالا (۱) صرف اس شرط کی تفصیلی صورت ہے -

مشق

۶۵- خطوط لا + ما + ۳ = ۱۰ اور لا + ۵ = ۱۳ کے نقطہ تقاطع کے محدد دریافت کرو۔

۶۶- ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات جو دو مفروضہ خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں سے گزرے۔
مساوات ذیل پر غور کرو۔

$$\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ک} = (\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}) = 0 \dots\dots\dots (۳۱)$$

یہ مساوات ک کی تمام قیمتوں کے لئے ایک ایسے خط کو تعبیر کرتی ہے جو لا + ب + ما + ج = ۰ اور لا + ب + ما + ج = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے، کیونکہ (۳۱) بمطابق لا، ما کے مساوات درجہ اول ہے، اس لئے ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، نیز چونکہ لا + ب + ما + ج = ۰ اور لا + ب + ما + ج = ۰ کے نقطہ تقاطع کے محدد ہر دو خطوط کی مساواتوں کو پورا کرتے ہیں اس لئے وہ (۳۱) کو بھی پورا کریں گے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ مساوات مذکورہ ایک ایسے خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو ان خطوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

اگر ک کی قیمت کا مناسب انتخاب کیا جائے تو جو خط مستقیم مساوات (۳۱) سے تعبیر ہوتا ہے وہ ایک از شرط معینہ کو بھی پورا کر سکتا ہے۔

مثال - ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو محور ما کے متوازی ہو اور نقطہ لا - ۵، ما + ۵ = ۱۰ اور لا + ما = ۷ کے نقطہ تقاطع میں

سے گذرے۔
 ان خطوط کے نقطہ تقاطع میں سے گذرنے والے کسی خط مستقیم کی مساوات ہوگی

$$لا - ۷ + ما + ۵ = ک (۳ لا + ما - ۷) = ۰$$

 یا $(۱ + ۳ ک) لا + (ک - ۷) ما + ۵ - ۷ ک = ۰$
 اگر یہ خط محور ما کے متوازی ہو تو ما کا سر صفر ہونا چاہئے، پس $ک = ۷$
 اور مساوات مطلوبہ ہے $لا - ۲ = ۰$

مشقیں

۱۔ ایک ایسے خط کی مساوات دریافت کرو جو خطوط
 $لا - ۷ + ما + ۵ = ۰$ اور $۳ لا + ما - ۷ = ۰$ کے نقطہ تقاطع میں سے گذرے
 اور محور لا کے متوازی ہو۔
 ۲۔ خطوط $لا - ۷ + ما + ۵ = ۰$ اور $۳ لا + ما - ۷ = ۰$ کے نقطہ تقاطع کے
 محدود دریافت کرنے سے اوپر کے دو سوالات کے نتائج کی تصدیق کرو۔
 ۳۔ دفعہ ماقبل کے استدلال کی بنا پر ہم تین خطوط کے مترکز ہونے کی
 شرط کو ایسی شکل میں تحول کر سکتے ہیں جو بعض اوقات مفید ہوتی ہے۔ اگر ہم
 تین ایسے مستقلات ل، م، ن معلوم کر سکیں کہ جملہ
 $ل (لا + لا + ب + ما + ج) + م (لا + لا + ب + ما + ج) + ن (لا + لا + ب + ما + ج) = ۰$

..... (۳۲)
 متطابقاً صفر ہو [یعنی لا، م، ن کی تمام قیمتوں کے لئے صفر ہو جس کے لئے ضروری
 ہے کہ لا کا سر، ما کا سر اور جملہ (۳۱) میں مقدار مستقل تینوں میں سے ہر ایک الگ
 الگ صفر ہو جب ل، م، ن کو مناسب قیمتیں دی جائیں] تو یہ تینوں خط
 مترکز ہوں گے۔

کیونکہ فرض کرو کہ پہلے دو خط نقطہ (لا، ما) پر قطع کرتے ہیں
 تب $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$
 اور $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$

لیکن ل (لا + لا + ب + ما + ج) + م (لا + لا + ب + ما + ج)

+ ن (لا + لا + ب + ما + ج) = ۰

کیونکہ جملہ (۳۲) تغیرات لا، ما کی تمام قیمتوں کے لئے صفر کے مساوی ہے۔

اس لئے ل + لا + ب + ما + ج = ۰

پس نقطہ (لا، ما) تیسرے خط پر بھی واقع ہے، یعنی ثابت ہوا کہ تینوں خطوط ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

اس ترکیب میں خاص سہولت یہ ہے کہ بعض مرتبہ نقطہ دیکھنے سے ہی

ہم ل، م، ن کی قیمتیں متعین کر سکتے ہیں، اس کی سب سے سہل صورت

اُس وقت پیدا ہوتی ہے جب کہ تین خطوط کی مساواتیں ایسی صورت میں دی گئی

ہوں کہ ل، م، ن میں سے ہر ایک کو ایک کے مساوی منتخب کرنے سے جملہ

(۳۲) لا، ما کی تمام قیمتوں کے لئے صفر کے مساوی ہو۔

[جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے وہ پہچان لگا کہ اس ترکیب سے

بھی ہم اسی نتیجہ پر پہنچتے ہیں جو پہلے دریافت ہوا، کیونکہ اگر جملہ (۳۲) ل، م، ن کی تمام قیمتوں کے لئے صفر ہو تو

ل + لا + م + لا + ن + لا + ب + م + ب + ن + ب = ۰، ل + ب + م + ب + ن + ب = ۰،

ل + ج + م + ج + ن + ج = ۰ اور ان مساواتوں سے اگر ل، م، ن کو مساوی

کر دیا جائے تو وہی مساوات حاصل ہوتی ہے جو دفعہ ۲۱ میں حاصل ہوئی |

مثال۔ ثابت کرو کہ جو خطوط شش کے تین اضلاع کی عمودی تضعیف کرتے ہیں

وہ تینوں ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

فرض کرو کہ محور قائم ہیں اور نقاط راس ل، ا، ب، ج کے محدد بالترتیب

(لا، ما)، (لام، م)، (لا، م)، (لام، م) ہیں۔

ب ج کی مساوات ہے [حسب دفعہ ۱۰ (ج)]

$$\frac{لا - لا}{لا - لام} = \frac{ما - ما}{لام - لام}$$

یعنی (لا - لا) (لام - ما) - (لام - ما) (لا - لا) = ۰ (۱)

اگر د ضلع ب ج کا نقطہ تَضییف ہو تو اس کے محدد $(لا + لایم)$ ، $(لام + لم)$ ہوں گے اور د میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کی مساوات یہ ہوگی

$$ما - \frac{لام + لم}{۲} = م (لا - \frac{لا + لایم}{۲}) \dots\dots (ب)$$

اب چونکہ نقطہ د میں سے گزرنے والا خط ب ج پر عمود ہے اس لئے مساوات (ا) میں جو لا اور ما کے سر میں ہیں ان کا تبادلہ کر کے ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل دینی چاہئے، اس لئے ایک ایسے خط کی مساوات جو د میں سے گزرے اور ب ج پر عمود ہو حسب ذیل ہوگی

$$(لام - لایم) (لا - \frac{لا + لایم}{۲}) + (لام - لم) (لا - \frac{لام + لم}{۲}) = \dots\dots (ج)$$

ان دوئے تشاکل ان خطوط کی مساواتیں جو بالترتیب ج ا اور اب کی تَضییف کریں اور ان پر عمود ہوں یہ ہوگی

$$(لام - لا) (لا - \frac{لا + لایم}{۲}) + (لام - لم) (لا - \frac{لام + لم}{۲}) = \dots\dots (د)$$

$$\text{اور } (لا - لایم) (لا - \frac{لا + لایم}{۲}) + (لام - لم) (لا - \frac{لام + لم}{۲}) = \dots\dots (ع)$$

اب اگر مساواتوں (ج)، (د)، (ع) کو اکٹھا جمع کیا جائے تو ان کا مجموعہ متطابقاً صفر کے مساوی ہوتا ہے، اس لئے معلوم ہوا کہ جو خطوط ان مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے سے ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

۲۴۔ ایسی شرط دریافت کر دو کہ تین نقطے ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہوں۔
فرض کرو کہ نقاط کے محدد $(لا، ما)$ ، $(لام، لم)$ ، $(لام، مام)$ ہیں اور جس خط پر یہ تینوں واقع ہوتے ہیں اس کی مساوات $لا + ب ما + ج م = ۰$ ہے۔
چونکہ ہر ایک نقطہ کے محدد اس مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لئے

لا + اب + ج = (ا)

لا + اب + ج = (ب)

لا + اب + ج = (ج)

(ا) اور (ب) سے

ج

ب

ا

لا + اب + ج کی قیمتوں کو (۳) میں مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

لا + اب + ج = (د)

اور تین نقطوں کے ہم خط ہونے کی یہی شرط ہے۔
اوپر کے عمل کے بغیر بھی ہم مساوات (د) کو معلوم کر سکتے
تھے کیونکہ یہ صرف اس امر کو تعبیر کرتی ہے کہ اس مثلث کا رقبہ جس کے راس
تین نقاط مفروضہ ہیں صفر کے مساوی ہے۔

جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے وہ فوراً پہچان لے گا کہ مساوات
(د) مساوات

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

کی محض تفصیل ہے جو مساواتوں (ا)، (ب)، (ج) میں سے حروف
لا، اب، ج کو ساٹھ کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ لا، اب، ج ایک مثلث ہے، زوایا لا اور ب کے داخلی منصف
المناع سبح ج اور ج کو نقاط د اور ع پر قطع کرتے ہیں اور زاویہ ج کا بیرونی
منصف اب سے ف پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ د، ع، ف ایک ہی خط پر
واقع ہیں۔

فرض کرو کہ لا، اب، ج کے محذور بالترتیب (لا، ما)، (لا، م)، (لا، م)
میں اور اضلاع ب ج، ج، لا، اب کے طول بالترتیب لا، ب، ج ہیں،
تب اقلیدس ص ۶ ش ۳ اور (ا) کو استعمال کرتے سے نقاط

$$\begin{aligned} & \text{د، ع، ف کے محدود بالترتیب معلوم ہوں گے (دفعہ ۳)} \\ & \left(\frac{\text{ب لاد} + \text{ج لاد}}{\text{ب} + \text{ج}} , \frac{\text{ب مل} + \text{ج مل}}{\text{ب} + \text{ج}} \right) \left(\frac{\text{ج لاد} + \text{لاد}}{\text{ج} + \text{لاد}} , \frac{\text{ج مل} + \text{مل}}{\text{ج} + \text{مل}} \right) \\ & \left(\frac{\text{لاد} - \text{ب لاد}}{\text{لاد} - \text{ب}} , \frac{\text{مل} - \text{ب مل}}{\text{مل} - \text{ب}} \right) \end{aligned}$$

ان محدودوں کو مساوات (د) میں مندرج کرنے سے نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوگا لیکن ہوشیار طالب علم محدودوں کو دیکھنے سے فوراً سمجھ جائے گا کہ ف خط د ع کو خارجاً نسبت

ج + ل : ب + ج سے تقسیم کرتا ہے (دفعہ ۳)
مثال ۲ زیادہ عام صورت میں اگر ایک مثلث کے اضلاع ب ج ل، ب ج ل، ب ج ل یا
ان اضلاع محدودہ پر ایسے نقاط ل، ب، ج لیے جائیں کہ

$$\frac{\text{ب ل}}{\text{ج ل}} \times \frac{\text{ج ب}}{\text{ب ل}} \times \frac{\text{ل ج}}{\text{ج ب}} = 1$$

تو نقاط ل، ب، ج ایک ہی خط پر واقع ہوں گے۔

فرض کرو کہ ل اضلاع ب ج کو نسبت م : ن سے تقسیم کرتا ہے اور ب اضلاع ج ل کو نسبت ن : ل سے تقسیم کرتا ہے۔

تب بموجب شرائط سوال ج اضلاع ل ب کو لازماً نسبت ل : م سے تقسیم کرے گا۔ مثال سابق کا ثبوت اس صورت پر عین صادق آئے ہے، فرق صرف اس قدر ہے کہ ل، ب، ج کی بجائے ل، م، ن رکھ دینے چاہئیں۔

مشقیں

۶۸۔ ایک خط مستقیم خطوط ۳ لا + ۲ م - ۵ = ۰ اور ۳ لا + ۲ م + ۴ = ۰ کے نقطہ تقاطع کو نقطہ (۱۲) سے ملاتا ہے، اس کی مساوات دریافت کرو۔

۶۹۔ ایک مثلث کے اضلاع ۳ لا + ۲ م = ۲، لا + ۲ م = ۵ اور لا + ۲ م + ۴ = ۰ ہیں، مثلث کے انہوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے گئے ہیں، ان کی مساواتیں دریافت کرو نیز ان عمودوں کا نقطہ تقاطع دریافت کرو۔

۶۔ اوپر کی مثال کے مثلث میں ان خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو مثلث کے رأسوں میں سے مقابل کے اضلاع کے متوازی کھینچے جائیں۔
 ۷۔ ایسے خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو $۳ لا + ۴ ما - ۱۱ = ۰$ اور $۷ ما - لا - ۱۳ = ۰$ کے نقطہ تقاطع میں سے گزریں اور انہی خطوط پر بالترتیب عمود ہوں۔

۸۔ ثابت کرو کہ ذیل کے مستقیم خط ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں

$$(ب + ج) (لا + ۱ ما = ۲)$$

$$(ج + ۱) (لا + ب ما = ۲)$$

$$(۱ + ب) (لا + ج ما = ۲)$$

۹۔ اگر مثلث کے رأسوں میں سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ ایک ہی نقطہ میں ملتے ہیں۔

۱۰۔ دو خطوط کی مساواتیں بلحاظ قائم محوروں کے

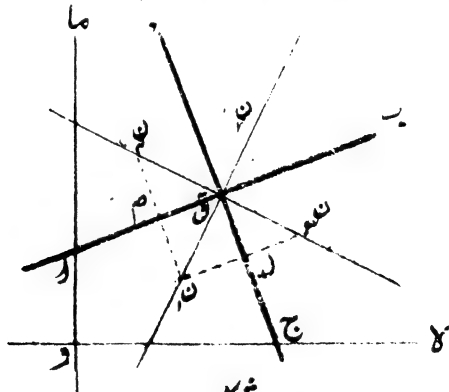
$$لاجم عم + ماجب عم - ع = ۰ \text{ اور } لاجم عم + ماجب عم - ع = ۰$$

میں ان کے درمیانی زاویوں کے منصفیوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

اگر نقطہ (۱) (۲) کسی ایک منحنی پر ہو تو چار عمود نقطہ (لا) (ما) سے

ان خطوط پر کھینچے جائیں گے وہ برابر ہوں گے اس لئے (موجب دفعہ ۱۶)

$$لاجم عم + ماجب عم - ع = ۰ \text{ (لاجم عم + ماجب عم - ع = ۰)}$$



شکل ۱۹

پس کسی ایک منصف پر کاہر ایک نقطہ ذیل کی ایک نہ ایک مساوات کو پورا کرتا ہے۔
 (لاجم عم + ماجب عم - ع =) (لاجم عم + ماجب عم - ع) ... (۳۴)
 پس یہ مساواتیں خطوط کے دو منصفوں کی ہیں، ایک منصف مثبت علامت لینے
 سے اور دوسرا منفی علامت لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

اب ہم اس دوہری یا مشتبہ علامت کے متعلق تحقیق کرتے ہیں۔

اگر اب اور ج د مفروضہ خطوط ہوں اور ن اور ن م ان کے منصف ہوں تو ایک منصف (ن) (ن) (دیکھو شکل) ایسے خانہ ا ق ج
 میں سے گذریگا جس میں مبدأ واقع ہے، اس منصف کے حصہ ق ن پر کاہر ایک
 نقطہ خطوط مفروضہ سے اسی طرف واقع ہے جس طرف کہ مبدأ ہے۔

اگر مبدأ سے ان خطوں پر عمود نکالے جائیں تو ہم جانتے ہیں کہ ان کے
 طول ع اور ع ہیں اور یہ طول مبدأ کے محدودوں کو ذیل کے جملوں میں مندرج
 کرنے سے حاصل ہوتے ہیں

- (لاجم عم + ماجب عم - ع) -

اور - (لاجم عم + ماجب عم - ع)

اس سے معلوم ہوا کہ اگر ق ن پر کسی نقطہ (لا، ما) سے ان خطوں
 پر عمود نکالے جائیں تو ان کے طول بھی اوپر کے جملات میں لا، ما کی جگہ لا، ما
 مندرج کرنے سے حاصل ہونگے

اس لئے ق ن کی مساوات یہ ہوئی

- (لاجم عم + ماجب عم - ع) = - (لاجم عم + ماجب عم - ع)

یا لاجم عم + ماجب عم - ع = لاجم عم + ماجب عم - ع
 پس اگر مساوات (۳۴) میں بائیں طرف کے رکن کے باقی مثبت علامت لی جائے
 تو یہ مساوات منصف ن ا ق ن کو تعبیر کرے گی جو اس خانہ میں سے گذرتا ہے
 جس میں مبدأ واقع ہے اور اسی طرح کے استدلال سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ منفی
 علامت لینے سے ہم کو جو مساوات حاصل ہوگی وہ منصف ن م ق ن کو تعبیر
 کرے گی (دیکھو شکل)۔

مائل محور۔ اسی طرح سے خطوط مستقیم

$$\begin{aligned} & \text{لاجم عم} + \text{ماجم (سم - عم)} - \text{ع} = ۰ \\ & \text{لاجم عم} + \text{ماجم (سم - عم)} - \text{ع} = ۰ \end{aligned}$$

اور

کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کی مساواتیں

$$\text{لاجم عم} + \text{ماجم (سم - عم)} - \text{ع} = \pm \{ \text{لاجم عم} + \text{ماجم (سم - عم)} - \text{ع} \} \dots (۳۵)$$

ہیں اور اس میں متبادل علامات کے وہی معنی ہیں جو قائم محوروں کی صورت میں بیان ہوئے۔

$$۲۶ - \text{خطوط } \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = ۰ \text{ اور } \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = ۰$$

کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

دفعہ ۱۵ کی مدد سے ان مساواتوں کو عمودی صورت میں تبدیل کرو اور دفعہ سابق کے استدلال سے کام لو، اس طرح سے منصفوں کی مساواتیں قائم محوروں کی صورت میں یہ ہوگی

$$\frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}} = \pm \frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}} \dots (۳۶)$$

اور مائل محوروں کی صورت میں یہ ہوگی

$$\frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}} = \pm \frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}$$

ہر ایک صورت میں جس علامت کو لینے سے دونوں طرف کی مستقل قیاسی تنقیح علامات ہو جائیں (یعنی دونوں کی علامت ایک ہی ہو جائے) اس علامت سے وہ منصف حاصل ہوگا جو مبدأ سے خانہ میں سے گذرتا ہے۔

طالب علم غور سے دیکھے کہ دفعہ ۱۵ کے جملوں سے مساوات (۳۷) کو تشکیل کرتے وقت دونوں طرف سے جزو ضربی جب سمہ خارج ہو گیا ہے۔

مثال (۱) قائم محوروں کی صورت میں خطوط ۳ لا + ۴ ب = ۰ اور ۸ لا + ۶ ب = ۱۳ کے درمیانی زاویوں کے منصف دریافت کرو۔

دونوں منصفوں کی مساواتیں ذیل کے ضابطہ میں شامل ہیں

$$\frac{۱۳ - ۶ + ۸}{۲۶ + ۲۸} \pm = \frac{۴ - ۴ + ۳}{۲۴ + ۲۳}$$

یعنی $(۱۳ - ۶ + ۸) \pm = (۴ - ۴ + ۳) ۲$

اس لئے مطلوبہ مساواتیں یہ ہیں

۲ - لا - ۲ + ۴ = ۱ اور ۱۴ + لا + ۱۴ - ۲ = ۲۴

مثال (۲) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے زاویوں کے داخلی منصف ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔ (ملاحظہ ہو فیہ مثال نمبر ۱)

محدودوں کا مبدأ مثلث کے اندر مقرر کرو اور فرض کرو کہ ب ج ج،
ج ا، ب کی مساواتیں بلحاظ قائم محوروں کے یہ ہیں

لاجم عم + ماجب عم - ع = (۱)

لاجم عم + ماجب عم - ع = (۲)

لاجم عم + ماجب عم - ع = (۳)

زاویہ ا کا داخلی منصف ا س خانہ میں سے گذرتا ہے جس میں مبدأ واقع ہے، ایسے
اسکی مساوات یہ ہے

(لاجم عم + ماجب عم - ع) - (لاجم عم + ماجب عم - ع) = (۴)
ازروئے تشاکل زو یا ب اور ج کے داخلی منصفوں کی مساواتیں یہ ہونگی

(لاجم عم + ماجب عم - ع) - (لاجم عم + ماجب عم - ع) = (۵)

اور (لاجم عم + ماجب عم - ع) - (لاجم عم + ماجب عم - ع) = (۶)

اب چونکہ مساواتوں (۴)، (۵)، (۶) کے دائیں طرف کے رکٹوں کا مجموعہ
مطابقاً صفر ہے اس لئے جو خط ان مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں وہ ایک ہی نقطہ
ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (دفعہ ۲۲)

[مشاہدہ ہو کہ یہ ثبوت اور اقلیدس ص ۶ ش ۴ کا ثبوت اصول میں مطالبہ ہیں]

۲۴۔ مختصر طریق کتابت محدودوں کے ہندسہ میں کثرت اوقات اعمال جبریہ

مختصر طریق کتابت کی مدد سے سادہ صورت میں پیش کئے جا سکتے ہیں، مثلاً اگر اوپر کی مثال میں رموز عہ، بہ، جہ بالترتیب جملات لاجم عہ + ماجب عہ + ع لاجم عہ + ماجب عہ - ع اور لاجم عہ + ماجب عہ - ع کو تعبیر کریں تو اس طریق کتابت کے موافق مثلث کے اضلاع کی مساواتیں عہ = بہ = جہ = ہو گئی اور زیادہ اہم، ب، ج کے داخلی منصفوں کی مساواتیں بہ - جہ = جہ - عہ = عہ - بہ = ہو گئی، ظاہر ہے کہ آخری تین مساواتوں کے دائیں طرف کے رکنوں کا مجموعہ متطابقاً صفر ہے پس معلوم ہوا کہ طریق کتابت کا استعمال ثبوت کی نوعیت کو نہیں بدلتا صرف یہ جبر یہ عمل کو مختصر کر دیتا ہے۔

طالب علم کو یاد رکھنا چاہئے کہ منصفوں کی مساواتوں (۴)، (۵)، (۶) کو مختصر صورت میں لکھا جاسکتا ہے جبکہ اضلاع کی مساواتیں عمودی صورت میں بیان کی گئی ہوں، مختصر طریق کتابت استعمال کرتے وقت اسکو اس حسابی دستور کی پوری پیروی کرنی چاہئے کہ عہ، بہ، جہ اختصاراً خط مستقیم کی مساوات کی عمودی صورت کے دائیں رکن کے لئے استعمال کئے جائیں یعنی ان رموز کو صرف لاجم عہ + ماجب عہ + ع جیسے جملات کو تعبیر کرنے کے لئے استعمال کیا جائے۔ اگر خط مستقیم کی مساوات کو عام صورت میں لکھا جائے تو ان کے دائیں طرف کے رکنوں کو، یعنی لا + ب + ج جیسے جملوں کو حروف سی، و، سے تعبیر کیا جائے۔

مشقیں

۴۔ خط مستقیم ۳ (لا - ب + ج) اور ۱۲ (لا + ب - ج) کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

۵۔ خطوط مستقیم کے دو زوج ذیل میں دئے گئے ہیں، ہر ایک زوج کے درمیانی زاویوں کے منصف معلوم کرو اور ان خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو ان کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملاتے ہیں۔

$$(۱) \quad ۲ - لا - ب \quad \text{اور} \quad ۳ - لا - ب$$

$$(۲) \quad لا + ب - ۳ \quad \text{اور} \quad لا - ب + ۵ =$$

۷۶۔ ایک مثلث کے اضلاع بالترتیب یہ ہیں

$$۳ + لا + ۳ = ۷، ۵ + لا + ۱۲ = ۲۰، اور ۳ + لا + ۴ = ۸ = ۰$$

اس کے داخلی منصفوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

۷۷۔ ایک نقطہ ن سے مثلث کے اضلاع پر عمود نکالے گئے ہیں اور ان کے طول ع، ص، د ہیں اگر یہ عمود ایک تعلق $ا + ع + ب + م + ج + د = ۰$ کے ذریعہ مربوط ہوں جہاں $ا، ب، ج$ مستقل مقادیر ہیں تو ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

[طریق مطلوب کی مساوات مندرجہ بالا طریق کتابت کے موافق

$$ا + ع + ب + م + ج + د = ۰ \text{ ہے اور یہ مساوات درجہ اول ہے}]$$

۷۸۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے دوزاویوں کے خارجی منصف اور تیسرے زاویہ کا داخلی منصف تینوں ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

[مثلث کے اندر کسی نقطہ کو مبدأ قرار دو اور فرض کرو کہ مثلث کے اضلاع

کی مختصر مساواتیں عمودی صورت میں $ع = ۰، ب = ۰، ج = ۰$ ہیں، تو یا تو

اور ب کے خارجی منصفوں کی مساواتیں $ب + ج = ۰، ج + ع = ۰، ع + ب = ۰$ ہوں گی

اور ج کے داخلی منصف کی مساوات $ع = ۰$ بہ ہوگی۔ دفعہ ۳ کی مدد سے مسئلہ

ثابت ہوگا اگر مستقل مقادیر $ا، ب، ج$ بالترتیب $ا، ا، ا$ کے برابر لیا جائیں]

۷۹۔ $ا، ب، ج$ کی متجانس مساوات درجہ دوم دو ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے

جو مبدأ میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ مساوات معلومہ

$$ا + لا + ۲ = ۰ \text{ لا + ما + ب + ما} = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے اگر اس کو مامی رقوم میں مساوات درجہ دوم خیال کر کے حل کیا جائے تو

$$ما = ۰ \text{ یا } ۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۳ \text{ یا } ۴ \text{ یا } ۵ \text{ یا } ۶ \text{ یا } ۷ \text{ یا } ۸ \text{ یا } ۹ \text{ یا } ۱۰ \text{ یا } ۱۱ \text{ یا } ۱۲ \text{ یا } ۱۳ \text{ یا } ۱۴ \text{ یا } ۱۵ \text{ یا } ۱۶ \text{ یا } ۱۷ \text{ یا } ۱۸ \text{ یا } ۱۹ \text{ یا } ۲۰ \text{ یا } ۲۱ \text{ یا } ۲۲ \text{ یا } ۲۳ \text{ یا } ۲۴ \text{ یا } ۲۵ \text{ یا } ۲۶ \text{ یا } ۲۷ \text{ یا } ۲۸ \text{ یا } ۲۹ \text{ یا } ۳۰ \text{ یا } ۳۱ \text{ یا } ۳۲ \text{ یا } ۳۳ \text{ یا } ۳۴ \text{ یا } ۳۵ \text{ یا } ۳۶ \text{ یا } ۳۷ \text{ یا } ۳۸ \text{ یا } ۳۹ \text{ یا } ۴۰ \text{ یا } ۴۱ \text{ یا } ۴۲ \text{ یا } ۴۳ \text{ یا } ۴۴ \text{ یا } ۴۵ \text{ یا } ۴۶ \text{ یا } ۴۷ \text{ یا } ۴۸ \text{ یا } ۴۹ \text{ یا } ۵۰ \text{ یا } ۵۱ \text{ یا } ۵۲ \text{ یا } ۵۳ \text{ یا } ۵۴ \text{ یا } ۵۵ \text{ یا } ۵۶ \text{ یا } ۵۷ \text{ یا } ۵۸ \text{ یا } ۵۹ \text{ یا } ۶۰ \text{ یا } ۶۱ \text{ یا } ۶۲ \text{ یا } ۶۳ \text{ یا } ۶۴ \text{ یا } ۶۵ \text{ یا } ۶۶ \text{ یا } ۶۷ \text{ یا } ۶۸ \text{ یا } ۶۹ \text{ یا } ۷۰ \text{ یا } ۷۱ \text{ یا } ۷۲ \text{ یا } ۷۳ \text{ یا } ۷۴ \text{ یا } ۷۵ \text{ یا } ۷۶ \text{ یا } ۷۷ \text{ یا } ۷۸ \text{ یا } ۷۹ \text{ یا } ۸۰ \text{ یا } ۸۱ \text{ یا } ۸۲ \text{ یا } ۸۳ \text{ یا } ۸۴ \text{ یا } ۸۵ \text{ یا } ۸۶ \text{ یا } ۸۷ \text{ یا } ۸۸ \text{ یا } ۸۹ \text{ یا } ۹۰ \text{ یا } ۹۱ \text{ یا } ۹۲ \text{ یا } ۹۳ \text{ یا } ۹۴ \text{ یا } ۹۵ \text{ یا } ۹۶ \text{ یا } ۹۷ \text{ یا } ۹۸ \text{ یا } ۹۹ \text{ یا } ۱۰۰$$

جو ایسے خطوط مستقیم کی مساواتیں ہیں جو مبدأ میں سے گزرتے ہیں، پس مساوات

(۱) کا طریق یہ دو مستقیم خط ہیں کیونکہ اگر ان میں سے کسی ایک پر کوئی نقطہ لیا جائے تو

اس کے محدد (۱) کو پورا کریں گے۔

یہ خط حقیقی ہوں گے اگر \angle اب، ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اگر $\angle = ۲$ اب، خیالی ہوں گے اگر $\angle > ۲$ اب

یہ نتائج ہر صورت میں درست ہیں خواہ محور قائم ہوں یا مائل۔

یاد رہے کہ \angle رقم لا ماکا سر نہیں ہے بلکہ ۲ لا ماکا سر ہے۔

۲۹۔ جن دو خطوط مستقیم کو مساوات $\angle + ۲$ لا ماکا ب $\angle = ۲$ ۔

تعبیر کرتی ہے ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مفروضہ خطوط مستقیم کی مساواتیں $\angle = ۲$ اور $\angle = ۲$ ۔

ہیں۔ اب اگر جملہ $\angle + ۲$ لا ماکا ب \angle کو ب پر اس غرض سے تقسیم کر دیا جائے

کہ \angle کا سر ایک ہو جائے تو جملہ $\angle + ۲$ لا ماکا ب \angle حاصل ہو گا اور یہ لازماً \angle اجزا بنی

ما۔ \angle اور ما۔ \angle کے حاصل ضرب کے مساوی ہو گا۔

قائم محور۔ اگر خطوں کا درمیانی زاویہ \angle نہ ہو تو

$$\text{مس فہ} = \frac{\angle - ۲}{\angle + ۲} \quad (\text{دفعہ ۱۹})$$

$$\text{اب } (\angle - ۲) = (\angle + ۲) - ۲ = ۲ - ۲ = ۰ \quad \frac{۰}{\angle} = ۰$$

$$\text{مس فہ} = \pm \frac{۲ - ۲}{\angle + ۲} \quad (\text{۳۸})$$

مشتبہ یاد دہری علامت اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ خطوں کا درمیانی زاویہ \angle نہ ہو سکتا یا فہ کا مکمل۔

ان خطوں کے ایک دوسرے پر منطبق ہونے کی یہ شرط ہے کہ

$$\angle = ۲ \quad (\text{۳۹})$$

یعنی جملہ $\angle + ۲$ لا ماکا ب \angle مربع کامل ہو۔

اور ایک دوسرے پر عمود ہونے کی شرط یہ ہے کہ

$$ا + ب = ۰ \dots\dots\dots (۴۰)$$

مائل محور۔ اس صورت میں

$$\text{مس فہ} = \frac{(۲ - م) (ج ب سہ)}{۱ + (۲ + م) (ج سہ + م م)}$$

$$\text{جس سے مس فہ} = \pm \frac{۲ (۲ - ا ب) (ج ب سہ)}{۱ + ب - ۲ (ج سہ)} \dots\dots\dots (۴۱)$$

ایک دوسرے پر منطبق ہونے کی شرط پہلے کی طرح ۲ - ا ب = ۰ ہے

عمودیت کی شرط ہے ۱ + ب - ۲ (ج سہ) = ۰ (۴۲)
الغالب اور عمودیت کی یہ شرطیں یاد رکھنی چاہئیں۔

۴۳۔ خطوط مستقیم $۱ + ۲$ ھ لا $۱ + ۲$ ب ما = ۰ کے درمیان جو زاوے بنتے ہیں ان کے منصفوں کی مساواتیں معلوم کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔
فرض کرو کہ خطوط ما - م لا = ۰ اور ما - م لا = ۰ ہیں۔

اگر ایک منصف کے کسی نقطہ سے ان خطوط پر عمود نکالے جائیں تو وہ مساوی ہونگے اس لئے

$$\frac{۱ + م - ۲ لا}{۱ + م + ۲ لا} = \frac{۱ + م - ۲ لا}{۱ + م + ۲ لا}$$

جہاں اوپر کی علامت ایک منصف سے متعلق ہے اور نیچلی دوسرے سے

$$\frac{(۱ + م - ۲ لا)^۲}{۱ + م + ۲ لا} = \frac{(۱ + م - ۲ لا)^۲}{۱ + م + ۲ لا}$$

میں دونوں منصف شامل ہیں۔ یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$(۱ + م) (۱ + م - ۲ لا) - (۱ + م) (۱ + م - ۲ لا) = ۰$$

یا $\{ \text{لا}^2 \text{ م}^2 (1 + \text{م}^2) - \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) \}$
 $- 2 \text{ لا م}^2 (1 + \text{م}^2) - \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) \{ \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) - 1 - \text{م}^2 \} = 0$
 $\{ \text{لا}^2 (1 + \text{م}^2) - \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) \} - 2 \text{ لا م}^2 (1 + \text{م}^2) - \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) \{ \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) - 1 - \text{م}^2 \} = 0$
 $\{ \text{لا}^2 (1 + \text{م}^2) - \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) \} - 2 \text{ لا م}^2 (1 + \text{م}^2) - \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) \{ \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) - 1 - \text{م}^2 \} = 0$
 لیکن $\text{م}^2 + \text{م}^2 = -\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}}$ ، $\text{م}^2 = \frac{\text{ب}}{\text{لا}}$
 اس لئے مساوات ہو جاتی ہے

$$(\text{لا}^2 - \text{م}^2) \left(-\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}} \right) = 2 \text{ لا م}^2 (1 + \text{م}^2) - \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) \left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}} - 1 \right)$$

$$\text{یا } (\text{لا}^2 - \text{م}^2) \text{ لا م}^2 = \text{لا م}^2 (1 + \text{م}^2) - \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) \left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}} - 1 \right)$$

یعنی $\frac{\text{لا}^2 - \text{م}^2}{\text{لا}} = \frac{\text{لا}^2 - \text{م}^2}{\text{ب}}$ (۳۳)

یہ مساوات نہایت ضروری ہے اور اس شکل میں یہ آسانی سے یاد رہ سکتی ہے
 مثال - خطوں کے زوج ۳ لا + لا - م = کے درمیان جو زاویے
 بنتے ہیں ان کے منصفوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

$$\text{ضابطہ } \frac{\text{لا}^2 - \text{م}^2}{\text{ب}} = \frac{\text{لا م}}{\text{ب}} \text{ استعمال کرنے سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے}$$

$$\frac{\text{لا}^2 - \text{م}^2}{\text{ب}} = \frac{\text{لا م}}{\text{ب}}$$

$$\text{یا } \text{لا}^2 - \text{م}^2 = \text{لا م} \cdot \text{ب}$$

مشقیں

4۔ جن خطوط مستقیم کی مشترک مساوات لا - ۵ لا + ۶ م =
 ہے ان کی مساواتیں الگ الگ دریافت کرو۔

۸۰۔ بتاؤ کہ ذیل کی مساواتوں کے کیا طریق ہیں۔

(ا) $۱ = ۱$ (ب) $۲ = ۲$ (ج) $۱ + ۲ = ۳$

(د) $۱ + ۲ = ۳$ (ع) $۱ + ۲ + ۳ = ۶$ (ف) $۱ + ۲ + ۳ = ۶$

(گ) $(۱-۲) + (۲-۳) = ۱-۳$ (س) $(۱-۲) + (۲-۳) + (۳-۴) = ۱-۴$

۸۱۔ جن خطوط کی مشترک مساوات ۲ لا-۳ لا+۲ لا+۱ = ہے اُن کا درمیانی زاویہ دریافت کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔

۸۲۔ جن خطوط مستقیم کی مساوات لا-۲ لا-۱ = ہے انہیں معلوم کرو اور اُن کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

۸۳۔ جن خطوط کی مساوات ۳ لا-۲ لا-۱ = ہے ان کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

۸۴۔ ثابت کرو کہ خطوط کا جو زوج مساوات لا+۲ لا+۱ = ہے ان کا قطعہ لا+۱ = ہے۔
تعبیر ہوتا ہے وہ ہمیشہ حقیقی ہے اور زوج کا درمیانی زاویہ عمود ہے۔

۸۵۔ خطوط لا+۲ لا+۱ = کے درمیانی زاویوں کے جو منصف ہیں اُن کی مساوات سے ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے سے زاویہ قائم بناتے ہیں۔

۸۶۔ اگر لا+۲ لا+۱ = کے دو ثابت کرو کہ خطوط لا+۲ لا+۱ = کے درمیانی زاویوں کے منصف وہی ہیں جو محور لا+۱ کے درمیانی زاویوں کے ہیں اور بنائیں ایک منصف لا سے وہی زاویہ بناتا ہے جو دوسرا دھما سے۔

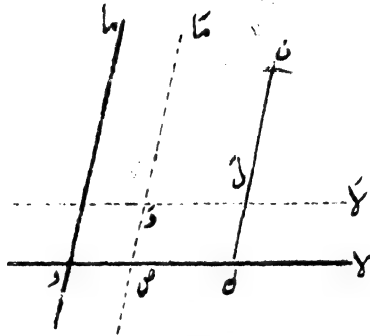
۳۱۔ محوروں کا بدلنا۔ محوروں کی سمتوں کے بدلنے کے بغیر محوروں کے مبدأ کے مقام کا بدلنا۔

فرض کرو کہ لا، دما پرانے محور ہیں اور لا، ومانے محور ہیں جو لا، دما کے بالترتیب متوازی ہیں۔ نئے مبدأ و کا فصلہ اور معین و ص و

بلحاظ پرانے محوروں کے کھینچو اور فرض کرو کہ و کے محدودان محوروں کے لحاظ سے

(س) ک ہیں یعنی د ص = س ص و = ک
فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ ہے بلحاظ پرانے محوروں کے اس کا فصلہ ول

ہے اور معین ل ن



شکل ۲۰

نیز بلحاظ نئے محوروں کے اس کا فصلہ دلی ہے اور معین کی ن۔
فرض کرو اس نقطہ ن کے محدود بلحاظ پرانے اور نئے محوروں کے بالترتیب
(لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔

ہم (لا، ما) کی ایک مساوات کو (لا، ما) کی مساوات متناظرہ میں تحویل کرنا چاہتے
ہیں اس لئے ہمیں پرانے محدود لا، ما کو نئے محدود لا، ما کی قوم میں بیان
کرنا چاہیئے تاکہ محض قیمتیں مندرج کرنے سے ایک مساوات دوسری سے حاصل ہو سکے۔
صریحاً $ول = س + ول، ن = ک + ن$

$$یا \quad لا = لا + س، \quad ما = ما + ک \dots\dots (۴۴)$$

اس لئے ہمیں صرف لا کی بجائے لا + س اور ما کی بجائے ما + ک اس
مساوات میں لکھنا ہے جسے ہم بدلنا چاہتے ہیں، اس طرح ہمیں لا، ما میں ایک
مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اب چونکہ (لا، ما) نئے دائرہ محدود ہیں اس لئے اس
مساوات میں لا، ما کی زبروں کو حذف کرنے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے
پس جس مساوات کو ہم بدلنا چاہتے ہیں اس کی تحویل صرف لا کی بجائے (لا + س) اور
ما کی بجائے (ما + ک) لکھنے سے ذرا ہو سکتی ہے۔

ثبوت بالا ہر دو قائم اور مائل محوروں کی صورت میں درست ہے۔

۳۲۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ درجہ دوم کی عام سے عام مساوات دخط مستقیم
کو تعبیر کرے۔

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ہے

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ہ} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ ب} + ۵ \text{ گ} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ ف} + ۸ \text{ ج} = ۰ \dots\dots\dots (۴۵)$$

طالب علم اس مساوات پر غور کرے، دراصل یہ مساوات متشاکل ہے کیونکہ اس کا دایاں رکن جملہ متشاکلہ $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ہ} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ ب} + ۵ \text{ گ} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ ف} + ۸ \text{ ج}$ کی گئی لا $۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸$ کی ایک صورت ہے جبکہ ۱ کو ایک کے مساوی فرض کر لیا جائے۔ اس بنا پر ۸ متغیر ۸ کے ساتھ لکھا گیا ہے اور ۱ کے اور ۲ کے اور ۳ کے اور ۴ کے اور ۵ کے اور ۶ کے اور ۷ کے اور ۸ کے سر نہیں ہے بلکہ ۲ لاکا سر ہے، اسی طرح ۷ اور ۸ بھی بالترتیب ۲ اور ۳ لاکا کے سر ہیں۔

اگر مساوات (۴۵) دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو فرض کرو کہ یہ خط نقطہ $(۱، ۱)$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں

اس مساوات کو ان محوروں کے لحاظ سے جو $(۱، ۱)$ میں سے گزرتے ہیں اور پرانے محوروں کے متوازی ہیں بدل دو۔ اس کی صورت دفعہ اس کی رو سے یہ ہو جائے گی

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ہ} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ ب} + ۵ \text{ گ} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ ف} + ۸ \text{ ج} = ۰ \dots\dots\dots (۴۶)$$

بلحاظ نئے محوروں کے مساوات (۴۶) دو ایسے خطوط مستقیم کی مساوات ہے جو مبدأ میں سے گزرتے ہیں اس لئے (۴۶) کا دایاں رکن ۱ لاکا مستقیم جملہ درجہ دوم ہونا چاہیئے۔ اس لئے مساوات (۴۶) میں لاکا سر، لاکا سر اور مستقل رقم لازماً معدوم ہونے چاہئیں

$$\text{اس لئے } ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ہ} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ ب} + ۵ \text{ گ} = ۰ \dots\dots\dots (۴۷)$$

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ہ} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ ب} + ۵ \text{ گ} = ۰ \dots\dots\dots (۴۸)$$

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ہ} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ ب} + ۵ \text{ گ} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ ف} + ۸ \text{ ج} = ۰ \dots\dots\dots (۴۹)$$

مساوات (۴۹) اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ہ} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ ب} + ۵ \text{ گ} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ ف} + ۸ \text{ ج} = ۰$$

$$\text{گ} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ ف} + ۸ \text{ ج} = ۰ \dots\dots\dots (۵۰)$$

(۵۰) کو مساواتوں (۴۷)، (۴۸)، (۴۹) سے ساقط کرنے سے ہمیں حاصل ہو گا کہ

۱ ب ج + ۲ ف گ ھ - ۱ ف ۲ - ب گ ۲ - ج ھ ۲ = (۴۶)
جو شرط مطلوب ہے -

چونکہ مساوات (۴۶) '۱' با کو ان مساواتوں
۱ + ۲ ھ + ۱ ب + ۱ گ = ۱ ھ + ۱ ب + ۱ ف = ۱ گ + ۱ ف + ۱ ج =
سے ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے اسلئے یہ مساوات

$$= \begin{Bmatrix} ۱ & ھ & گ \\ ھ & ب & ف \\ گ & ف & ج \end{Bmatrix}$$

کی تفصیل ہے -

بجائے نمبروں کے ان دو خطوط مستقیم کی مساوات ۱ لا ۲ ۲ ھ لا ۱
+ ب ما = ۱ ۲ ۲ ھ لا ۱ + ۱ ب ما = ۱ ۲ ۲ ھ لا ۱ + ۱ ب ما
کے لحاظ سے ۱ لا ۲ ۲ ھ لا ۱ + ۱ ب ما = ۱ ۲ ۲ ھ لا ۱ + ۱ ب ما
اور متوازی ہونے کی شرائط دفعہ ۲۹ میں حاصل کی گئی ہیں اور یہ شرائط
صرف دوسرے درجہ کی ارقام پر منحصر ہیں -

اس دفعہ کے نتیجے کی تفسیق اس طرح بھی ہو سکتی ہے -

اگر مساوات (۴۵) دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہو تو اس کا دایاں رکن لازماً لا ۱
کے دو خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہونا چاہیے اگر اس لئے مساوات سے
ما کی قیمتیں لا کی رقوم میں معلوم کی جائیں تو ان میں سے ہر ایک لا کا ایک منطق جملہ
ہوگی - اب مساوات کو ما کی نزدیکی میں ترتیب دینے سے

$$ب ما + ۲ ھ (لا + ف) + ۱ لا + ۲ گ (لا + ج) =$$

$$- (لا + ف) + م (لا + ف) - ب (لا + ۲ گ (لا + ج))$$

ب

اب ضروری ہے کہ علامت جذر کے اندر جو جو ہے وہ مربع کامل ہو
یعنی (ھ - ۱ ب) + لا + ۲ (ھ ف - ب گ) + لا + (ب ج) مربع کامل ہو -
اس لئے (ھ - ۱ ب) (ف - ۱ ب ج) = (ھ ف - ب گ) ۲

جس سے تجویز کے بعد
اب ج + ۲ ف گ ہ - ا ف - ب گ - ج ہ = -

مشقیں

۸۷ - بتاؤ کہ ذیل کی مساواتیں کیا ہو جائیں گی اگر مبدأ کو نقطہ (۱) پر منتقل کر دیا جائے

$$(۱) \text{ لا} + \text{لا} - \text{لا} - ۲ = ۲ + \text{ما} - ۰ \text{ (ب) لا} - \text{لا} - ۲ - \text{لا} + \text{ما} = ۰$$

$$(ج) \text{ لا} - \text{لا} - \text{لا} - ۱ + \text{ما} = ۰ \text{ (د) لا} - \text{لا} - ۲ - \text{لا} + \text{ما} = ۰$$

۸۸ - نقطہ (۱) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات

$$\frac{\text{لا}}{۱} + \frac{\text{ما}}{۱} - ۱ = ۰ \text{ کو تبدیل کرو۔}$$

۸۹ - نقطہ (ع جم عہ، ع جب عہ) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات لا جم عہ + ما جب عہ = ع کو تبدیل کرو۔

۹۰ - مساوات لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = کو نقطہ (گ ف) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے تبدیل کرو۔

۹۱ - اگر مساوات لا + ما + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = - خطوط مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ ان کا نقطہ تقاطع

$$\left(\frac{\text{ہ ف} - \text{ب گ}}{\text{ا ب} - \text{ہ}} , \frac{\text{ہ گ} - \text{ا ف}}{\text{ا ب} - \text{ہ}} \right) \text{ ہے۔}$$

[مساواتوں (ب) اور (ج) کو لا، ما کے لئے حل کرو]

۹۲ - اگر اوپر کی مساوات خطوط مستقیم کے جوڑے کو تعبیر نہ کرے تو بھی حسب دفعہ ۳۲ اسے تبدیل کرو۔

[یہاں بھی اگر نئے مبدأ کے محدود ایسے منتخب کئے جائیں کہ وہ مساواتوں (ب) اور (ج) کو پورا کریں تو بھی تبدیل شدہ مساوات میں لا اور ما کے سر صفر ہونگے لیکن مستقل رتیم معدوم ہونے کی بجائے گ لا + ف ما + ج ہوگی جہاں

$$\frac{\text{ہ ف} - \text{ب گ}}{\text{ا ب} - \text{ہ}} = \text{ا اور } \frac{\text{ہ گ} - \text{ا ف}}{\text{ا ب} - \text{ہ}}$$

اور تبدیل شدہ مساوات ہوگی

$$[\text{لا} + ۲ \text{ھ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + ۱ \text{ب} + \text{ج} + ۲ \text{ن} + \text{گ} - ۱ \text{ن} - \text{ب} + \text{گ} - ۱ \text{ج} - ۲ \text{ھ}]$$

اس نتیجہ کو آئندہ باب ششم کی تہید کے طور پر خیال کر دو جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے وہ پہچان لے گا کہ مثال ۹۲ میں نئے مبداء کے

$$\text{محد} \quad \frac{\text{گ}}{\text{ج}} - \frac{\text{ن}}{\text{ج}} \text{ ہیں}$$

$$\text{اور تبدیل شدہ مساوات } ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ھ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + ۱ \text{ب} + \text{ج} - ۲ \text{ھ} = ۰ \text{ ہے}$$

$$\text{جہاں } = \left| \begin{array}{c} ۱ \text{ھ} + \text{گ} \\ ۲ \text{ب} + \text{ن} \\ ۱ \text{گ} + \text{ج} \end{array} \right| \text{ اور بڑے حروف چھوٹے متناظر}$$

حروف کے صغائر کو تعبیر کرتے ہیں۔

۹۳۔ ثابت کرو کہ مساوات ۱ لا۔ ۲ ما۔ ۱ لا + ۲ ما۔ ۲ = خط مستقیم کے ایک ایسے جوڑے کو تعبیر کرتی ہے جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔ انہیں معلوم کرو۔

۹۴۔ مساوات (۱ لا + ۲ ما۔ ۱) - ۲ لا = کا طرئی کھینچو اور جن خطوط مستقیم کو یہ مساوات تعبیر کرتی ہے ان کا نقطہ تقاطع دریافت کرو۔

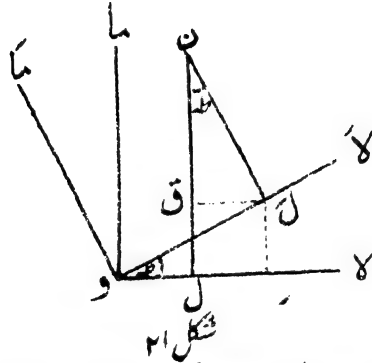
۹۵۔ ثابت کرو کہ مساوات ۱ لا۔ ۵ لا + ۲ ما + ۱ ما + ۱ لا + ۲ ما۔ ۲ = خط مستقیم کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے، ان کا نقطہ تقاطع اور خطوط کی مساوات معلوم کرو۔

۹۶۔ مبداء کو نقطہ (۱، ۲) پر پہنچانے سے ثابت کرو کہ مساوات ۱ لا + ۲ ما۔ ۲ مساوات ۱ لا + ۲ ما۔ ۵ = خط مستقیم کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے پھر مبداء کو اسکے ابتدائی مقام پر منتقل کرنے سے ثابت کرو کہ ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کی

$$\text{مساوات } ۱ لا - ۲ لا - ۱ ما + ۱ لا + ۵ = ۰ \text{ ہے}$$

۹۷۔ بتاؤ کہ مبداء کو کس نقطہ پر منتقل کرنے سے مساوات

لا + لا + ما + ما - لا - لا - ۱۲ = کی تبدیل شدہ صورت میں درجہ اول کی رقیس خارج کر دی جاسکتی ہیں اور اس صورت میں تبدیل شدہ مساوات کیا ہوگی۔
 ۳۳ = مبدأ کو بدلنے کے بغیر قائم محوروں کے ایک نظام سے دوسرے میں بدلتا۔



شکل ۲۱

فرض کرو کہ نئے محاورے 'لا' و 'ما' پرانے محاورے 'لا' و 'ما' کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ کسی نقطہ 'ن' کے محدود پرانے محوروں کے لحاظ سے (لا، ما) ہیں اور نئے محوروں کے لحاظ سے (لا، ما) جیسے دفعہ اس میں بتایا جا چکا ہے ہم یہاں صرف لا، ما کو لا، ما کی رقوم میں بیان کر دینا چاہتے ہیں۔

نقطہ 'ن' سے 'لا' اور 'لا' پر عمود 'نل' اور 'نل' لگاؤ اور 'لا' پر عمود 'لر' اور 'لر' پر عمود 'لق' لکھیو۔

$$\text{تب } ول = ور - ق ل$$

$$نل = لر + ق ن$$

$$\therefore \begin{cases} لا = لا جم طہ - ما جب طہ \\ ما = لا جب طہ + ما جم طہ \end{cases} \dots (۲۷)$$

پس زبروں کو حذف کرنے سے تبدیل شدہ مساوات اصلی مساوات میں لا کی بجائے (لا جم طہ - ما جب طہ) اور ما کی بجائے (لا جب طہ + ما جم طہ) لکھنے سے حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ اگر نیا سید (ھ، ک) ہو اور نئے قائم محور پرانے قائم محوروں کے ساتھ زاویہ طہ بنائیں تو ثابت کرو کہ ایک نقطہ کے پرانے محدود (لا، ما) اسی نقطہ کے نئے محدود (لا، ما) کے ساتھ ذیل کی دو مساواتوں کے ذریعہ مربوط ہوں گے۔

$$\text{لا} = \text{ھ} + \text{لاجم طہ} - \text{ما جب طہ}$$

$$\text{ما} = \text{ک} + \text{لا جب طہ} + \text{ما جم طہ}$$

[پہلے (ھ، ک) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے بدلوا پھر محوروں کو زاویہ طہ میں پھراؤ، یا سیدھا شکل سے حاصل کرو]
مثال ۲۔ اگر پرانے محوروں کو جو قائم ہیں زاویہ ۵۴° میں سے پھرایا جائے تو بتاؤ کہ مساوات لا + ۴ = لا + ما + ۲ = کیا ہو جائے گی۔

$$\text{یہاں } ۵۴ = ۴۵$$

$$\text{لا} = \frac{\text{لا} - \text{ما}}{۲}, \text{ما} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{۲}$$

$$\text{اس لئے } \frac{(\text{لا} - \text{ما})}{۲} + \frac{۴(\text{لا} - \text{ما})}{۲} + \frac{۲(\text{لا} + \text{ما})}{۲} =$$

$$\text{یا } \frac{(\text{لا} - \text{ما})}{۲} + ۲ + \frac{۴(\text{لا} - \text{ما})}{۲} + \frac{۲(\text{لا} + \text{ما})}{۲} =$$

$$\text{یعنی } ۲ - \frac{\text{لا} - \text{ما}}{۲} = ۲ + \frac{۴(\text{لا} - \text{ما})}{۲} + \frac{۲(\text{لا} + \text{ما})}{۲}$$

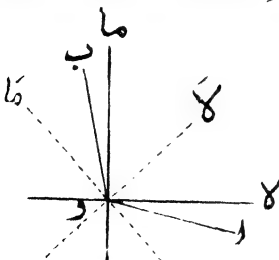
ظاہر ہے کہ جن دو خطوط کو یہ مساواتیں تعبیر کرتی ہیں وہ لا کے ساتھ اسکے دونوں جانب ۶۰° کے زاوے بناتے

ہیں۔ پس اگر وہ لا و ب یہ خط ہوں تو

$$\text{لا و لا} = \text{ب و لا} = ۶۰^\circ$$

$$\text{لا و لا} = ۱۵^\circ, \text{ب و ما} = ۱۵^\circ$$

جس سے خطوط کے مقام پرانے محوروں کے لحاظ سے معلوم ہوتے ہیں۔



شکل ۲۲

طالب علم ماکو لاکو قوم میں معلوم کرنے سے اس کی تصدیق کرے کہ مساوات $4 + 4 = 8$ یا $3 + 3 = 6$ ۔ دوائے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جن میں سے ایک والا کے ساتھ ۱۵ کا زاویہ بناتا ہے اور دوسرا و ما کے ساتھ وہی زاویہ بناتا ہے۔

مشقیں

۹۸۔ اگر نیا مبداء نقطہ (-) پر لیا جائے تو بتاؤ کہ ذیل کی مساواتیں کیا ہو جائیں گی

(۱) لا = (۲) ما = (۳) لا + ما + ا =

$$= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 = \psi_1 - \psi_3$$

$$= 1 + 6 + 9 - 2 \times 6 + 6 \times 3 + 3 \times 3 \quad (7)$$

۹۹۔ اگر محوروں کو بالترتیب زوایا (۱) ۳۰° (۲) ۲۲۵° میں پھرا دیا جائے تو مساویاتوں کی تحول کے لئے متناظر ضابطے کیا ہوں گے۔

۱۰۔ اگر مخدووں کو زیادہ سسٹاپ میں پھرا دیا جائے تو پرانے مخدووں کو نئے مخدووں کی قوم میں اور نئے مخدووں کو پرانے مخدووں کی قوم میں بیان کرو۔

۱۰۱۔ اگر خوروں کو زناویہ میں ۱/۴ میں پھرا دیا جائے تو بتاؤ کہ مساوات ۱۱ (۹ + ۱۶) لا ما - ما = کیا ہو جائے گی۔

۱۰۷۔ محوروں کو زویہ قائم میں بھرنے کے لئے تھوہل ضابطے کیا ہوں گے، انبیائی اصولوں سے انکی تصدیق کرو۔

۳۳۔ ہم نے دیکھا ہے کہ محوِ بدلتے وقت جو تھولیں عمل میں آتی ہیں ان کے لئے ہم بالعموم پرانے محدودوں (لا، ما) کو نئے محدودوں (لا، ما) کی رقوم میں

بیان کرتے ہیں اور اسی میں سہولت ہے، لیکن ایک صورت ایسی ہے جس میں (لا، ما) کو فقط دیکھنے سے ہی (لا، ما) کی رقوم میں بیان کرنا زیادہ مناسب ہے۔

نقص کرو کہ ہمیں ایک مساوات قائم محوروں کے لحاظ سے صورت ذیل میں دیکھی ہے

$$\frac{1}{2}(\text{لاجم عم} + \text{ماجب عم} - \text{ع}) + \frac{1}{2}(\text{لاجم عم} + \text{ماجب عم} - \text{ع}) = \text{لاجم عم} + \text{ماجب عم} - \text{ع}$$

یہاں عم - عم = $\frac{1}{2}$ اور ہم خطوط مستقیم

جہاں عم - عم = $\frac{1}{2}$ اور ہم خطوط مستقیم

لاجم عم + ماجب عم - ع = اور لاجم عم + ماجب عم - ع =
کو بالترتیب نئے محور لا اور ما مانکر اوپر کی مساوات کو ان کے لحاظ سے
تحويل کرنا چاہتے ہیں (بادر ہے کہ یہ نئے محور قائم نہیں ہوں گے جب تک کہ
عم - عم = $\frac{\pi}{4}$ کے مساوی نہ ہو)

پس لا = نقطہ (لا، ما) سے نئے محور ما پر عمود

= ± (لاجم عم + ماجب عم - ع) (ع)
ایضاً سے ما = ± (لاجم عم + ماجب عم - ع) (ع)
اس لئے اب مساوات ہو جائے گی

لا + ما + ب = لا + ب
یا زبریں حذف کرنے سے

$$\frac{لا}{ب} = \frac{لا}{ب} + 1$$

اوپر کی مشتبہ علامت سے یہ فراہ ہے کہ ہم اپنے نئے محوروں کی کسی سمت کو
مثبت سمت قرار دے سکتے ہیں لیکن ہم دیکھیں گے کہ اکثر اوقات تحويل شدہ مساوات
میں لا، ما کی صرف جفت قوتیں واقع ہوں گی یعنی منحنی ہر دو نئے محوروں کے
لحاظ سے متساوی ہوگا ایسی صورت میں مشتبہ علامت کا سوال پیدا نہیں ہوگا
ایسی تحويل عمل میں لانے وقت طالب علم کو یاد رکھنا چاہئے کہ مجوزہ نئے محور
ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ان کی مساواتیں عمودی صورت میں
لائی گئی ہیں۔

مثال - مساوات (لا - ما - ب) + (لا + ما + ب) = ۲۵ (۱)
کو اسی طرح سے تحويل کرو (محور قائم ہیں)

$$\text{خطوط مستقیم لا - ما - ب} = ۱۰، \text{ لا + ما + ب} = ۱۵$$

صریحاً ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں کیونکہ ایک خط کی مساوات دوسرے
سے لا، ما کے سروں کا تبادلہ کرنے اور ان میں سے ایک کی علامت بدلنے سے
حاصل ہوتی ہے، پہلے خط کو نیا محور لا اور دوسرے کو نیا محور ما مقرر کرو، ان
مساواتوں کو عمودی صورت میں لانے کے لئے ہمیں ہر خط کو وحدانی کے اندر

رقوم کو $۳ + ۲ + ۵$ پر تقسیم کرنا چاہئے، اس طرح مساوات (۱) ہو جائے گی

$$۱ = \left(\frac{۳}{۵} - لا - \frac{۲}{۵} - ما \right) \times \left(\frac{۲}{۵} - لا + \frac{۳}{۵} + ما \right)$$

نئے محوروں کے لحاظ سے اس کی تخیل کرنے سے یہ ہو جاتی ہے

$$ما + لا = ۱ \quad اسلئے نئی مساوات ہے ۲ لا + ما = ۱$$

مشق

$$۱۰۳ - خطوط ۵ لا + ۱۲ ما - ۳۹ = ۰ \quad اور ۱۲ لا - ۵ ما + ۵۲ = ۰$$

کو بالترتیب نئے محاور لا اور ما مان کر (تاکم محوروں کے لحاظ سے)

$$مساوات (۵ لا + ۱۲ ما - ۳۹) = ۰ \quad ۵۲ (۱۲ لا - ۵ ما + ۵۲)$$

کو بولواور نئے محور ما کی اس جانب کو جس میں پرانا مبداء واقع ہے اپنی مثبت جانب قرار دو۔

۳۵ - محور وکی عام سے عام تبدیلی میں ہم پرانے محدودوں کی بجائے نئے محدود

خطی تفاعل مندرج کرتے ہیں -

(۱) فرض کرو کہ پرانے محور قائم ہیں -

فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ ہے پرانے محور و لا، و ما ہیں اور نئے محور

ولا، و ما ہیں -

فرض کرو کہ نئے محوروں کی مساواتیں بلحاظ پرانے محوروں کے

$$ل لا + ص ما + ن = ۰ \quad ل لا + ص ما + ن = ۰$$

ہیں اور نئے محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہے -

تب ما جب سہ = ن سے ولا پر عمود

$$\frac{ل لا + ص ما + ن}{ما + لا} = ۰$$

اس طرح سے واجب سہ = $\frac{ل لا + ص ما + ن}{ما + لا}$ [اس سے قبل مثبت علامت کے معنی پران کر چکے ہیں]

اس لئے لا، مآ محدود لا، مآ کے خطی تفاعل ہیں یعنی
 $لا = ف + لا + ق + مآ + ر، مآ = ف + لا + ق + مآ + ر$ پس لا، مآ کے لئے
 حل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا، مآ نے محدود لا، مآ کے خطی تفاعل ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ پیرا نے محور مائل میں اور ایک دوسرے سے زاویہ صہ بنائے ہیں
 ثبوت مندرجہ بالا میں صرف اتنے تغیر کی ضرورت ہے کہ مآ جب صہ اور
 لا جب صہ کے لئے جو جملے اوپر معلوم کئے گئے ہیں ان کے نسب نماؤں
 میں علامت جذر کے اندر ل^۲ + ص^۲ اور ل^۲ + ص^۲ کی بجائے بالترتیب
 ل^۲ + ص^۲ - ل^۲، ص^۲ - ص^۲ اور ل^۲ + ص^۲ + ل^۲، ص^۲ + ص^۲ جم صہ
 ہونا چاہیے۔

۳۶۔ محوروں کی کسی قسم کی تبدیلی سے مساوات کا درجہ نہیں بدلتا۔
 (۱) درجہ بڑھ نہیں سکتا، فرض کرو کہ بڑے سے بڑے درجہ کی رقم لا، مآ

ہے اس کی بجائے ہمیں اس شکل کا جملہ
 $(ف + لا + ق + مآ + ر) \times (ف + لا + ق + مآ + ر)$ رکھنا ہوگا اور ہم دیکھتے
 ہیں کہ اس جملہ میں بھی لا، مآ میں جو بڑے سے بڑے درجہ کی رقم ہے اس کا درجہ
 ل + ص ہے جیسا کہ رقم لا، مآ میں۔

(۲) درجہ کم نہیں ہو سکتا، کیونکہ اگر تحویل کے بعد پھر ہم اصلی محوروں پر واپس آنا
 چاہیں تو ہمیں لازماً اصلی مساوات حاصل ہونی چاہئے لیکن اس طرح کی تحویل سے درجہ
 بڑھ جائے گا اور چونکہ لا، مآ محدود لا، مآ کے خطی تفاعل ہیں اس لئے
 (۱) کی رو سے یہ ناممکن ہے۔

۳۷۔ اگر محوروں کی کسی قسم کی تبدیلی سے جبکہ مبدا کو نہ بدلا جائے جملہ
 $لا + ۲ھ + ۲ب + مآ + ۲ھ + لا + ۲ھ + مآ + ۲ب$ ہو جائے تو
 $لا + ۲ب - ۲ھ$ جم صہ = $لا + ۲ب - ۲ھ$ جم صہ
 جب صہ = جب صہ

اور $لا + ۲ب - ۲ھ = لا + ۲ب - ۲ھ$
 جب صہ = جب صہ

جہاں سہ اور سہ دونوں صورتوں میں محوروں کے درمیانی زاوے ہیں۔
 جملہ (۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ مبدأ سے نقطہ (لا، ۱) کے واسطے
 کے مربع کو تعمیر کرتا ہے، اور یہ فاصلہ نہیں بدلتا کیونکہ مبدأ دونوں صورتوں میں وہی رہتا ہے
 اس لئے جملہ (۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ کی تبدیل شدہ صورت
 (۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ ہوگی
 اس لئے مفروضات کی رو سے

(۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ (۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ (۱)
 تحویل کے بعد
 (۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ (۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ (ب)
 ہو جائے گا۔

اب اگر (۱) مربع کامل ہو یعنی (ف لا + ق ما) کی شکل کا ہو تو جملہ (ب)
 بھی لازماً مربع کامل ہوگا کیونکہ مساوات کو تحویل کرنے میں ہم (ف لا + ق ما)
 کی بجائے لا، ما کا ایک جملہ درجہ اول مندرج کرتے ہیں (دفعہ ۳۵)
 پس (۱) اور (ب) کے الگ الگ مربع کامل ہونے کی شرائط

$$\begin{aligned} (۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ &= (۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ \\ (۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ &= (۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ \\ &= (۱+۲+۳) لا ۲ لا ۱ ما جم سہ \end{aligned}$$

سے حل کرنے پر لے کی وہی قیمت حاصل ہونی چاہیے۔

$$\text{اس لئے لے، لے کے سروں اور مستقل ارقام کا مقابلہ کرنے سے}$$

$$\begin{aligned} \text{جب } ۱ \text{ سہ} &= \text{۱+۲+۳} \text{ لا ۲ لا ۱ ما جم سہ} \\ \text{جب } ۲ \text{ سہ} &= \text{۱+۲+۳} \text{ لا ۲ لا ۱ ما جم سہ} \\ \text{جب } ۳ \text{ سہ} &= \text{۱+۲+۳} \text{ لا ۲ لا ۱ ما جم سہ} \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} \text{۱+۲+۳} \text{ لا ۲ لا ۱ ما جم سہ} &= \text{۱+۲+۳} \text{ لا ۲ لا ۱ ما جم سہ} \\ \text{۱+۲+۳} \text{ لا ۲ لا ۱ ما جم سہ} &= \text{۱+۲+۳} \text{ لا ۲ لا ۱ ما جم سہ} \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} \text{۱+۲+۳} \text{ لا ۲ لا ۱ ما جم سہ} &= \text{۱+۲+۳} \text{ لا ۲ لا ۱ ما جم سہ} \\ \text{۱+۲+۳} \text{ لا ۲ لا ۱ ما جم سہ} &= \text{۱+۲+۳} \text{ لا ۲ لا ۱ ما جم سہ} \end{aligned}$$

نتیجہ صریح اگر محوروں کے دونوں نظم علی القوائم ہوں تو

۱ + ب = ل + ب اور ل + ب = ۲ = ل + ب - ۲ (۴۸)
 غیر متغیرات - مسئلہ بالا کو ایک مختلف طرح سے ہم بیان کر سکتے ہیں، اوپر
 کے مندرجہ سے یہ مراد ہے کہ

$$\frac{ل + ب - ۲ = ۲ \text{ جم سہ}}{جب ۲ سہ} \text{ اور } \frac{ل + ب - ۲ = ۲ \text{ جم سہ}}{جب ۲ سہ}$$

محوروں کو بدلنے کے بعد اپنے متناظر جملات کے مساوی رہتے ہیں یعنی انکی
 قیمتیں محوروں کے بدلنے سے نہیں بدلتیں، اس لئے ان کو غیر متغیرات
 کہتے ہیں۔

۳۸ - اگر ان نقاط کو جہاں خط مستقیم ل لا + م + ن = - منحنی ہے
 ل + لا + ۲ = ۲ لا + م + ب + ۲ ن + ۲ ف + م + ج = - سے ملتا،
 مہدائے ساتھ خطوط مستقیم کے ذریعہ ملایا جائے تو ان خطوط کی مساوات معلوم
 کرو۔

نفا علیہ - دوسری مساوات کو پہلی مساوات کی مدد سے جس کو اس شکل
 ل + لا + م + ن = - میں لکھا جاسکتا ہے بلحاظ لا، م کے متجانس بناؤ۔

$$\text{اس طرح مساوات لا + لا + ۲ = ۲ لا + م + ب + ۲ ن + ۲ ف + م + ج} \\
\left(\frac{ل + لا + م + ن}{ن} \right) = (گ لا + ن + م) \left(\frac{ل + لا + م + ن}{ن} \right) + ج + \dots \dots \dots (۱)$$

حاصل ہوگی اور یہ مطلوبہ مساوات ہے کیونکہ یہ (لا، م) میں درجہ دوم کی
 ایک متجانس مساوات ہونے کی وجہ سے مہدائے سے گذرنے والے دو خطوط
 مستقیم کو تقسیم کرتی ہے۔ نیز جہاں خط مستقیم منحنی کو قطع کرتا ہے ان نقطوں کے
 محدودیتی اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ اس لئے (۱) مطلوبہ مساوات ہے

مثال - اگر ان نقاط کو جہاں خط مستقیم لا + م + ن = ۲ منحنی
 لا + لا + م + ن + ۳ = ۱ سے ملتا ہے مہدائے ساتھ خطوط
 مستقیم کے ذریعہ ملایا جائے تو ان خطوط کی مساوات معلوم کرو۔

یہاں $1 = \frac{لا + ما}{۲}$ اور اس لئے متجانس مساوات ہے

$$\begin{aligned} لا + لا + ما + ما + (لا + ما) - (لا + ما) &= ۲ \left(\frac{لا + ما}{۲} \right) \\ یا ۴ (لا + لا + ما + ما) - ۲ (لا + ما) + (لا + ما) &= ۲ (لا + ما) \\ یعنی ۳ لا - ۲ لا - ما = ۲ لا - ما = ۲ (لا + ما) &= ۲ (لا + ما) \\ یعنی خطوط مستقیم ہیں لا - ما = ۳ لا + ما = ۰ \end{aligned}$$

مشقیں

۱۰۴۔ جن نقاط پر خط مستقیم $لا + ما = ۲$ منحنی $لا + لا + ما = ۳$ سے ملتا ہے ان کو مبدأ سے ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔
۱۰۵۔ جن نقاط پر خط مستقیم $لا + ما = ۵$ دائرہ $لا + لا + ما = ۱۵۰$ سے ملتا ہے ان کو مبدأ سے ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۶۔ $ما = ۳$ اور منحنی $لا + ما = ۷$ کے نقاط تقاطع اور مبدأ کو ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو اپنے نتیجہ کی تشریح کرو۔

توضیحی مثالیں

(۱) اور ب دو ثابت نقطے ہیں، ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے ہر مقام کے لئے $ن + ب$ ایک مستقل مقدار ہے، اس کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $ن + ب = ج$ ، ارب کو محور لا فرض کرو اور تشاکل کے لحاظ سے اس کے نقطہ تنصیف کو مبدأ قرار دو، نیز فرض کرو کہ محور قائم ہیں۔ فرض کرو کہ ارب کا طول ۲ ہے، تب ا کے محدود (ل، ل) اور ب کے (لم، ل) ہوں گے، فرض کرو کہ ن کے محدود (لا، ما) ہیں

$$\text{تب } ن \text{ لا} = (لا + لا) + \text{ما} = \text{ن ب} = (لا - لا) + \text{ما}$$

$$\therefore \text{ن لا} + \text{ن ب} = ۲ (لا + \text{ما} + لا)$$

$$\therefore لا + \text{ما} = \frac{۱}{۲} ج - لا$$

یعنی ون = $\frac{۱}{۲} ج - لا$ یعنی ن کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ب کا نقطہ وسطی ہے۔

(۲) مبدائیں سے گزرنے والے دو ایسے خطوط کی مسادات معلوم کرو جو بالترتیب خطوط لا + لا + ۲ ما + ب ما = پر عمود ہوں۔ (محور قائم ہیں) فرض کرو کہ معلومہ خطوط مستقیم ما - م لا = ۰، ما - م لا = ۰ ہیں

$$\text{یعنی م م} + \text{م م} = - \frac{۲}{ب} ، \text{م م} = \frac{۱}{ب}$$

ایسے خطوط جو ان پر بالترتیب عمود ہوں انکی مساداتیں

$$\text{م م} + لا = ۰ \text{ اور م م} + ما + لا = ۰ \text{ ہوگی [مسئلہ ۱۹]}$$

$$\text{جن سے مسادات (م م} + ما + لا) (م م} + ما + لا) = ۰$$

$$\text{یعنی م م} + \text{م م} + ما + (م م} + م م) لا + ما + لا = ۰$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب م م + م م اور م م کی قیمتیں مندرجہ کرنے سے مطلوبہ مسادات ب لا - ۲ ما + لا + ما + لا = ۰ حاصل ہوتی ہے۔

(۳) لا + لا + ب ب دو معلومہ محدود خطوط مستقیم ہیں۔ ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ رقبوں لا ن لا + ب ن ب کا مجموعہ مستقل رہتا ہے، ن کا طریق دریافت کرو۔

فرض کرو کہ یہ مجموعہ ۵ ہے، نیز فرض کرو کہ لا + لا + ب ب نقطہ و پر قطع کرتے ہیں۔ و لا + لا + ب ب کو بالترتیب محور لا اور ما قرار دو، بالعموم یہ محور مائل ہوں گے، فرض کرو کہ ان کا زاویہ میلان سہ ہے۔ فرض کرو

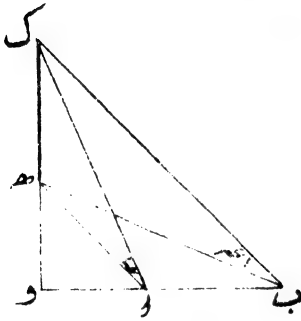
$$و لا = لا ، و لا = لا ، و ب = ب ، و ب = ب$$

لا بڑا ہے لا سے اور ب بڑا ہے ب سے۔ فرض کرو کہ ن کے مجدد (لا، ما)

ہم کو خط و ارب پر کے نقطہ (لا، ہ) کے ساتھ ملانے والے خط مستقیم کی مساوات ہوگی

$$1 = \frac{لا}{ج} + \frac{ما}{ج} \quad (\text{دفعہ ۱۰})$$

ک کو اسی نقطہ سے ملانے والے خط کی مساوات



$$1 = \frac{لا}{ج} + \frac{ما}{ج + ف}$$

ہوگی۔ اور ان دو خطوں میں جو زاویہ فہ بنتا ہے وہ مساوات ذیل سے معلوم ہوگا

$$\text{مس فہ} = \frac{\frac{ج}{لا} + \frac{ج + ف}{لا}}{1 + \frac{ج (ج + ف)}{لا}} = \frac{ج + ج + ف}{لا + ج + ج + ف} \quad (\text{دفعہ ۱۱})$$

یا (لا، ف مم فہ + ج، ف + ج، = ج،)
شرائط سوال کے بموجب اگر فہ = عہ تو لا کی اس مساوات درجہ دوم کی دو اصلیں
لا اور ب ہیں

$$لا + ب = اصلوں کا مجموعہ جبکہ فہ = عہ$$

$$ف مم عہ =$$

جس سے نتیجہ مطلوب حاصل ہوتا ہے۔

[ملاحظہ ہو کہ لا کی دو الگ الگ قیمتیں نکالنے کے لئے مساوات درجہ دوم کو حل کرنا ضروری نہیں]

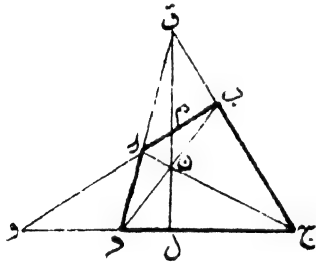
(۵) اب ج د ایک ذواربۃ الاضلاع ہے، اب ج د ایک دوسرے کو نقطہ و پر قطع کرتے ہیں، ج، ب د نقطہ ن پر اور د، ب ج

نقطہ نق پر، نق، لب کو م پر اور ج د کو ل پر کاٹتا ہے

$$\text{ثابت کرو کہ } \frac{1}{\text{ول}} = \frac{1}{\text{وب}} + \frac{1}{\text{وم}}، \frac{1}{\text{ول}} = \frac{1}{\text{ود}} + \frac{1}{\text{وج}}$$

فرض کرو کہ ول = لب، لب = ب، وج = ج، ج = د، د = م

ول لب اور وج د کو محور لا اور ما فرض کرو، یہ محور مائل ہوں گے۔
لد کی مساوات ہے



شکل ۲۴

$$\frac{1}{\text{ول}} = \frac{1}{\text{لب}} + \frac{1}{\text{وم}} \dots\dots\dots (د)$$

$$\text{ب ج کی } \frac{1}{\text{ول}} = \frac{1}{\text{لب}} + \frac{1}{\text{وج}} \dots\dots\dots (ب)$$

$$\text{وج کی } \frac{1}{\text{ول}} = \frac{1}{\text{وج}} + \frac{1}{\text{ج د}} \dots\dots\dots (ج)$$

$$\text{اور ب د کی } \frac{1}{\text{ول}} = \frac{1}{\text{لب}} + \frac{1}{\text{وم}} \dots\dots\dots (د) \quad [\text{دفعہ ۱۰ د}]$$

چونکہ نق خطوط ول اور ب ج کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے اس لئے
اس کی مساوات ذیل کی شکل کی ہونی چاہیے

$$\left(\frac{1}{\text{ول}} = \frac{1}{\text{لب}} + \frac{1}{\text{وم}} \right) + \left(1 - \frac{1}{\text{وج}} + \frac{1}{\text{ب ج}} \right) = \dots\dots\dots (ع)$$

بیزن نق خطوط وج اور ب د کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے اس لئے

$$\text{اسکی مساوات اس شکل } \left(\frac{1}{\text{ول}} = \frac{1}{\text{لب}} + \frac{1}{\text{وم}} \right) + \left(1 - \frac{1}{\text{وج}} + \frac{1}{\text{ب ج}} \right) = \dots\dots\dots (ف)$$

کی ہونی چاہیے۔ نق کی مساوات حاصل کرنے کے لئے ہمیں ک اور کٹ

کو اس طرح منتخب کرنا چاہیے کہ (ع) اور (ف) ایک ہی خط مستقیم کو تعبیر کریں

اس سے لازم آتا ہے کہ ک = ۱ اور ک = ۱

اس لئے ن ق کی مساوات ہے

$$\text{لا} \left(\frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{د}} \right) + \text{ما} \left(\frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{د}} \right) - ۲ = ۰$$

جہاں ن ق، اب کو کاٹتا ہے اس نقطہ کا لا = و م اور ما = ۰

$$\text{اس لئے و م} = \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{د}} \text{ اور اسی طرح سے } \frac{۲}{\text{د}} = \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{د}}$$

باب اول پر متفرق مشقیں

۱۰۷۔ (۱۱) اور (۳، ۴) کے ملانے والے خط کو جو نقاط داخلا نسبت

۱:۲ سے اور خارجاً نسبت ۳:۴ سے تقسیم کرتے ہیں ان کے محدد معلوم کرو۔

۱۰۸۔ ثابت کرو کہ خواہ محور قائم ہوں یا مائل (۹، ۱۰) اور (۱۱، ۱۲) کو ملانے والے خط کی محور ما تنصیف کرتا ہے۔

۱۰۹۔ ذیل کے طریق مرتب کرو (۱) طہ = $\frac{1}{2}$ (۲) ر = ۳ (۳) جب ۲ طہ = ۰

۱۱۰۔ ایک متحرک نقطہ اور (۰، ۴) کے درمیانی فاصلہ کا مربع ہمیشہ اس فاصلہ کے مربع کا چار گنا ہوتا ہے جو متحرک نقطہ اور (۰، ۱) کے درمیان ہو۔ نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۱۱۱۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کے فاصلوں کے مربعات مساوی ہوں اور (۳، ۴) سے مساوی ہوں۔

۱۱۲۔ مساوات ۴ لا = ۹ ما کا طریق دریافت کرو۔

۱۱۳۔ مساوات لا + ما = ۳۶ کا طریق دریافت کرو۔

۱۱۴۔ محوروں کا زاویہ میلان معلوم ہے اور ن کوئی نقطہ (لا، ما) ہے، ن سے محوروں پر عمود ن ل اور ن م نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ

$$\text{ول} = \text{لا} + \text{ما} \text{ جم سہ، و م} = \text{لا} \text{ جم سہ} + \text{ما}$$

ن م کی مساوات حاصل کرو۔

۱۱۵۔ اگر مثال بالا میں ل م ایک ثابت نقطہ (ن، ق) میں سے گزرے

تو ان کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
۱۱۶۔ ایک خط مستقیم کا جو حصہ دونوں محوروں کے درمیان کٹتا ہے اس کا نقطہ تنصیف (لا، ما) ہے۔ ثابت کرو کہ خط کی مساوات

$$\frac{لا}{لا_۲} + \frac{ما}{ما_۲} = ۱ \text{ ہے۔}$$

۱۱۷۔ ایک خط مستقیم ایک ثابت نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ اس کا جو حصہ محوروں کے درمیان کٹتا ہے اس کے نقطہ تنصیف کے

$$\text{طریق کی مساوات } \frac{لا}{لا_۲} + \frac{ما}{ما_۲} = ۱ \text{ ہے۔}$$

۱۱۸۔ خطوط ذیل کے جوڑوں کے درمیان جو زاویے بنتے ہیں انکے ماس معلوم کرو، محور قائم ہیں

$$(۱) \text{ لا} - \text{ما} = ۰ \quad (۲) ۲ لا + ۳ لا_۲ - ۴ ما = ۰$$

$$(۳) لا + ۴ لا_۲ + ما = ۰ \quad (۴) لا + لا_۲ + ما + ما_۲ = ۰$$

آخری صورت میں ماس کے خیالی ہونے کے معنی سمجھاؤ۔

۱۱۹۔ جن نقاط پر خط مستقیم لا + ما = ۳ منحنی

$$لا + ۲ لا_۲ - ما - ما_۲ = ۰ \text{ سے ملتا ہے ان کو مبداء سے ملانے}$$

والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔

۱۲۰۔ اگر دائرہ لا + ما = ۲ کے ایک وتر ل لا + ما = ۱ کے

محاذی مبداء پر زاویہ ۴۵° بنے تو

$$۴ \left\{ لا (لا + ما) - ۱ \right\} = ۲ \left\{ لا (لا + ما) - ۲ \right\}$$

۱۲۱۔ چار خطوط لا + ما = ۰، لا - ما = ۲، لا + ۲ لا_۲ - ما - ما_۲ = ۰،

لا - ۲ لا_۲ - ما - ما_۲ = ۰ کو دو دو کر کے لینے سے جو چھ نقاط تقاطع حاصل ہوئے ہیں ان کے

محد معلوم کرو۔

اس لئے ان خطوط سے جو ذواربہ الاضلاع بنتا ہے اس کے تین قطروں کی مساواتیں معلوم کرو، اور ثابت کرو کہ ان قطروں کے نقاط تنصیف ایک خط

مستقیم بر واقع ہوتے ہیں جس کی مساوات $۵۲ + ۸۰ - ۸۰ = ۴۷$ ہے۔

۱۲۲۔ اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط $ما = م لا$ ، $ما = ل لا$ ، $لا = ل لا$ ، $ب ما + ج =$ سے جو مثلث بننا ہے اس کا رقبہ $\frac{1}{2} (م ل) (ج)$ ہے۔

۱۲۳۔ یہ کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ $لا + ۲$ سے $لا + ما + ۱۶ - ۹ - ۶ - ۳۶$ دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے۔

۱۲۴۔ ثابت کرو کہ مساوات $۶ لا - لا ما - ۱۲ ما - ۸ لا + ۲۴ ما - ۱۴ =$ دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اور ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۲۵۔ اگر ایک متغیر خط مستقیم دو معلومہ متقاطع خطوط مستقیم پر ایسے جیسے کے جن کے متکافیوں کا مجموعہ متقل ہو تو ثابت کرو کہ یہ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۲۶۔ اگر ایک متحرک خط مستقیم بر دو ثابت نقاط $(۳، ۴)$ ، $(۶، ۷)$ سے عمود نکالے جائیں تو ان کا مجموعہ اس عمود کا تین گنا ہوتا ہے جو ایک تیسرے ثابت نقطہ $(۳، ۱)$ سے اسی خط پر نکالنا۔ یہ ثابت کرو کہ یہ خط ایک اور ثابت نقطہ میں سے ہمیشہ گذرتا ہے اس نقطہ کے محدد معلوم کرو۔

۱۲۷۔ اگر ایک متساوی الساقین مثلث کے مساوی اضلاع $ا ب$ ، $ب ج$ ، $ج ا$ نقاط $ع$ اور $ف$ تک اتنے خارج کئے جائیں کہ $ب ج = ۳$ ، $ج ا = ۲$ ، $ا ب = ۱$ تو ثابت کرو کہ $ع$ و $ف$ ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۲۸۔ ثابت کرو کہ مساوات

$لا + ما - ۳ لا + ما - ۶ لا - ۶ ما + ۶ لا + ۶ ما =$ تین ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ ان کے مقامات کو شکل میں دکھاؤ۔

۱۲۹۔ محوروں کو حادہ زاویہ ۳۰° میں پھرانے کا ضابطہ لکھو۔

۱۳۰۔ مال محوروں $و لا$ اور $و ما$ کا زاویہ میلان ۳۰° ہے اور ان کے

اگر ان مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۳۹۔ ارب ج ایک قائم الزاویہ مثلث ہے اور اس کا زاویہ لا قائمہ ہے، اگر ج اور ج دو ایسے ثابت خطوط مستقیم پر حرکت کریں جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہوں تو لا کا طریق معلوم کرو۔

۱۴۰۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور مثلث کے قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق دیا ہوا ہے، رأس کا طریق معلوم کرو۔

۱۴۱۔ ارب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، اگر زاویہ لا اور اضلاع کا مجموعہ دونوں مستقل ہوں تو ثابت کرو کہ ج کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۴۲۔ ثابت کرو کہ لا لا + ۲ھ لا + ما + ب ما =۔ اور لا + ۲ق لا + ما + ب =۔ کا ایک خط مشترک ہو گا اگر

(ا۔ ر۔ ب ف) + ۴ (ھ ف۔ ل ق) (ھ ر۔ ب ق) =۔

۱۴۳۔ اگر ایک متحرک خط مستقیم پر ن ثابت نقطوں سے عمود نکالے جائیں تو ان کا مجموعہ صفر ہوتا ہے، ثابت کرو کہ خط مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

۱۴۴۔ ثابت کرو کہ خطوط لا لا + ۲ھ لا + ما + ب ما =۔ میں سے ایک خط اور خطوط لا لا + ۲ھ لا + ما + ب ما = ک (لا + ما) میں سے ایک خط کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے وہ باقی دو خطوط کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے۔

از ماکشی پرچہ

۱۔ ایک مثلث کا قاعدہ لا اور رأسی زاویہ لا معلوم ہے، رأس کا طریق دریافت کرو، ہندسی طریق پر اس کی تصدیق کرو۔

۲۔ ذیل کی مساواتوں کے طریق مرتسم کرو۔

(۱) ر (جم طہ + ۳۴ جب طہ) = ۳۴ ر

(۲) ر جب طہ = ر

۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

۱۔ لا + ب + ج + ک (لا + ب + ج) = -

ایک ایسے خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو خطوط لا + ب + ج = - اور لا + ب + ج = - کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔ نیز ک کی یہی قیمت معلوم کرو کہ یہ خط مبدا میں سے بھی گزرے۔

۲۔ ۳ لا + ۲ ما - ۱ = - اور ۴ لا + ۳ ما + ۲ = -

کے نقطہ تقاطع کے محدود معلوم کرنے کے بغیر ان خطوط کی مساواتیں معلوم کرو جو اس نقطہ تقاطع کو (۱) مبدا سے (۲) نقطہ (-۱، ۳) سے ملائیں۔

۵۔ قائم محوروں کی لحاظ سے خطوط

(۱) لا - ۶ ما - ۱۶ = - (۲) لا + ۹ ما - ۳۲ = - کو شکل میں منقسم کرو اور ان کے درمیانی زاویہ کا محاسب معلوم کرو۔

اگر ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصف محور لا سے نقاط ن اور ق پر ملیں تو ثابت کرو کہ ن ق کا طول ۵ اکائیاں ہے۔

۶۔ اس میں بالعموم زیادہ سہولت ہے کہ پرانے محدودوں کو نئے محدودوں کی رقوم میں بیان کیا جائے بجائے اس کے کہ نئے محدودوں کو پرانے محدودوں کی رقوم میں بیان کیا جائے، اس کی وجہ بیان کرو۔

۷۔ اگر محوروں کو زندایا (۱) ۳۰ (۲) ۵۰ میں پھرا دیا جائے تو معلوم کرو کہ ہر صورت میں مساوات لا - ما = - کیا ہو جائے گی۔

۸۔ مثل محوروں ولا اور و ما کا درمیانی زاویہ سہ ہے۔ ان محوروں کے لحاظ سے ایک نقطہ کے محدود (لا، ما) ہیں اور اسی نقطہ کے محدود محوروں ولا اور و میں سے گزرنے والے عمود کے لحاظ سے (لا، ما) ہیں

شکل سے ثابت کرو کہ لا = لا + ما جم سہ، ما = ما جب سہ اور اسلئے

$$\text{ما} = \frac{\text{لا} + \text{ما جب سہ}}{\text{لا}} \quad \text{لا} = \frac{\text{ما جب سہ}}{\text{ما}}$$

۹۔ سوال ناقابل میں معلوم کرو کہ مساوات لا + ۲ ما - ۲ لا + ما - ۱ = -

کیا ہو جائے گی اگر اسے لا، ما کی رقوم میں بیان کیا جائے اور اس سے

ثابت کرو کہ دو خط ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں گے اگر

$$1 + 2 = 90^\circ$$

۱۰۔ قائم محوروں کی صورت میں ثابت کرو کہ جو خط

$$5 \text{ لا} + 12 \text{ لا} - 6 \text{ ما} + 4 \text{ لا} - 2 \text{ ما} + 3 = 0 \text{ اور لا} - 6 - 1 = 0$$

کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملاتے ہیں وہ محوروں سے مساوی زاویے بناتے ہیں۔



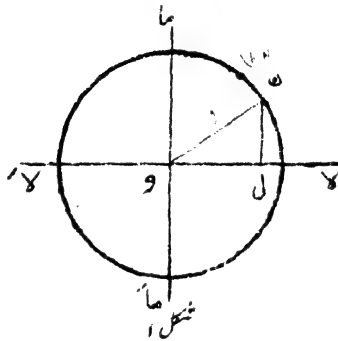
حصہ دوم

وائرہ اور مخروطی تراشیں

باب اول

دائرہ

۱- دائرہ کے محیط کی مساوات معلوم کر دیجئے کہ دائرہ کے مرکز کو مبدأ قرار دیا جائے۔
(۱) قائم محور۔ فرض کرو کہ O مرکز ہے اور LA نصف قطر اور N (لا'ما) محیط پر کوئی نقطہ ہے۔ N سے O تک کیجئے۔



چونکہ $ON = LA$ اس لئے جو ہندی شرط پوری کرتا ہے وہ یہ ہے $ON = LA$ ۔
اس کو تجلیلی طریق پر اس طرح بیان کریجئے کہ $LA = MA = LA$ (۱)
جو دائرہ کی مساوات مطلوبہ ہے۔

(۲) مائل محور۔ اسی قسم کے استدلال سے جو حصہ اول دفعہ ۲ میں اختیار کیا گیا
ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات مطلوبہ حسب ذیل ہے
 $LA^2 + MA^2 = ۲ LA$ (۲)۔

۲- دائرہ کی عام مساوات معلوم کرو (محور قائم ہیں)
فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز O ہے اور اس کے محدد (ہڈ) (h, k) ہیں نیز
فرض کرو کہ دائرہ کا نصف قطر r ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ N (لا'ما) ہے۔

پس اس صورت میں لاؤ اور ما کے سر مساوی ہیں اور لا ما کا سر لا یا ما کے سر کا (۲۰ جم سر) گنا ہے۔

۶۔ تین نقاط معلومہ میں سے گزرنے والے دائرہ کی مساوات

قائم محور۔ فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$ ہے۔

ہے، اس مساوات میں تین مستقل مقداریں گ، ف، ج شامل ہوتی ہیں جنہیں معلوم کرنا مقصود ہے۔ (اس سے ظاہر ہے کہ ایک الزم عام طور پر معلوم ہو سکتا ہے جو کسی تین نقاط معلومہ میں سے گزرے، اور یہی مساوات میں ہر نقطہ کے محدود مندرجہ کرنے سے گ، ف، ج میں تین ہمزاد سادہ مساواتیں حاصل ہونگی جن سے گ، ف، ج معلوم ہو سکتے ہیں۔ اس کے متعلق کوئی اضافی شرط مترب کرنا لاجمل ہے، صرف طریق عمل کا یاد رکھنا ضروری ہے۔

ماثل محور۔ طریق عمل وہی ہے، صرف عام مساوات میں درجہ دوم کی ارتقا

لا + ما کی بجائے لا + ما + لا ماحم سے ہونا چاہیے۔

مثال اگر مخور قائم ہوں تو اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقاط (۲، ۳)، (۱۹، ۸) اور (۲، -۹) میں سے گزرتا ہو۔

اگر دائرہ کی مساوات $LA + MA + 2G + 2F + M + J = 0$ ہو تو

محمد مندوب کرنے سے

۴۰۹ = ج + ۶ + گ

۳۸ گ + ۱۶ ف + ج = ۲۵ م

۴ گ - ۱۸ ف + ج = ۸۵

جس سے گ = ۷، ف = ۳، ج = ۱۱۔ اہل پس دائرہ کی مساوات

لاۛ ماۛ مالاۛ ماۛ۔ ہے، یا اس کہ ہم اس طرح لکھ

سکتے ہیں (لا - ۷) + (ما - ۳) = ۱۶۹

جو ایک دائرہ ہے جس کا مرکز (۲، ۳) ہے اور نصف قطر ۱۳۔

مشفقین

ذیل کی شقوں میں سے ۶ تا ۹ قائم محوروں سے متعلق ہیں۔

۲- ذیل کے معطیات کی بناء پر دائروں کی مساواتیں معلوم کرو
(۱) مرکز $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ نصف قطر $\frac{1}{2}$ (ب) مرکز $(3, 2)$ نصف قطر ۳
(ج) مرکز $(0, 1)$ نصف قطر ۱
۳- ذیل کے دائروں کے مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

(۱) $(x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0)$ (ب) $(x^2 + y^2 - 4x + 6y - 13 = 0)$
(ج) $(x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0)$ (د) $(x^2 + y^2 - 6x + 8y - 17 = 0)$
(ع) $(x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0)$

۴- اگر دو دائرے $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$ ایک دائرہ کو عبیر کرے تو محوروں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو اور اس دائرہ کا نصف قطر اور مرکز کے محدد معلوم کرو۔
۵- مثل محوروں کے لحاظ سے $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔
ایک دائرہ کی مساوات ہے $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

۶- نقاط ذیل میں سے گزرنوالے دائروں کی مساواتیں معلوم کرو اور بصورت میں دائرہ کے مرکز کو مبدا مان کر انہیں تھویل کرو

(۱) $(x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0)$ (ب) $(x^2 + y^2 - 4x + 6y - 13 = 0)$ (ک) $(x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0)$
(ج) $(x^2 + y^2 - 6x + 8y - 17 = 0)$ (د) $(x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0)$ (ب) $(x^2 + y^2 - 4x + 6y - 13 = 0)$

۷- ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو

(۱) جو $(0, 0)$ میں سے گزرتا ہے اور محوروں پر حصے 4 و 6 کا ٹٹا ہے
(ب) جس کا مرکز $(4, 6)$ ہے اور جو نقطہ $(4, 6)$ میں سے گزرتا ہے
۸- مبدا سے ایک متحرک نقطہ کے فاصلہ کا مربع محور کا سے اس کے فاصلہ کا گنا ہوتا ہے جہاں x مستقل ہے، نقطہ کا طریق معلوم کرو نیز طریق کا مرکز اور نصف قطر دریافت کرو۔

۹- مبدا سے ایک متحرک نقطہ کے فاصلہ کا مربع خط $y = \frac{1}{2}x$ سے اس کے فاصلہ کا گنا ہوتا ہے، ثابت کرو کہ طریق ایک نقطہ دائرہ ہے اس کا تمام معلوم کرو
۱۰- ثابت کرو کہ جو حصہ دائرہ $(x^2 + y^2 - 4x + 6y - 13 = 0)$ $(x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0)$ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو اور اس سے اقلیدس

م ۳۳ ش ۳۶ کا نتیجہ حاصل کرو۔

۱۱۔ اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ نقاط (۵، ۵) (۴، ۶) (۳، ۷) (۲، ۸) (۱، ۹) سب

ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اس کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

مجھے دائرہ کی قطبی مساوات معلوم کرو۔

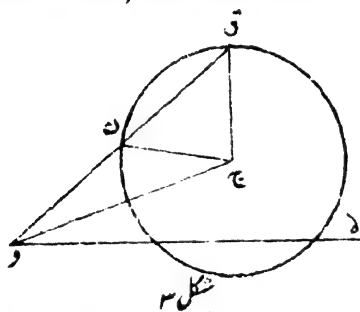
اگر مرکز قطب ہو اور نصف قطر r تو مسادات صریحاً $r = \frac{1}{2}$ ہوگی اگر مرکز ج قطب

نہ ہو تو فرض کر دو کہ اس کے محد (دعہ) ہیں فرض کر دو کہ میٹا پر کوئی نقطہ (نقطہ)

ہے اور دائرہ کا نصف قطر ہے۔

نقطہ ن ذیل کا ہندی ربط یوں کرتا ہے

وج + ون - ۲ وج × ون جم ج ون = ج ن



ادراس کو تملیلی طریق پر اس طرح بیان کریں گے کہ ۲ - ۲ د رجم (ط - عم) = ۱

یا رکی نذر ولی قوتوں میں ترتیب دینے سے نذر - ۲ ر د جم (ط - ع) + د - (ع) = ۱۰۰۰۰

۸۔ اگر قطب ممیٹ پر واقع ہو تو $\delta = 0$

اور مساوات ہو جائے گی

۱ = ۲ حجم (طه - عه) ۱۰۰۰ (۷)

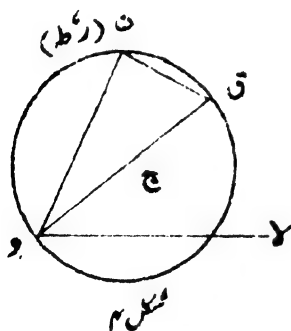
اور اگر علاوہ اس کے خطابتی بھی

مرکز میں سے گزرے تو مساوات ہو جائیگی

(۸).....

۹۔ طول و آن اوزوق اوپر کی مساوات

(۶) میں رکی دو قیمتیں ہیں اس لئے $ون \times وق = دا$ ۔ لہٰذا اس میں یہ ماسلف



خط مستقیم و ن ق کی سمت پر منحصر نہیں ہے یہ غور طلب ہے کہ جب و دائرہ کے اندر ہو تو و ن اور و ق مختلف العلامت ہوتے ہیں اس صورت میں حاصل ضرب و ن و ق منفی ہوتا ہے [مقابلہ کرد اقلیدس م شکل ۳۵ اور م ۳۶ شس ۳۶ کے ساتھ] جب و دائرہ کے باہر ہو جیسا شکل میں تو و ن سے گزرنیوالا قطر سنی دائرہ سے اسی صورت میں حقیقی نقاط پر ملے گا جبکہ مساوات (۶) میں ر کی قیمتیں حقیقی ہوں یعنی اگر $\sqrt{2}$ جم (ط - ط) - $\sqrt{2}$ + $\sqrt{2}$ ثابت ہو۔ دوسرے الفاظ میں اگر جب (ط - ط) - $\sqrt{2}$ (جو ہندسی طریق پر بھی ظاہر ہے) جب و دائرہ کے اندر ہو تو د (ط - ط) اس لئے جملہ $\sqrt{2}$ جم (ط - ط) - $\sqrt{2}$ + $\sqrt{2}$ زاویہ ط کی تمام قیمتوں کے لئے مثبت ہوگا اور و ن سے گزرنیوالا ہر ایک خط دائرہ سے حقیقی نقاط پر ملے گا۔

مشق

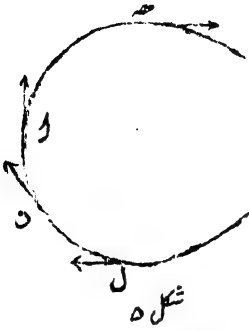
۱۲ - ذیل کے دائروں کے مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

(۱) $\sqrt{2}$ - $\sqrt{2}$ ر جم (ط - ط) - $\sqrt{2}$ = ۱۶

(ب) $\sqrt{2}$ - $\sqrt{2}$ ر (ط - ط) جم (ط - ط) + جب (ط - ط) = ۵

۱۰ - وتر اور مماس - تعریفات - ایک منحنی کا وتر ایسا خط مستقیم ہے جو اس پر کے دو نقطوں کو ملائے۔ ایک ایسے خط مستقیم کو جو منحنی کو کاٹتا ہو بعض اوقات منحنی کا قاطع بھی کہتے ہیں۔ طالب علم اتناک اقلیدس کی تعریف مماس سے مانوس ہے اسے اب مماس کے لئے تحلیل اور تعریف سے واقف ہونا چاہئے اور یہ تعریف صحت دائروں کی صورت میں ہی درست نہیں ہے بلکہ بالعموم سب منحنیات کی صورت میں درست ہے۔ پس ایک منحنی کے کسی نقطہ پر کا مماس فی الحقیقت ایک ایسا خط مستقیم ہے جو اس نقطہ سے گزرتا ہے اور اس نقطہ پر منحنی کی سمت کو ظاہر کرتا ہے۔

ٹرٹل پلیس لنڈن کی نمائش میں جو الٹی سیدھی ریلوے "حال میں بنائی گئی ہے وہ مماس سے اس لئے تحلیل کی بخوبی توضیح کرتی ہے۔ ریل کی سڑک سے جو منحنی بنتا ہے اس کے کسی نقطہ ن پر کا مماس اس سمت کو تعبیر کریگا جس سمت میں کہ ریل کے پہلے ٹھیک ن میں سے گزرتے وقت حرکت کر رہے ہیں



یایوں خیال کرو کہ ن میں سے گذرتے وقت
اگر مرکز کو ریل کے نیچے سے ایک سمت
اگک کر لیا جائے تو جس سمت میں پہلے
مرکز کو چھوڑ کر فضا میں حرکت کرنا شروع
کرینگے وہی سمت ماس ہوگی۔

سب سے پہلے نقطہ ل پر یہ سمت

افقی ہے سب سے اوپے نقطہ ھ پر یہ

افقی ہے لیکن مقابل سمت میں مگر ایک درمیانی نقطہ پر صعود کے وقت یہہ انتہائاً
اوپر کی طرف ہوگی۔

اوپر ہم نے یہ بتایا ہے کہ ایک منحنی کے کسی نقطہ پر کا ماس اسس نقطہ پر
منحنی کی سمت کا پتہ دیتا ہے اب یہ سمت اس نقطہ میں سے گذرنیوالے ایک خط مستقیم
سے ہی متعین ہو سکتی ہے کیونکہ ایک خط مستقیم ہی کسی محدود فاصلہ تک اپنی سمت کو
تاکم رکھتا ہے لیکن ایک منحنی (عام تحمل کے مطابق) خواہ کتنا ہی تلیل فاصلہ ہم اس پر
ملے کریں ہر مقام پر ایک نئی سمت اختیار کرتا ہے۔ اس لئے قدرتی طور پر ماس کا
تخیل ہمارے ذہن میں یہ ہو سکتا ہے کہ یہ نقطہ ن میں سے گذرنیوالا ایک خط مستقیم
ہے جو ن پر منحنی کی سمت کا تعین کرتا ہے۔ اب ہمیں دیکھنا چاہئے کہ نقطہ ن پر
منحنی کی سمت سے کیا مراد ہے ظاہر ہے کہ جس سمت میں ہم ن سے چلکر منحنی پر
اس سے اگلے ساتھ کے نقطہ ن پر جاتے ہیں وہی منحنی کی سمت نقطہ ن پر
ہو سکتی ہے پس جو خط مستقیم ن اور منحنی کے اگلے متصل نقطہ ن کو ملاتا ہے وہی
سمت نقطہ ن پر منحنی کی سمت ہے۔ اس سمت کو حاصل کرنے کا آسان طریقہ یہ ہے
کہ ہم ایک وتر ن ق لیں اور نقطہ ق کو منحنی پر اسقدر حرکت دیں کہ چلتے چلتے
یہ ن پر پہنچ جائے جو منحنی پر اگلا متصل نقطہ ہے یا دوسرے الفاظ میں ہمیں ق کو
منحنی پر حرکت دینے سے ن کے اتنا قریب لے آنا چاہئے کہ یہ ن پر عین
منطبق ہو سکے ہو۔ پس نقطہ ن پر منحنی کی سمت وتر ن ق کی سمت کا انتہائی
مقام ہے جبکہ دوسرا نقطہ تقاطع ق منحنی پر حرکت کرتے کرتے ن کے

آنا قریب آجائے کہ یہ اس پرطبق ہونی کو ہو
 نوٹ طالب علم دیکھ کر جب ق فی الحقیقت ن پرطبق ہوتا ہے تو سمت ن ق
 غیر متعین ہو جاتی ہے اس لئے پوری صحت کے لئے ہمیں یہ کہنا چاہئے کہ جب ق
 منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ن سے لا انتہا تک مواصلہ ہوتا ہے تو اس وقت
 ن ق کی سمت اپنے مذکورہ بالا انتہائی مقام پر ”جیکہ ق“ ن پرطبق ہو کر حرکت
 کر کے آتی ہے یا اپنے ”انتہائی مقام“ کے ساتھ لا انتہا تک مقدر کا زاویہ بناتی ہے
 اور یہی تمہارا رقیود کے بعد طالب علم ذیل کی تعریف کو سمجھ سکیگا۔

۱۱۔ تعریف۔ ایک منحنی کے کسی نقطہ پر کا ماس اس نقطہ میں سے گذر نیوالے
 وتر کا انتہائی مقام ہے جبکہ وتر کا دوسرا نقطہ تقاطع منحنی پر حرکت کرتے کرتے پہلے
 نقطہ پرطبق ہو جائے۔

نوٹ ماس ایک خط مستقیم ہونے کی وجہ سے ہر دو جانب غیر محدود تصور ہونا چاہئے
 اور ایک مسلسل منحنی کی صورت میں ہمیں اس کے کسی ایک نقطہ پر وہی غیر محدود
 خط مستقیم بطور ماس حاصل ہوگا خواہ ہم منحنی کے کسی طرف جائیں۔

۱۲۔ اگر منحنی پر ایک نقطہ ن ہو اور اس کے محدود (لا) ن ہوں اور منحنی پر کے
 ایک اور نقطہ ق کے (لا) ہوں تو وتر ن ق کی مساوات $\frac{لا-لا}{لا-لا} = \frac{لا-لا}{لا-لا}$ ہونی چاہئے
 (حصہ اول دفعہ ۱۰ ج) اب ن پر کے ماس کی مساوات معلوم کر کے اس کا
 سوال حد تک یہ ہے کہ ہم جلد $\frac{لا-لا}{لا-لا}$ کی انتہائی صورت میں معلوم کریں جبکہ نقطہ
 (لا) ن منحنی پر حرکت کرتے کرتے نقطہ (لا) ہا کے نہایت ہی قریب آجائے اور
 اس پر عین منطبق ہونی کو ہو اس عمل میں یہ ضرور یاد رہے اور اسے لازماً استعمال کیا جائے
 کہ دونوں نقطوں کے محدود منحنی کی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

۱۳۔ دائرہ لا + لا + لا + لا + ج = ۰ کے محیط پر ایک نقطہ
 (لا) ہا ہے اس نقطہ پر ماس کی مساوات دریافت کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ ن (لا) ہا ہے اور اس کے پاس ایک نقطہ دائرہ کے محیط پر

ق (لا) ہا ہے ن ق کی مساوات ہے $\frac{لا-لا}{لا-لا} = \frac{لا-لا}{لا-لا}$ (۱) (حصہ اول دفعہ ۱۰ ج)

کے نقطہ (لا، با) پر مماس کی مساوات ہے

لا (لا + لا + ہا + گ) + ما (ہا + لا + با + ف) + گ (لا + با + ج) =
۱۴۔ نقطہ (۲، ۴) پر لا^۲ + ما^۲ = ۴۔ ۴ = ۴ + ۰۔ کے مماس کی مساوات
معلوم کرو۔

۱۵۔ اُن نقاط پر دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۱۳ کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو
جہاں لا = ۲

۱۶۔ جن نقاط پر لا^۲ + ما^۲ = ۲۵، لا^۲ + ما^۲ = ۲۰، لا = ۲، لا = ۲، لا = ۲ کو قطع کرتا
ہے ان پر کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۲۵ اور لا^۲ + ما^۲ = ۸ + لا + لا = ۷۵۔
ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۱ کے پر کے نقاط (لا، با) اور (لا، با) کو
مٹانے والے قاطع کی مساوات اسطرح لکھی جاسکتی ہے

$$\text{لا (لا + لا) + (با + با) = لا (لا + با + با + لا)}$$

۱۹۔ اگر دائرہ کی مساوات لا^۲ + ما^۲ + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰ ہو
تو قاطع کی مساوات ہوگی

لا (لا + لا + ۲گ) + ما (با + با + ۲ف) = لا (لا + با + با + ج)
۲۰۔ اگر دائرہ لا^۲ + ما^۲ + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰ کے نقاط (لا، با)

اور (لا، با) پر کے مماس ایک دوسرے پر عمود ہوں تو ذیل کا ربط ثابت کرو
لا (لا + با + با + گ) (لا + لا) + ف (با + با) + گ + ف = ۰

۲۱۔ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۱ کے نقطہ ن پر کا مماس محاورہ لا اور ما سے بالترتیب
ف اور ت پر ملتا ہے اور ن ن ن م ان محوروں پر عمود کھینچ گئے ہیں ثابت کرو کہ
ج ل × ج ت = لا اور ج م × ج ت = لا جہاں ج مرکز ہے۔

۲۲۔ عموماً۔ تعریف ایک منحنی کے کسی نقطہ پر کا عمود ایک ایسا خط مستقیم ہے
جو اس نقطہ میں سے گذرے اور مماس پر عمود ہو۔

۱۵۔ دائرہ لا^۲ + ما^۲ + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰ کے نقطہ

(لا' با) پر جو عماد کھنچ سکتا ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔
 دائرہ کی مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ محور قائم ہیں۔
 عماد ایک خط مستقیم ہے جو (لا' با) میں سے گزرتا ہے اور
 لا (لا + گ) کہ با (با + ف) + گ لا + ف با + ج =
 پر عمود ہے اس لئے عماد کی مساوات یہ ہے

$$\frac{لا - لا}{لا + گ} = \frac{با - با}{با + ف} \quad (\text{حصہ اول دفعہ ۱۰ با اور دفعہ ۱۹})$$

اس لئے عماد مرکز (گ - ف) میں سے گزرتا ہے اور اس نصف قطر پر
 منطبق ہوتا ہے جو نقطہ (لا' با) میں سے کھینچا جائے۔ اس لئے ایک دائرہ کا
 ماس نقطہ تماس میں سے گزرنیوالے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔
 [حالیہ علم یاد رکھو کہ ہم دائرہ کے خواص کو ابتدائی تخیلات کی بنا پر تحقیق کر رہے
 ہیں، اس لئے ہمیں اقلیدس کے مسائل کو تسلیم نہیں کر لینا چاہئے۔]

مشق

۲۲۔ ثابت کرو کہ نئی لا' با' ہ لا' با' ب با' + گ لا' با' + ف با' + ج =
 کے نقطہ (لا' با) پر جو عماد کھنچ سکتا ہے اس کی مساوات ہے

$$\frac{لا - لا}{لا + ہ با + گ} = \frac{با - با}{ہ لا + با + ف}$$

۲۳۔ دائرہ کی مساوات کی سادہ سے سادہ شکل لا' با' = ف با' ہے اس مساوات پر
 اوپر کے عمل کرنے سے یا بلا واسطہ اوپر کی مساواتوں میں گ = ف = ج = لا
 رکھنے سے دائرہ لا' با' = ف کے نقطہ (لا' با) پر ماس کی مساوات لا' با' = ف
 حاصل ہوتی ہے اور اسی نقطہ میں سے گزرنے والے عماد کی مساوات $\frac{لا}{لا} = \frac{با}{با}$ ہے
 جسکی شکل سے ظاہر ہے کہ عماد مبدأ میں سے گزرتا ہے جو اس صورت میں دائرہ کا مرکز ہے

مشقیں

۲۴۔ دائرہ لا' با' = ف کے نقطہ (۱۲' ۵) پر عماد کی مساوات معلوم کرو۔

۲۴۔ دائرہ لا' + ما' - ۵ - لا' - ۲ + ما' = ۰ کے نقطہ (۲، ۵) پر عماد کی مساوات معلوم کرو۔

۱۷۔ ایک خط مستقیم اور ایک دائرہ کی مساواتیں معلوم ہیں ان کے نقاط تقاطع کے محدود معلوم کرو۔

ہمیں دونوں مساواتوں کو ایک ساتھ لا' ما کے لئے حل کرنا چاہئے

[حصہ اول دفعہ ۹]

مثال۔ خط ۷ - لا - ۱ - ۲۵ = ۰ اور دائرہ لا' + ما' = ۲۵ کے نقاط تقاطع کے محدود معلوم کرو۔

فرض کرو کہ (لا'، ما) مطلوبہ محدود ہیں

خط مستقیم کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے $۷ - لا - ۲۵ = ۰$

دائرہ کی مساوات میں اس کو مندرج کرنے سے

$$۲۵ = (۷ - لا - ۲۵) + ۲۵$$

جس سے $لا = ۳$ یا ۴ اور $ما = ۲$ یا ۳

اس لئے مطلوبہ محدود ہیں (۳، ۴) اور (۴، ۳)۔

۱۸۔ اگر دفعہ ۱۷ کے متوافق عمل کیا جائے تو مطلوبہ نقطہ لا کے لئے ایک مساوات

درجہ دوم حاصل ہوگی اس مساوات کی دو اصلیں ہوں گی اور ہر اصل کے جواب میں خط مستقیم کی مساوات سے ما کی ایک قیمت حاصل ہوگی۔

پس ایک خط مستقیم ایک دائرہ کہ دو نقطوں پر قطع کرتا ہے یہ نقطہ حقیقی ہونگے اگر مساوات درجہ دوم کی اصلیں حقیقی ہوں اور خیالی ہونگے اگر مساوات کی اصلیں خیالی ہوں اور موزائدہ صورت میں خط مستقیم بالتمام دائرہ کے باہر واقع ہوگا۔

اگر مساوات کی اصلیں مساوی ہوں تو خط مستقیم دائرہ کو ایسے دو نقطوں پر قطع کرے گا جو ایک دوسرے پر منطبق ہونگے یعنی اس صورت میں مذکورہ خط مستقیم ایک ایسے

وتر کی انتہائی صورت ہوگا جبکہ نقاط تقاطع ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں یعنی اس

حالت میں خط مستقیم دائرہ کا مماس ہوگا۔ اس لئے ایک خط مستقیم کے محیط دائرہ کو لمس کرنے کی شرط یہ ہے کہ لا یا ما کے لئے حل کرنے سے جو مساوات درجہ دوم حاصل ہو

اس کی اعلیٰ سادی ہوں۔
 خط مستقیم $ما = م لا + ب$ کے دائرہ $لا^۲ + ما^۲ = لا$ کو مس کرنے کیلئے
 جو شرط ضروری ہے اسے یاد رکھنا چاہئے
 لا کے لئے حل کرنے سے $لا^۲ + (م لا + ب)^۲ = لا$ یا $لا^۲ + (م + ۱)م + ۲م ب + ب^۲ = لا$
 اگر اس مساوات کی اعلیٰ برابر ہوں تو ضروری ہے کہ
 $(۱ + م) (ب - لا) = م ب$ یا $ب = لا (۱ + م)$ اس لئے
 خط مستقیم $ما = م لا + لا$ یا $لا + م + م$ کی تمام قیمتوں کے لئے دائرہ
 $لا^۲ + ما^۲ = لا$ کو مس کرتا ہے۔

مشقیں

۲۵۔ ثابت کرو کہ دائرہ $لا^۲ + ما^۲ = لا$ اور $(لا + ما) = لا$ کا دوسرا
 کرتا ہے تقاطع تاس معلوم کرو۔
 ان دائروں کی مساواتیں معلوم کرو جن کے مرکز مسد آپر ہوں اور جو خطوط ذیل کو
 بالترتیب مس کریں۔

۲۶۔ $ما = لا + لا^۲ + ۲$ اور $۲۴ - ۳ لا + ما^۲ = ۱۰$
 ۲۸۔ ثابت کرو کہ ذیل کے خطوط مستقیم اور دائرے ایک دوسرے کو مس
 کرتے ہیں ہر صورت میں نقاط تاس معلوم کرو۔

(ا) $لا^۲ + ما^۲ + لا + ما = ۰$ اور $لا + ما + ۲ = ۰$

(ب) $لا^۲ + ما^۲ = ۱۶$ اور $لا + ما = ۹$

۲۹۔ ثابت کرو کہ خط $ما = م لا + لا$ اور $\{ لا^۲ + (م + ۱)م + ۲م ب + ب^۲ = لا$ ہمیشہ دائرہ
 $لا^۲ + ما^۲ = لا$ کو مس کرتا ہے۔

۱۹۔ اس کے لئے کیا شرط ہے کہ خط مستقیم $لا + م + ما + ن = ۰$ دائرہ
 $لا^۲ + ما^۲ + رگ لا + ۲ن + ما + ج = ۰$ کو مس کرے۔

جو خطوط مستقیم مساویہ اور دائرہ کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں انکی مساوات ہے
 $ن (لا + ما) - ۲ن (لا + م + ما) + رگ (لا + ن + ما) + ج (لا + م + ما) = ۰ \dots (۱)$

اگر خط مستقیم دائرہ کو مس کرتا ہے تو یہ دائرہ کو ایسے تقاطع پر ملیگا جو ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہوں۔ اس صورت میں مساوات (۱) دو ایسے خطوط کو تعبیر کرتی ہے جو ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور اس کا دایاں رکن لازماً مربع کامل ہے۔ اس کے لئے ضروری شرط یہ ہے کہ

$$\begin{aligned} & (ج ل - ۲ گ ن ل + ن) (ج م - ۲ ف م ن + ن) \\ & = (ج ل م - گ م ن - ف ن ل) جو تحویل کے بعد ہو جاتی ہے \\ & ج (ل + م) + ن - (ف ل - گ ن) - ۲ ف م ن \\ & - ۲ گ ن ل = ۰ \end{aligned}$$

۲۰۔ نوٹ اوپر کی مساوات متشکل نہیں ہے اسے یاد رکھنے کی ضرورت نہیں صرف طریق عمل کا یاد رکھنا ضروری ہے۔ اس طریقہ کی مزید توضیح کے لئے طالب علم اسی طرح ثابت کرے کہ اگر خط مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ یعنی ل لا + م ما + ب با + گ گ + ۲ ف ف + ۲ م م + ج ج = ۰ کو مس کرتے تو اس کے لئے یہ شرط ضروری ہے

$$\begin{aligned} & (ب ج - ف ن) ل + (ج ل - گ ن) م + (گ م - ف ن) ن \\ & + ۲ (گ م - ف ن) م + ۲ (ف ن - ب گ) ن ل \end{aligned}$$

+ ۲ (ف ن - گ ج) ل م = ۰ (ج) مساوات (ج) متشکل ہے اور مساوات (ب) اس سے حاصل کی جاسکتی ہے اگر اس میں رکھا جائے ۱ = ا ب = ا ہ = ۰۔

مشقیں

۳۰۔ دائرہ لا ا ہ با + ۲ م م + ۲ ف ف کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو خورلا کے ساتھ ۵۴° کا (دخالت سمت ساعت) زاویہ بنائیں۔

۳۱۔ دائرہ لا ا ہ با + ۲ م م کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو ۳ لا + م ما کے متوازی ہوں۔

۳۲۔ دائرہ لا ا ہ با + ۲ م م کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو خورلا کے ساتھ بالترتیب زاویے (۱) ۹۰° (ب) ۹۵° (ج) مستقیم بنائیں۔

۳۳۔ دائرہ لا + ما = ج' اور خط لا + با = ا کے نقاط تقاطع کو سبدا سے جو خط ملاتے ہیں ان کی سہاواں میں سبدا درود۔

اگر یہ خطا اڑے تو سر کرے تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r}$

ہم ثابت کر دے کہ جو خطوط دو دائرہ $MA = MA'$ اور $LA = LA'$ کے درمیان میں ہیں ان کی مساوات کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملاتے ہیں ان کی مساوات

وَدَلَا مَلِكًا - تَمْرُكًا لَا فَا - بِ

۳۵۔ دو دائرے 'لا' + 'ما' = ۲۵ اور 'لا' + 'ما' + 'ما' = ۲۵ کے نقاط تقاطع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ دائرے ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

باب اول پر متفرق شالیں

۳۶۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقاط (۱) اور (۲) سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ ۲ ہر لمحے مساوی ہوتا ہے اس کا طریق معلوم کرو۔
۳۷۔ دو دائرے $۱۶ = r^2$ اور $9 = r^2$ کے نقاط تقاطع معلوم کرو۔ ان نقاط تقاطع پر دونوں دائروں کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ ہر نقطہ پر کے دو مماس متعام ہوں گے۔

۴۸۔ عام صورت میں ثابت کرو کہ دو اثر لانا اور لانا با آگ لانا۔
 عمل پائیدار ہے۔

۴۔ مساویہ دلاؤ لا + ما + م لڑا + م جیسا کہ = کے اُن مماثلات کی
مماثلتیں معلوم کرو جو لا + م + ما + م = کے لئے تنویری ہوں۔

۴۰۔ دائرہ لاکھ ۲۵ کے ان دو ماسوں کی سہاوا میں جنم کر جو مورتی کے ساتھ ۳۰ لاکھ فرادہ بنائیں۔

۴۱۔ اسی طریقہ سے ثابت کر دو کہ عدد کی تمام قیمتوں کے لئے خط مستقیم

(شعبہ اول - شعبہ دوم) = حجم عدد + اوٹاؤرہ ڈیڑھ = ۲۰ درجہ حرارت + دیکھو : کوئی مسئلہ نہیں ہے۔

۲۰۔ حواشیہ رقم ۲۵ اور ۲۶ کے مطابق نقطہ تقاطع معلوم کرو ثابت کرو کہ یہ نقطہ مساوی کے ساتھ مگر ایک مثلث مساوی الاضلاع بناتے ہیں۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا + ما = ڈ کے دو نقاط (لا، ما) اور (لا، ما) کے درمیانی فاصلہ کا مربع ۲ (ڈ - لا - لا) - (ما - ما) ہے۔

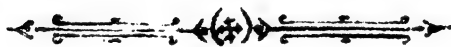
۳۴۔ ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو ایسے نقاط پر قطع کرتا ہے جن کے فاصلے محیط کے ایک نقطہ (لا، ما) کے مساوی ہیں اور ڈ کے برابر ہیں ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کی مساوات لا + لا + ما + ما - ڈ = ۰ ہے۔ اس نتیجہ کو استعمال کرنے سے (لا، ما) پر کے محاس کی مساوات معلوم کرو۔

۳۵۔ مائل محوروں کے لحاظ سے ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو جنہاں میں سے گزرے اور محوروں پر نقطوں ف، ق کاٹے۔

۳۶۔ اگر خط مستقیم لا + ب + ما = ڈ دائرہ ر = ک جم ط کو مس کرے تو اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے۔

۳۷۔ جو دائرہ نقاط (ا، ب)، (ز، ع)، (ب، ب) میں سے گذرتا ہے اس کے نصف قطر کا طول معلوم کرو۔

۳۸۔ ایک دائرہ کی مساوات سے ثابت کرو کہ جو زاوے ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہوں وہ مساوی ہوتے ہیں۔



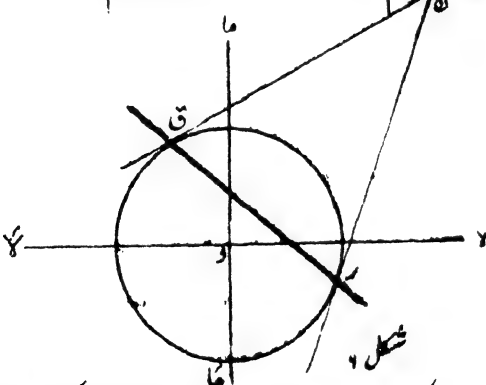
باب دوم

دائرہ مسل

۲۱۔ ایک دائرہ ہوئے بیرونی نقطہ سے ایک دائرہ کے پاس کھینچے گئے ہیں ان کے وتر تمام کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ بیرونی نقطہ A ہے اور دائرہ کے پاس C Q N نقطہ سے کھینچے گئے ہیں۔

عمل کے اختصار کی خاطر ہم دائرہ کی مساوات بلحاظ قائم محوروں کے لیتے ہیں جیسے مرکز O ہے۔



فرض کرو کہ N کے محدد (A, M) ہیں اور Q کے بائیں (A, K) دیا امر مشاہدہ طلب ہے کہ Q اور R کے محدد آخری نتیجہ میں داخل نہیں ہونگے

Q پر کے پاس C N کی مساوات ہے $لا = ماک + لا$

اسی طرح R N کی مساوات ہے $لا = ماک + لا$

چونکہ یہ دونوں خط (A, M) میں سے گزرتے ہیں اس لئے

$لا = ماک + لا$ اور $لا = ماک + لا$

اس لئے محدودوں کے دو جوڑے (ھ'ک) اور (ھ'ک) مساوات لا لاہا = لا کو پورا کرتے ہیں یعنی نقاط قی اور ر دونوں خط مستقیم

لا لاہا + ما با = لا (۱) کی صورت پر واقع ہوتے ہیں اور اس لئے یہ قی ر کی مساوات ہے۔

جب ن دائرہ کے اندر واقع ہوتوں سے دائرہ کے ماس نہیں کھینچ سکتے اس لئے ہمیں اس صورت میں مساوات (۱) کی نئی ہندسی تعبیر معلوم کرنی چاہئے۔

(۱) اگر وتر ماس قی ر ایک ثابت نقطہ (ھ'ک) میں سے گذرنا ہو جہاں یہ ثابت نقطہ دائرہ کے اندر واقع ہے یا باہر تو محدود (ھ'ک) مساوات (۱) کو پورا کریں گے اور اس لئے لا ھ + ہا ک = لا جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ن ایک ایسے ثابت خط مستقیم پر واقع ہے جسکی مساوات لا ھ + ہا ک = لا ہے۔ اس سے ہم مساوات لا ھ + ہا ک = لا کی ہندسی تعبیر حاصل ہوتی ہے جو نقطہ (ھ'ک) کے مقام پر منحصر نہیں کیونکہ اس صورت میں یہ نقطہ دائرہ کے باہر سے کہیں اندر یا باہر واقع ہو سکتا ہے پس یہ معلوم ہوگا کہ اگر ایک ثابت نقطہ میں سے دائرہ کے وتر کھینچے جائیں تو ان میں سے ہر ایک کے سروں پر جو ماسوں کا جوڑا کھینچ سکتا ہے ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔ اس خط مستقیم کو ثابت نقطہ کا قطبی کہتے ہیں اور مساوات لا ھ + ہا ک = لا نقطہ (ھ'ک) کے قطبی کو بلحاظ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = لا کے تعبیر کرتی ہے ایک بیرونی نقطہ کا قطبی وہ وتر ہے جو اس نقطہ میں سے گذر کر نیوالے ماسات کے نقاط ماس کو ملاتا ہے۔

(۲) نیز مشاہدہ ہو کہ اگر ن (لا'م) ثابت خط مستقیم لا ھ + ہا ک = لا پر واقع ہو (اور خواہ یہ خط دائرہ کو حقیقی نقاط پر کاٹے یا نہ کاٹے) تو لا ھ + ہا ک = لا جس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط مستقیم قی ر جس کی مساوات لا لاہا + ما با = لا ہے ثابت نقطہ (ھ'ک) میں سے گذرنا ہے۔ اس لئے اگر ایک ثابت خط مستقیم پر کے نقاط سے دائرہ کے ماس کھینچے جائیں تو ایسے ہر ایک جوڑے کے نقاط ماس کو ملانے والا وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے گا۔ اس نقطہ کو معلوم خط مستقیم کا قطب کہتے ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ خط مستقیم لا ھ + ہا ک = لا کے قطب کے محدود بلحاظ دائرہ

لا^۱ + ما^۱ = لا^۲ کے (دھک) ہیں۔ اگر ایک خط مستقیم دائرہ کو حقیقی نقاط پر کاٹتا ہو اور ان نقطوں پر دائرہ کے مماس کھینچے جائیں تو ان مماسات کا نقطہ تقاطع خط منفرض کا قطب ہوگا۔

(۳) خط مستقیم لا^۱ دھ + ما^۱ = لا^۲ کا قطب بلحاظ دائرہ لا^۱ + ما^۱ = لا^۲ کے نقطہ (دھک) ہے اس لئے خط مستقیم لا^۱ جم + ما^۱ جب ع = ع کا قطب نقطہ

(لا^۱ جم + لا^۲ جب ع) ہوگا۔ اگر ن قطب ہو قی ر قطبی و مرکز تو ظاہر

ہے کہ اُس عمود کی سمت جو سے قی ر بڑھلا جائے و ن ہوگی اگر و ن قی ر کو ن پر قطع کرے تو و ن = ع کیونکہ و ن عمود ہے مبد ا سے خط مستقیم لا^۱ جم + ما^۱ جب ع = ع پر۔

نیز و ن = $\sqrt{\left(\frac{لا^۱ جم}{ع}\right)^2 + \left(\frac{لا^۲ جب}{ع}\right)^2}$ اور اسلئے و ن x و ن = لا^۱

اگر ن دائرہ کے باہر واقع ہو تو یہ نتیجہ ہندی طریق پر حسب ذیل حاصل ہو سکتا ہے فرض کر کے ن سے مماس ن قی کھینچا گیا ہے تب و ن قی اور و ن قی ن متشابہ قائم الزاویہ مثلث ہیں اور اس لئے و ن : و قی = و قی : و ن

مثال و ن دائرہ کو لا اور ب پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ

$$\frac{لا}{و ن} = \frac{لا}{و ب} + \frac{لا}{و ن}$$

مشقیں

۱۔ نقاط ذیل کے قلیوں کی مساواتیں بلحاظ دائرہ لا^۱ + ما^۱ = لا^۲ کے لکھو

(۱) (۲۱-۲۵) (ب) (۱۳-۱۴) (ج) (۱۰-۱۱)

۲۔ بلحاظ دائرہ لا^۱ + ما^۱ = لا^۲ کے ذیل کے خطوط کے قطب معلوم کرو

(۱) لا - ما = ۲ (ب) لا - ما = ۱۴ (ج) لا = ۳

۳۔ خط مستقیم لا^۱ جم + ما^۱ = لا^۲ کا قطب بلحاظ دائرہ لا^۱ + ما^۱ = لا^۲ کے معلوم کرو۔

۲۲۔ اگر ن کا قطبی ت میں سے گذرتا ہو تو ثابت کرو کہ ت کا قطبی ن میں سے گذرتا ہے
فرض کرو کہ ن کے محدود (لا، با) ہیں اور ت کے (لا، با) نیز دائرہ
کی مساوات لا + ما = لڑ ہے۔

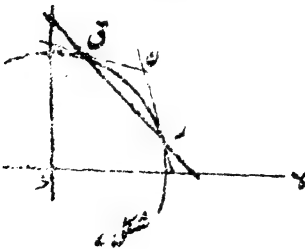
ن کے قطبی کی مساوات لا لڑ + ما ما = لڑ ہے چونکہ نقطہ (لا، با) اس خط پر
واقع ہے اس لئے لا لڑ + با با = لڑ
اس لئے نقطہ (لا، با) خط لا لڑ + ما با = لڑ پر واقع ہے یعنی ن، ت کے
قطبی پر واقع ہوتا ہے۔

۲۳۔ قطبی کی عام مساوات۔ اوپر کے عمل میں ہم نے دائرہ کی مساوات سادہ سے
سادہ شکل میں لی ہے تاکہ طالب علم کی توجہ اصل مقصد سے منحرف نہ ہو اور
کے عمل سے معلوم ہوگا کہ نقطہ (لا، با) اور خط مستقیم

لا (لا، با) گ + ما (لا، با) ت + گ لا + با + ت با + ج = .
بلحاظ دائرہ لا + ما + گ لا + ت با + ج = . کے بالترتیب
ایک دوسرے کے قطب اور قطبی ہیں۔

نوٹ۔ طالب علم غور سے دیکھے کہ قطبی کی مساوات بعینہ اسی شکل کی ہے جس
شکل کی کہ تماس کی مساوات ہے اس لئے ایسے الگ یاد رکھنے کی ضرورت
نہیں۔ ان دو خطوط میں ضروری فرق یہ ہے کہ تماس کی صورت میں نقطہ (لا، با)
منحنی پر واقع ہوتا ہے لیکن قطبی کی صورت میں اسکے مقام پر ایسی کوئی قیہ نہیں۔

البتہ یہ ظاہر ہے کہ جب ایک نقطہ منحنی پر واقع ہو تو اس کا قطبی وہی ہے جو اس کا تماس ہے۔
نیز یہ امر ہندسی تخلیقات کی بنا پر بھی



ظاہر ہے کیونکہ جیسے بیرونی نقطہ ن
منحنی کے قریب آتا جاتا ہے ویسے نقاط
تماس ق اور لہ ایک دوسرے کے
تدريج قریب آتے جاتے ہیں اور جب
نقطہ ن منحنی پر واقع ہوتا ہے تو بالآخر

ق اور لہ کو ملانے والا خط منحنی کا تماس ہو جاتا ہے پس معلوم ہوا کہ تماس قطبی کی

اسی طرح سے دہمتی نیم قطر کی وہ قیمت ہے جس کے لئے محمد (رجم ط' رجب ط) مساوات گ لا + ف ما + ج = کو پورا کرتے ہیں یعنی د' کی وہ قیمت ہے جس کے لئے ر (گ جم ط + ف جب ط) + ج =
 اس لئے $\frac{1}{د} = \frac{گ جم ط + ف جب ط}{ج}$

$$\text{اس لئے } \frac{1}{د} = \frac{1}{پ} + \frac{1}{و} \text{ یا } \frac{1}{د} = \frac{1}{و} + \frac{1}{ب} = \frac{2}{و}$$

اس ضروری نتیجہ کو بالعموم اس طرح بیان کرتے ہیں کہ ایک نقطہ معلومہ دہمتی سے گزرنیوالے خط مستقیم کو ایک دائرہ اور (بلحاظ اس دائرہ کے) نقطہ و کا قطبی موسیقی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۲۵۔ ایک نقطہ معلومہ میں سے ایک دائرہ کے ماس کھینچے گئے ہیں ان کے طول معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ معلومہ ن (لا، ما) ہے اور دائرہ کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ \text{ ہے۔}$$

اگر نقطہ ن میں سے ایک خط مستقیم ن ل ب محور لا سے زاویہ ط بنا کر کھینچا جائے اور یہ دائرہ کو ل اور ب پر کاٹے تو (حصہ اول دفعہ) اب نتیجہ صحیح کی رو سے ن ل اور ن ب دہمتی نیم قطر کی وہ قیمتیں ہونگی جن کے لئے محمد (لا + رجم ط، ما + رجب ط) دائرہ کی مساوات کو پورا کرتے ہیں یعنی ن ل ن ب مساوات

$$\begin{aligned} & (لا + رجم ط)^۲ + (ما + رجب ط)^۲ + ۲ گ (لا + رجم ط) + ۲ ف (ما + رجب ط) + ج = ۰ \\ & \text{یا } ۲ ل ر (لا + گ) + جم ط + (ما + ف) جب ط + لا^۲ + ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ \\ & (ل) \dots \dots \dots \end{aligned}$$

میں رکی قیمتیں ہیں۔

اس لئے ن ل \times ن ب = لا^۲ + ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج (ج) جس سے ظاہر ہے کہ یہ حاصل ضرب ن میں سے گزرنیوالے وتر کی

سمت پر منحصر نہیں۔ (مقابلہ کرو اقلیدس م ۳ شش ۳۶)

جب ن میں سے گزرنیوالا خط مستقیم دائرہ کو سس کرے تو ل اور ب ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اور ن ل ن ب میں سے ہر ایک اس ماس کے مساوی ہوگا جو ن سے دائرہ تک کھینچا گیا ہو۔

اس لئے ماس کے طول کا مربع ہے

$$ل^۲ + م^۲ + ۲ ل م = ۲ ف^۲ + م^۲ + ج^۲ \dots\dots\dots (۲)$$

اور ظاہر ہے کہ نتیجہ ن کے مجددوں کو دائرہ کی مساوات کے بائیں طرف میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے (یاد رہے کہ مجدد مندرج کرنے سے قبل ل اور م میں سے ہر ایک کا سر ایک ہونا چاہئے)

اجملہ ل^۲ + م^۲ + ۲ ل م = ۲ ف^۲ + م^۲ + ج^۲ اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$(ل + م + گ) + (م + ف) - (گ + ف) = ج$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ماس کا مربع = نقطہ معلوم اور مرکز دائرہ کے درمیانی فاصلہ کا مربع۔ دائرہ کے نصف قطر کا مربع

نوٹ اس طریقہ کو پورے طور پر ذہن نشین کرنے کی غرض سے غالب علم کو چاہئے کہ ذیل کے منحنی کی صورت میں جو عام مساوات

$$ل^۲ + م^۲ + ۲ ل م + ۲ ب م + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰$$

متعین ہوتا ہے ایسا ہی عمل کرے جو اوپر کیا گیا ہے۔

اگر نقطہ ن (ل، م) میں سے وترن ل ب ن ل ب کھینچے جائیں جو محور ل سے زاویہ ط اور ط بنائیں اور منحنی سے ل ب اور ل ب پر لیں تو معلوم ہوگا

$$ل^۲ + م^۲ + ۲ ل م + ۲ ب م + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰$$

$$ل^۲ + م^۲ + ۲ ل م + ۲ ب م + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰$$

$$ل^۲ + م^۲ + ۲ ل م + ۲ ب م + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰$$

$$ل^۲ + م^۲ + ۲ ل م + ۲ ب م + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰$$

ن (لا، ما) کے مقام پر منحصر نہیں۔ [دیکھو دفعہ ۱۳۲]
 اگر نقطہ ن دائرہ کے اندر ہو تو جملہ لا + ما + گ لا + ف + ما + ج
 منفی ہوگا کیونکہ اس صورت میں ن لا اور ن ب کی علامتیں مختلف ہیں
 اور طولوں لا ن اور ن ب کی سطح کو تعبیر کریگا جس کے پہلے منفی علامت
 ثبت کرنی چاہئے۔

مشقیں

۴۔ اُن مساوات کا طول معلوم کرو جو (۱) نقطہ (۳، ۶) سے دائرہ لا + ما = ۲
 تک (ب) مبدأ سے دائرہ (لا - ۱) + (ما - ۲) = ۲ تک اور (ج) نقطہ
 (۳، ۲) سے دائرہ لا + ما = ۲ - ۵ - لا - ما = ۶ تک کھینچے جائیں۔
 ۵۔ اگر ایک نقطہ سے دو ہم مرکز دائروں کے تماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ
 اُن کے مربعوں کا فرق نقطہ مذکورہ کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔
 ۶۔ دائرہ کی صورت میں متوازی دتروں کا ایک نظام دیا گیا ہے اِن دتروں
 کے نقاط تنصیف کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ وتر محور لا سے زاویہ طہ بناتے ہیں اور دائرہ کی مساوات ہے
 لا + ما + گ لا + ف + ما + ج = ۰ (۱)
 فرض کرو کہ کسی ایک وتر کا وسطی نقطہ (لا، ما) ہے تب رکنی وہ دو قیمتیں
 جن کے لئے کہ محد (لا + رجم طہ، ما + رجب طہ) مساوات (۱) کو پورا کرتے
 ہیں مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونی چاہئیں کیونکہ وتر کے
 دونوں مساوی حصے نقطہ (لا، ما) سے متقابل سمتوں میں کھینچے گئے ہیں۔
 اس لئے مساوات (۱) دفعہ ۲۵ میں اصلوں کا مجموعہ صفر ہونا چاہئے یعنی
 (لا + گ) + (جم طہ + (ما + ف) جب طہ = ۰

اس لئے مطلوبہ طریق خط امتیاق

(لا + گ) + (جم طہ + (ما + ف) جب طہ = ۰ (۳)
 ہے جو مرکز (گ - ف) میں سے گزرتا ہے نیز ظاہر ہے کہ یہ خط متوازی

دائرہ پر عمود ہے کیونکہ اگر مبداء میں سے خط (۳) پر عمود نکالا جائے تو یہ محور لا سے زاویہ طہ بنائے گا (مقابلہ کرد اقلیدس م ۳ شش ۳ کے ساتھ)

مشق

۸۔ دائرہ لا، ما = ۱۳ کے ایسے دائروں کے وسطی نقاط کا طریق معلوم کر دو جو
 ۱۲ لا + ۲ ما - ۵ = ۰ کے متوازی ہوں۔

۲۷۔ دو دائروں لا + ۲ ما + ۲ گ - لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰ اور لا + ۲ ما + ۲ گ - لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰ کے وتر مشترک کی مساوات معلوم کرو۔

مساوات لا، ما + ۲ گ - لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰ (لا + ما + ۲ گ - لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰) ذیل کی مساوات میں تحویل ہوتی ہے

۲ (گ - ف) (لا + ۲) (ف - ج) (ما + ج) = ۰ (۲)۔
 یہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے نیز لا، ما کی ایسی تمام قیمتیں اُسکو پورا کرتی ہیں جو دونوں دائروں کی مساواتوں کو پورا کریں اس لئے مساوات (۲) ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو دائروں کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے یعنی (۲) وتر مشترک کی مساوات ہے جب دائرے ایک دوسرے کو حقیقی نقاط پر نہ قطع کریں تو اس صورت میں بھی (۲) کسی خط مستقیم کو تعبیر کرے دفعہ ۲۹ میں ہم اس خط مستقیم کی ہندی تعبیر معلوم کریں گے۔

۲۸ بنیادی محور تعریف دو دائروں کا بنیادی محور ایسے نقطوں کا طریق ہے جن سے اگر ان دائروں کے تماس کھینچے جائیں تو یہ تماس باہم مساوی ہوں۔

۲۹۔ دو دائروں کے بنیادی محور کی مساوات معلوم کرو۔
 اگر نقطہ لا، ما بنیادی محور پر واقع ہو اور دائروں کی مساواتیں حسب بالا ہوں تو دفعہ ۲۵ کی رو سے

لا + ۲ ما + ۲ گ - لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰ لا + ۲ ما + ۲ گ - لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰
 یا ۲ (گ - ف) (لا + ۲) (ف - ج) (ما + ج) = ۰
 اس سے ان دو دائروں کے بنیادی محور کی مساوات ہے

۲ (گ-گ) لا + ۲ (ف-ف) ما + (ج-ج) = (۵)
 اس سے معلوم ہوتا ہے کہ دفعہ ۲ کی مساوات (۴) دو دائروں کے بنیادی
 محور کی مساوات ہے اور یہ تعبیر ہندسی نقطہ نظر سے کچھ معنی رکھتی ہے خواہ دائرہ
 ایک دوسرے کو حقیقی نقاط پر قطع کریں یا نہ کریں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ وتر مشترک کی مساوات وہی ہے جو بنیادی محور کی اس سے معلوم
 ہوتا ہے کہ دو متقاطع دائروں کا بنیادی محور ان کا وتر مشترک ہوتا ہے یا با الفاظ
 دیگر اگر ان دائروں کے وتر مشترک کے کسی نقطہ سے دائروں کے تماس کیپٹے
 جائیں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔ ہندسی طریق پر یہ اقلیدس ص ۳۶ میں
 ظاہر ہے۔ بالخصوص یاد رہے کہ وتر مشترک مشترک تماسوں کی تنصیف کرتا ہے۔
 یہ بھی ملاحظہ ہو کہ جو خط مرکزوں (گ-گ) اور (ف-ف) کو ملاتا
 ہے اس کی مساوات ہے

$$\frac{لا + گ}{گ - گ} = \frac{ما + ف}{ف - ف}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ بنیادی محور مرکزوں کے ملانے والے خط پر عمود ہے
 ۳۰۔ مختصر طریق کتابت میں (دیکھو حصہ اول دفعہ ۲) اگر میں اور میں با ترتیب
 جملات لا + ما + گ لا + ۲ ف + ما + ج اور لا + ما + گ لا + ۲ ف + ما + ج کو
 تعبیر کریں تو دائروں میں = اور میں = کے بنیادی محور کی مساوات اس طرح
 لکھی جاسکتی ہے میں = میں = ؛ لیکن بخوبی یاد رہے کہ اس اختصار میں یہ تسلیم
 کر لیا گیا ہے کہ دائرہ کی مساوات میں سب یقین بائیں جانب منتقل کر دی گئی
 ہیں اور مختصر طریق کتابت اختیار کرنے سے قبل لا اور ما کے سروں کو ایک کے
 مساوی بنایا گیا ہے۔

۳۱۔ ان سب دائروں کی عام مساوات جن کا بنیادی محور وہی ہو جو دو معلومہ دائروں کا ہے
 ان سب دائروں کی عام مساوات جو ایک ہی مشترک بنیادی محور رکھتے ہوں میں = میں =،
 ہوگی جہاں میں = اور میں = نظام دائرہ کے کسی دو دائروں کی مساواتیں ہیں۔
 کیونکہ میں = اور میں = کا بنیادی محور میں = میں = ہے اور چونکہ جملہ

سے + لے میں لے کا سراب لے ہے اس لئے س = . اور س + لے س = . کا بنیادی محور
 س = س + لے س = . یا س = س = . سے [دیکھو یا دداشت دفعہ بالا]
 یعنی س = لے + لے اور س + لے س = . کا بنیادی محور وہی ہے جو دو معلومہ دائروں کا ہے۔
 اب مساوات س + لے س = . کسی ایسے نقطہ کے محدودوں سے پوری
 ہوتی ہے جو دونوں مساواتوں س = . اور س = . کو پورا کرتے ہیں۔
 اسلئے اگر دائر س = . اور س = . کے نقاط تقاطع حقیقی ہوں تو تمام
 دائرے حقیقی نقاط کے ایک ہی جوڑے میں سے گزرینگے۔

جب س = . اور س = . حقیقی نقاط پر ایک دوسرے کو قطع نہ کریں تو
 اُس صورت میں بھی انکی مساواتوں کو ایک ساتھ حل کرنے سے ہیں لے کی دو خیالی
 قیمتیں اور اُن کے جواب میں ما کی دو خیالی قیمتیں مل سکتی ہیں اور انہیں ہم دویسے
 خیالی نقاط کے محدود تصور کر سکتے ہیں جو مساواتوں س = . اور س = . اور
 اس لئے س + لے س = . کو پورا کر رہے ہیں۔ اس لئے اس صورت میں
 اگرچہ ہم ان نقاط کو شکل میں نہیں دکھا سکتے تاہم ہم یہ خیال کرتے ہیں کہ نظام
 مذکور کے تمام دائرے اُن دو خیالی نقاط میں سے گزر رہے ہیں جو س = . اور س = .
 کے نقاط تقاطع ہیں۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ اُن سب دائروں کے مرکز جو ایک ہی مشترک محور
 رکھتے ہوں یا بالفاظ دیگر ہم محور دائروں کے ایک نظام کے سب مرکز ایک ہی خط
 میں واقع ہوتے ہیں کیونکہ کسی دو مرکزوں کو ملانے والا خط مشترک بنیادی محور پر عمود ہوتا ہے۔

۳۲۔ تین دائروں کے تین بنیادی محور جبکہ

دو دو دائروں کو الگ الگ لیا جائے

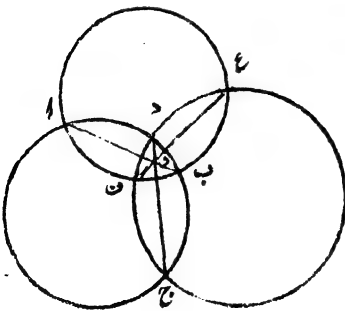
ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ دائروں کی مساواتیں

مختصر طریق کتابت کے موافق

س = ؛ س = ؛ س = ہیں

بنیادی محوروں کی مساواتیں ہیں



شکل ۹

سے - س =
سے - س =
سے - س =

چونکہ جب ان مساواتوں کے دائیں طرف کے رکنوں کو اکٹھا جمع کیا جاتا ہے تو یہ متطابقاً صفر ہوتے ہیں اس لئے ثابت ہوا کہ تینوں بنیادی محور ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں [حصہ اول دفعہ ۲۳]
اس نقطہ کو ان تین دائروں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔

مشقیں

۹۔ دائروں $لا + ما - م + لا - م - ا = ۱$ اور $لا + ما + م - لا - م - ا = ۱$ کے وتر مشترک کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ دائروں $لا + ما + م = ۱$ اور $لا + ما + م - لا - م - ا = ۲$ کے مشترک بنیادی محور ایک ہی ہے اسے معلوم کرو۔

۱۱۔ دائروں $لا + ما + م + لا + م + م + م = ۰$ اور $لا + م + م - لا + م + م + م = ۲۵$ کے بنیادی محور کی مساوات معلوم کرو۔

۱۲۔ دائروں $لا + ما + م + لا + م + م = ۷$ اور $لا + ما + م - لا + م + م = ۵$ کا بنیادی محور معلوم کرو اور دکھاؤ کہ یہ دائروں کے مرکزوں کو ملانے والے خط پر غلی نقطہ واقع ہے۔

۱۳۔ دائروں $لا + ما - م - لا - م + م - لا - م + م = ۰$ اور $لا + ما + م - لا - م + م - لا - م + م = ۰$ کے بنیادی مرکز معلوم کرو۔

۳۳۔ انتہائی نقطے۔ مساوات $س + ل = ۰$ میں $ل$ کو مناسب قیمت دینے سے ہم دائرہ $س + ل = ۰$ کے نصف قطر کو صفر بنا سکتے ہیں اور اس طرح دائروں کے ہم محور نظام کا ایک نقطہ دائرہ حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ جس مساوات سے $ل$ کی مطلوبہ قیمت یا قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

وہ مساوات درجہ دوم ہے اس لئے معلوم ہوا کہ دائروں کے کسی ہم محور نظام میں دو نقطے دائرے (حقیقی یا خیالی) ہوتے ہیں جو باقی دائروں کی طرح اس نظام کے رکن ہیں۔ ان کو نظام مذکور کے ”انتہائی نقطے“ کہتے ہیں۔

ثابت کرو کہ دائروں کے ایک ہم محور نظام کے انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں جب دائرے حقیقی تقاطع پر ایک دوسرے کو قطع کریں اور حقیقی ہوتے ہیں جب دائرے خیالی نقاط پر قطع کریں۔

ہندسی نقطہ نظر سے پہلا حصہ عیاں ہے کیونکہ کوئی نقطہ دائرہ دو ایسے نقطوں میں سے نہیں گذر سکتا جو ایک دوسرے سے محدود فاصلہ پر واقع ہوں۔

مگر دونوں حصے تجلیلی طریق پر اس طرح ثابت ہو سکتے ہیں۔ دائروں کے مرکزوں کو ملانے والے خط کو محور لا مقدر کرو اور بنیادی محور کو محور مسا (اگر اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے ہم دائرہ کی تمام مساوات میں تو ہم دیکھیں گے کہ عمل طولانی اور پریشان کن ہوگا)

فرض کرو کہ نظام کے ایک دائرہ کا مرکز (۱) ہے اور نصف قطر ۱ اس دائرہ کی مساوات ہوگی (۱-۱) = ۱ - ۱ = ۰ (۱)

بنیادی محور کی مساوات ہے ۰ = ۱ - ۱ (۱) اور (ب) کے نقاط تقاطع حقیقی یا خیالی نظام دو دائرہ کا ہر ایک دائرہ (۱) اور (ب) کے نقاط تقاطع حقیقی یا خیالی میں سے گذرتا ہے اس لئے اس نظام کے کسی دائرہ کی مساوات اس شکل کی ہونی چاہئے

(۱-۱) = ۱ - ۱ = ۰ (۱) + ۱ - ۱ = ۰ (۱) (ج)

یا (۱-۱) = ۱ - ۱ = ۰ (۱) + ۱ - ۱ = ۰ (۱) اگر اس دائرہ کا نصف قطر صفر ہو تو

(۱-۱) = ۱ - ۱ = ۰ (۱) - ۱ = ۰ (۱)

یا (۱-۱) = ۱ - ۱ = ۰ (۱) - ۱ = ۰ (۱) (د)

مساوات (د) میں ۱ کی قیمتیں حقیقی یا خیالی ہوں گی اگر ۱ با تسریب بڑا ہو یا چھوٹا ہو اسے بعضی اگر دائرہ (۱) کے مرکز کا فاصلہ بڑا ہو یا چھوٹا ہو دائرہ کے نصف قطر سے

یعنی اگر یہ دائرہ اور بنیادی محور ایک دوسرے کو خیالی یا حقیقی نقاط پر قطع کریں اس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

انتہائی نقاط کی مساداتیں ہیں $\{ (لا + \frac{1}{2}) - (د - ۲) \} + ما = ۰$ ۔
 یعنی $لا = \frac{1}{2} - (د - ۲) + ما = ۰$ ۔ (ہر ایک مربع الگ الگ ضرب
 کے مساوی ہوگا کیونکہ ایک حقیقی مقدار کا مربع منفی نہیں ہو سکتا) جہاں مساوات (د)
 سے معلوم ہوگا۔

اسلئے انتہائی نقاط کے محدد (۷ھ - ۲) (۰) اور (۷ھ - ۲) (۰) ہیں۔

مشق

۱۲۔ ہم محور دائروں کے نظام $لا + ما + لہ - لا - ۵ - ۱۶ = ۰$ کے انتہائی
 نقاط معلوم کرو۔

۳۔ نقطہ (لا، ما) سے دائرہ $لا + ما + ۲گ - لا + ۲ف + ما + ج = ۰$
 کے دو مماس کھینچ سکتے ہیں ان کی مسادات معلوم
 کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ کے محدد (لا، ما) ہیں اور اس نقطہ سے دائرہ کے مماس
 ع ق اور ع ر کھینچے گئے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ اس جملہ $لا + ما + ۲گ - لا + ۲ف + ما + ج$ کو اور
 اس جملہ $لا + ما + ۲گ - لا + ۲ف + ما + ج$ کو اور م جملہ
 $لا + لا + ما + ۲گ - لا + لا + ف + ف + (ما + ما) + ج$ کو تعبیر کرتا ہے
 مساوات کس سے۔ م دل $لا + ف + ما + ص$ جہاں ک ایک مستقل
 مقدار ہے ایک ایسے نمئی کو تعبیر کرتی ہے جس کی مساوات درجہ دوم کی ہے اور جو
 ان چار نقطوں میں سے گذرتا ہے جن پر خطوط $۰ =$ اور $لا + ف + ما + ص = ۰$
 دائرہ $۰ =$ کو قطع کرتے ہیں۔

۱۔ م =۔ ان مساوات کے وتر تاس ق کی مساوات ہے جو نقطہ
 ع سے بھیجے جائیں فرض کرو کہ ل لا + ف + ما + ص = حرکت کرتے کرتے

بالآخر م = ۰ منطبق ہو جاتا ہے۔

اس صورت میں ک س - م = ۰ ایک ایسے منحنی کو تعبیر کرتی ہے جس کی مساوات درجہ دوم کی ہے اور جو دائرہ کے نقطہ قی پر منطبق ہونے والے نقاط میں سے نیز نقطہ ر پر کے منطبق ہونے والے نقاط میں سے گذرتا ہے یعنی معلوم ہوا کہ منحنی ایسا ہے کہ مساوات ع ق اور ع ر اُس کو قی اور ر پر مس کرتے ہیں۔

اب خطوط مستقیم ع ق، ع ر کا جوڑا خود ایک ایسا منحنی ہے جو ان شرائط کو پورا کرتا ہے اس لئے یہ نظام ک س - م = ۰ کا ایک رکن ہے جو ک کو ایک خاص قیمت دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ اب ک کی قیمت مطلوبہ وہ ہوگی جو منحنی ک س - م = ۰ کو نقطہ (لا، ما) میں سے گذار سکے کیونکہ اس صورت میں خط ع ق منحنی س = ۰ کو تین نقطوں پر کاٹے گا (نقطہ ع پر اور دو منطبقہ نقاط پر) اور اس طرح ع ر بھی تین نقطوں پر اسے قطع کرے گا لیکن درجہ دوم کا منحنی ایسا نہیں کر سکتا جب تک کہ یہ خطوط مستقیم کے ایک جوڑے (ع ق اور ع ر) پر مشتمل نہ ہو۔

اس لئے ک کی مطلوبہ قیمت مساوات ک س - م = ۰ میں (لا، ما) کی بجائے (لا، با) مندرجہ کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اس اندراج کے بعد س اور م دونوں بالترتیب س ہو جاتے ہیں

∴ ک س - س = ۰ یا ک = س

اس لئے نقطہ (لا، با) سے مساوات کا جو جوڑا نکلیں سکتا ہے ابکی مساوات ہے

س س - م = ۰ (۶)

طالب علم پر واضح ہو کہ اوپر کا اسٹہ لال خاص اہمیت رکھتا ہے وہ اس پر پورا عبور حاصل کر لے۔ ک کی قیمت اس شرط (حصہ اول دفعہ ۳۲) کو استعمال کرنے سے بھی حاصل ہو سکتی ہے کہ مساوات ک س - م = ۰ دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے لیکن اس صورت میں حسابات طولانی اور تکلیف دہ ہونگے۔

۳۔ مسئلہ بالا کی اہمیت کے لحاظ سے اس کا ایک اور حل یہاں دیا جائیگا۔ اُس نقطہ کے بعد جو (لا، با) اور (لا، با) کے ملانے والے خط کو نسبت

$$(لا + ما - ل) (لا + با - ل) - (لا + لا + ما با - ل) =$$

$$۱۶ - \text{نقطہ } (۵، ۵) \text{ سے دائرہ } لا + ما - ل = ۶ - لا - ۶ + ۱۴ =$$

کے جو دو ماس کھینچ سکتے ہیں انکی مسادات معلوم کرو۔

۳۶۔ محدودوں کو ایک متبدل کی رقوم میں بیان کرنا۔

اگر محور قائم ہوں تو دائرہ لا + ما = لا کے محیط پر کے کسی نقطہ کے محدود

(لاجم عہ) (اجب عہ) سے تعبیر ہو سکتے ہیں جہاں عہ وہ زاویہ ہے جو نقطہ مذکورہ میں

سے گزرنیوالا نصف قطر محور لا سے بناتا ہے۔ اگر محدودوں کو ایک مہول مقدمہ

کی رقوم میں اسطرح بیان کر لیا جائے تو بعض اوقات وہ مساداتیں جن سے

ہمیں بالعموم سابقہ پڑتا ہے نہایت سادہ اور مختصر صورت میں لائی جاسکتی ہیں۔

بالمخصوص نقطہ (لاجم عہ) (اجب عہ) پر جسے ہم آئندہ ”نقطہ عہ“ کہیں گے

ماس کی مسادات ہے

$$\text{لاجم عہ} + \text{ماجب عہ} = \text{لا}$$

مشقیں

۱۷۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا + ما = لا کے نقطہ عہ پر کے عماد کی مسادات ما = لا ماس

۱۸۔ ثابت کرو کہ نقاط عہ اور بہ کو لانے والے وتر کی مسادات ہے

$$\text{لاجم عہ} + \frac{\text{عہ} + \text{عہ}}{۲} = \text{ماجب عہ} + \frac{\text{عہ} + \text{عہ}}{۲} = \text{لاجم عہ} - \frac{\text{عہ}}{۲}$$

۱۹۔ ثابت کرو کہ عہ اور بہ پر کے ماسات کا نقطہ تقاطع

$$(\text{لاجم عہ} + \frac{\text{عہ} + \text{عہ}}{۲}) \text{ قط } (\text{عہ} - \frac{\text{عہ}}{۲}) \text{ (اجب عہ} + \frac{\text{عہ} + \text{عہ}}{۲} \text{ قط عہ} - \frac{\text{عہ}}{۲}) \text{ ہے۔}$$

۲۰۔ اگر ق اور ر پر کے ماسات ن پر میں، و مرکز ہو اور ون ق ر کو

ن پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ون x ون = وق

۳۷۔ تقلیب تعریف فرض کرو کہ و ایک نقطہ معلومہ ہے اور ن ایک

اور نقطہ ایک معلومہ منہی پر واقع ہے ون پر ایک نقطہ ن ایسا نو کہ

دن \times ون = ک جہاں ک ایک مستقل مقدار ہے۔ جیسے ن معلوم منحنی پر حرکت کرتا ہے ن بھی شرط بالا کے ماتحت ایک منحنی مترسم کرتا ہے ن کے اس طریق کو معلوم منحنی کا مقلوب کہتے ہیں بلحاظ نقطہ و اور نصف قطر تقلیب ک کے۔
دائرہ کا مقلوب بلحاظ کسی نقطہ کے معلوم کر دے۔

نقطہ معلوم کو مبدأ مانو اور فرض کرو کہ دائرہ کی مسادات قطبی محدودوں میں

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 - 21 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26 - 27 - 28 - 29 - 30 - 31 - 32 - 33 - 34 - 35 - 36 - 37 - 38 - 39 - 40 - 41 - 42 - 43 - 44 - 45 - 46 - 47 - 48 - 49 - 50 - 51 - 52 - 53 - 54 - 55 - 56 - 57 - 58 - 59 - 60 - 61 - 62 - 63 - 64 - 65 - 66 - 67 - 68 - 69 - 70 - 71 - 72 - 73 - 74 - 75 - 76 - 77 - 78 - 79 - 80 - 81 - 82 - 83 - 84 - 85 - 86 - 87 - 88 - 89 - 90 - 91 - 92 - 93 - 94 - 95 - 96 - 97 - 98 - 99 - 100$$

ہے جہاں (د'ع) مرکز کے قطبی محدود ہیں اور (د'ع) نصف قطر ہے۔ اگر دائرہ کے نقطہ (ر'ط) کے جواب میں مقلوب منحنی پر نقطہ (ر'ط) ہو تو $r = R$ کہ

$$\frac{r}{R} = 1$$

ر کی یہ قیمت مسادات (۱) میں مندرج کرنے اور ر کی زہروں کو حذف کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مقلوب کی مسادات دائرہ کی مسادات (۱) میں ر کی بجائے $\frac{r}{R}$ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے اس لئے یہ مسادات حسب ذیل ہے

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 - 21 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26 - 27 - 28 - 29 - 30 - 31 - 32 - 33 - 34 - 35 - 36 - 37 - 38 - 39 - 40 - 41 - 42 - 43 - 44 - 45 - 46 - 47 - 48 - 49 - 50 - 51 - 52 - 53 - 54 - 55 - 56 - 57 - 58 - 59 - 60 - 61 - 62 - 63 - 64 - 65 - 66 - 67 - 68 - 69 - 70 - 71 - 72 - 73 - 74 - 75 - 76 - 77 - 78 - 79 - 80 - 81 - 82 - 83 - 84 - 85 - 86 - 87 - 88 - 89 - 90 - 91 - 92 - 93 - 94 - 95 - 96 - 97 - 98 - 99 - 100$$

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 - 21 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26 - 27 - 28 - 29 - 30 - 31 - 32 - 33 - 34 - 35 - 36 - 37 - 38 - 39 - 40 - 41 - 42 - 43 - 44 - 45 - 46 - 47 - 48 - 49 - 50 - 51 - 52 - 53 - 54 - 55 - 56 - 57 - 58 - 59 - 60 - 61 - 62 - 63 - 64 - 65 - 66 - 67 - 68 - 69 - 70 - 71 - 72 - 73 - 74 - 75 - 76 - 77 - 78 - 79 - 80 - 81 - 82 - 83 - 84 - 85 - 86 - 87 - 88 - 89 - 90 - 91 - 92 - 93 - 94 - 95 - 96 - 97 - 98 - 99 - 100$$

اس لئے دائرہ کا مقلوب ایک دائرہ ہے جس کا مرکز

$$\left(\frac{r}{R}, \frac{d}{2} \right) \text{ ہے اور جس کا نصف قطر } \frac{r}{R} \text{ ہے}$$

اس مسادات کا ہندسی مفہوم یہ ہے فرض کر دو کہ ن نقطہ ن کا مقلوب ہے اور دن دائرہ معلوم کو دوبارہ ق پر قطع کرتا ہے اب دن \times ون = ک اور دن \times وق = اُس مماس کا مربع جو د سے کھینچا جائے = د - ر

$$\frac{r}{R} = \frac{d}{2}$$

پس مقلوب منحنی اصلی دائرہ کا شئی ہے پیانہ $\frac{r}{R}$ پر جہاں ن ق کا جواب ہے اور ق (جوق کا مقلوب ہے) ن کا جواب ہے۔

اگر مرکز قلب و دائرہ کے محیط پر واقع ہو تو دائرہ کی مساوات ہوگی
 $r = ۲$ (ط - ع) اور مقلوب کی رجم (ط - ع) = $\frac{ک}{۲}$ ، اس
 صورت میں دائرہ کا مقلوب ایک خط مستقیم ہے جو ویں سے گزرنیوالے نصف
 قطر پر عمود ہے۔ اگر قلب کا نصف قطر ۲ ہو تو مقلوب ویں سے گزرنیوالے
 قطر کے دوسرے سرے پر کا ماس ہوگا۔

مشق

۲۱۔ اگر ن کا مقلوب ن ہو تو ثابت کرو کہ ن کے نقطہ ن اور مقلوب کے نقطہ
 ن پر کے ماسات خط و ن سے مساوی زاوے بناتے ہیں۔

توضیحی مثالیں

(۱) اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے کہ دائرہ
 $لا + ۲$ لا ما جم سہ + ۲ + گ لا + ۲ ف + م + ج =
 جو حصہ خط مستقیم لا + م + مے اسے کاٹے اس کے سامنے مبدأ پر زاویہ قائمہ
 اگر ن اور ق نقاط تقاطع ہوں تو ہیں و ن اور ق کی مساوات معلوم
 کر کے ان کے باہم علی القوائم ہونی کی شرط معلوم کرنی چاہئے۔
 پہلی مساوات کی مدد سے دوسری مساوات کو متجانس بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ
 و ن اور ق کی مساوات ہے

$$\begin{aligned} & لا + ۲ + ۲ لا ما جم سہ + ۲ (گ لا + ۲ ف + م + ج) (ل لا + م + ج) \\ & + ج (ل لا + م + ج) = ۰ \\ & یا لا (۲ + گ ل + ج ل) + ۲ (لا ما جم سہ + گ م + ف ل + ج ل م) \\ & + م (لا + ۲ ف + م + ج م) = ۰ \end{aligned}$$

اگر یہ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو حصہ اول دفعہ ۲ کی رو سے

$$\begin{aligned} & (۲ + گ ل + ج ل) + (۲ + ۲ ف + م + ج م) \\ & - ۲ (جم سہ + گ م + ف ل + ج ل م) جم سہ = ۰ \end{aligned}$$

یا اختصار کے بعد

$$۲ \text{ جب } ۲ \text{ ل (گ - ف) جم سہ} + ۲ \text{ م (ف - گ) جم سہ} \\ + \text{ج (ل + م - ۲) م جم سہ} = ۰$$

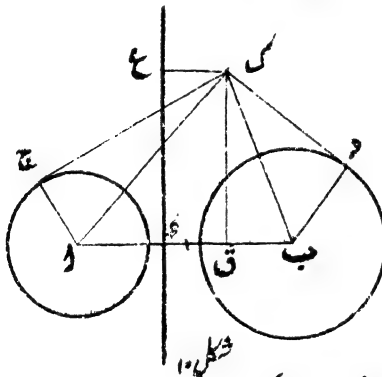
جو شرط مطلوبہ ہے۔

(۲) ثابت کر دکھ اگر کسی نقطہ ک سے دو معلومہ دائروں کے مماس کھینچے جائیں تو انکے مراجموں کا فرق دو چند سطح ک ح یا ل ب کے مساوی ہے جہاں ک ح نقطہ ک سے بنیادی محور پر عمود ہے اور ل ب دائروں کے مرکز ہیں۔

فرض کر دو کہ ک کے محدود (ل، ل) میں اور دائروں کے مساواتیں
 $س = ۰$ اور $س = ۰$ ہیں جہاں

$$س = لا + ما + ۲ گ ل + ۲ ف با + ج$$

$$\text{اور } س = لا + ما + ۲ گ ل + ۲ ف با + ج$$



نیز فرض کر دو کہ $س = ۰$ اور $س = ۰$
 ان نتائج کو تعبیر کرتے ہیں جو ک
 کے محدودوں کو جملات $س = ۰$ اور $س = ۰$
 میں مندرج کرنے سے حاصل ہوں
 نیز فرض کر دو کہ نقطہ ک سے دائروں
 کے مماس ک ج اور ک د کھینچے
 گئے ہیں تب ک ج = ک د = $س = ۰$

$$\therefore \text{ک ج} - \text{ک د} = س - س = ۰ \dots (۱)$$

بنیادی ہم کی مساوات ہے $س = ۰$ جس میں لا کا سر ۲ (گ - ف) ہے
 اور ما کا سر ۲ (ف - گ)

$$\text{اس لئے ک ح} = \frac{س - س}{۲(گ - ف) + ۲(ف - گ)} \dots (۲)$$

(حصہ اول دفعہ ۱)

نہیں کہ ح کی علامت سے تعلق نہیں ل کے محدود (گ - ف) ہیں

اور ب کے (-گ' - فن)

$$\therefore \text{ا ب} = \sqrt{(\text{گ} - \text{گ}') + (\text{ف} - \text{ف}')} \dots\dots\dots (۲)$$

(۱) ' (۲) اور (۳) سے ک ج - ک ڈ = ۲ ک ع x ا ب
(۴) کسی نقطہ فن سے ایک ہم محور نظام کے دو معلومہ دائروں کے مماس
ین م اور فن م کیچے گئے ہیں ثابت کرو کہ جب فن اسی نظام کے کسی
تیسرے دائرہ کے مماس پر حرکت کرتا ہے تو نسبت فن م : فن م
مستقل رہتی ہے۔

بطلان قیاس کتابت سب شامل بالا فرض کرو کہ س = . اور س = .
دو معلومہ دائروں کی مسادات ہیں۔ اسی نظام کے کسی اور دائرہ کی مسادات
اس شکل کی ہوگی

$$\text{س} + \text{ل} = \text{س}' = \dots\dots\dots (۱)$$

جس کی ہندسی تعبیر (دفعہ ۲۵) یہ ہے کہ

$$\text{ف} م' + \text{ل} ف م = .$$

یعنی جب نقطہ فن دائرہ (۱) کے محیط پر حرکت کرتا ہے تو

$$\frac{\text{ف} م}{\text{ف} م'} = \frac{\text{ل} - \text{ل}'}{\text{ل} - \text{ل}'} = \text{مستقل ہے۔}$$

[ملاحظہ ہو کہ لہ کو منفی ہونا چاہئے اگر ف م اور ف م' حقیقی ہوں]
(۴) ثابت کرو کہ دائرہ کوئی وتر دائرہ سے جو توس کاٹتا ہے اس کے نقطہ تقصیف پر کا
ماس وتر کے متوازی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ل' + م' = ر دائرہ کی مسادات ہے اور توس کے سرے ل
اور ب ہیں اور وسطی نقطہ ط۔

دفعہ ۳۶ کے طریق کتابت کے موافق فرض کرو کہ ل نقطہ عہ ہے اور ب
نقطہ ی تب ط نقطہ ۱ (عہ + ب) ہوگا۔ ط پر کے مماس کی مسادات ہے

$$\text{لا جیم} \frac{۱}{۱} (عہ + ب) + \text{ما جب} \frac{۱}{۱} (عہ + ب) = ر \dots\dots\dots (۱)$$

وتر اب کی مساوات ہے ملاحظہ ہو مثال ۱۸ صفحہ ۲۸۔

لاجم $\frac{1}{2}$ (ع + ب) + ماجب $\frac{1}{2}$ (ع + ب) = رجم $\frac{1}{2}$ (ع - ب) (۲)۔
ان دو مساواتوں میں لا اور ماسے سر وہی ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ یہ ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

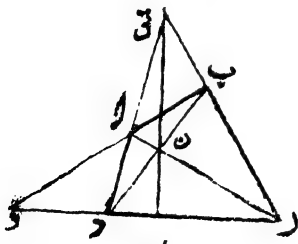
(۵) اب ر د ایک ذواربۃ الاضلاع ہے جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتا ہے۔ اب ر نقطہ و پر ملتے ہیں ل ر اب در نقطہ ن پر اور ل د ب ر نقطہ ق پر ثابت کرو کہ ن ق نقطہ و کا قطبی ہے۔
و اب اور و و ر کو محاذ لا اور مافرض کرو۔

فرض کرو کہ ان کا درمیانی زاویہ سہ ہے اور دائرہ کی مساوات ہے
لا + ۲ لا ماجم سہ + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ماج ج = ۵۰ (۱)
تب و لا اور و ب مساوات درجہ دوم لا + ۲ گ لا + ج = کی اصلیں ہیں
اور و ر و مساوات ما + ۲ ف ماج ج = کی اصلیں ہیں ج کی بجائے
ت لکھو اور فرض کرو کہ و ل = م ت و ر = ل ت
تب و ب = م اور م گ = - ت (م - ل)
نیز و د = م اور م ف = - ت (ل + ل)

اس لئے دائرہ کی مساوات ہو جاتی ہے

لا + ۲ لا ماجم سہ + ما - (م + ل) ت لا - (ل + ل) ت ماج ت = ۵۰ (۲)
اور مبدأ و کا قطبی بلحاظ (۲) کے مثال ۲۰ صفحہ ۲۴ کی رو سے ہے

$\frac{1}{2}$ (م + ل) (لا + ل + ل) (ل + ل) ماج ت = ۵۰ (۳)
اب چونکہ ن ق خطوط ل ر اور



شکل ۱۱

اب د کے نقطہ تقاطع میں ہے
اور نیز ل د اور ب ر کے نقطہ
تقاطع میں سے گزرتا ہے اس لئے
(حصہ اول دفعہ ۲۲ کی رو سے)
اس کی مساوات ذیل کی صورتوں پر مشتمل ہونی چاہئے

(۱) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (ت - ک) + (لام + مال - ت) = ۰$
 اور (۲) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (ت - ک) + (لام + مال - ت) = ۰$
 جو باہم متطابق اُسی صورت میں ہو سکتی ہیں اگر $ک = ۱$ اور $ک = ۱$
 اس لئے $ن ق$ کی سادات ہے

لا (لام + مال) + (۱ + ۱) = ۲ ت (۴)
 یعنی $ن ق$ نقطہ کا قطبی ہے۔

[ملاحظہ ہو کہ نقطہ سے تماس کا طول $ت$ ہے]

باب دوم پر متفرق مشقیں

۲۲۔ نقطہ (۱) سے دائرہ لا + ما = ۱ کے تماس کھینچے گئے ہیں، اُن
 خطوط متقیم کی ساداتیں معلوم کرو جو مرکز کو تماس کے نقاط تماس کے ساتھ ملاتے
 ہیں، اگر یہ خطوط علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ (۱) سے دائرہ لا + ما = ۱ کے بیخاطر واقع ہوتا
 ۲۳۔ ثابت کرو کہ مبداء سے دائرہ لا + ما + ۱ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
 کے تماس کا طول $\sqrt{۷}$ ج ہے۔

۲۴۔ ذیل کے دائروں میں سے دو دو لیکر ان کے بنیادی محور معلوم کرو اور وہ
 نقطہ معلوم کرو جہاں ان کے تینوں بنیادی محور ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

لا + ما = ۳ - لا - ما + ۶ = ۸ ؛ لا + ما = ۲ - لا - ما + ۳ = ۴ ؛ لا + ما = ۲ + لا - ما + ۳ = ۵

۲۵۔ ثابت کرو کہ اُس تماس کا طول جو دائرہ لا + ما + ۱ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
 کے کسی نقطہ سے دائرہ لا + ما + ۱ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ تک پہنچا جائے
 $\sqrt{۷}$ ج ہے۔

۲۶۔ دائرہ لا + ما = ۱ کے جو دو ثابت نقطہ (۱) میں سے گزرتے ہیں ان کے
 وسطی نقاط کا طریق معلوم کرو۔

۲۷۔ اگر ایک نقطہ سے دو معلومہ دائروں کے تماس کھینچے جائیں اور ان کے طولوں کی
 باہمی نسبت متقل ہو تو ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک ایسا دائرہ ہے جو معلومہ
 دائروں کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

۲۸۔ تین دائروں $لا + ما = ۹$ ، $لا + ما = ۲$ اور $لا + ما = ۱۹$ کے بنیادی مرکز کے محدد معلوم کرو۔

۲۹۔ ثابت کرو کہ دائرے $ر = ۲$ (طہ - عہ) اور $ر = ۲$ (بجم - طہ) ایک دوسرے کو زاویہ $عہ - ب$ پر کاٹتے ہیں۔

۳۰۔ محیط پر کسی ایک نقطہ میں سے جتنے وتر گزرتے ہیں ان کے وسطی نقاط کا طریق دریافت کرو۔

۳۱۔ ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ سے گزرنے کے علاوہ خط مستقیم $لا + ما + ۲ = ۰$ اور دائرہ $لا + ما + ۲ + ۳ + ۲ = ۰$ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

۳۲۔ ان مساوات کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ سے دائرہ $لا - ن + (ما - ق) = ۰$ تک پہنچنے جائیں۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ کسی دو دائروں کی مساواتیں ہمیشہ اس طرح لکھی جاسکتی ہیں $لا + ما + ن + ج = ۰$ ، $لا + ما + ق + ج = ۰$ ۔

۳۴۔ اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے کہ شق ۳۳ کے دائروں میں سے ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے بالتمام اندر واقع ہو۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ نقطہ $(ن، ق)$ کا قطبی لمحاظ دائرہ $لا + ما = ۰$ کے $(لا، ج) + (ما، د) = ۰$ (بیا) کو مس کرتا ہے اگر $بیا = (ن + ق) = ۰$ ۔

۳۶۔ ایک خط مستقیم کا قطب لمحاظ دائرہ $لا + ما = ۰$ کے خط مستقیم $لا + ما + ج = ۰$ پر واقع ہوتا ہے ثابت کرو کہ خط مستقیم کی مساوات $لا - ج + (ما، ب) = ۰$ ہے جہاں $ج$ مستقل ہے۔

۳۷۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مرکز سے دو نقطوں کے فاصلوں میں جو نسبت ہے وہ ان عمودوں کی نسبت کے مساوی ہے جو ہر نقطہ سے دوسرے کے قطبی پر نکالے جائیں۔

۳۸۔ نقطہ $(ن، ق)$ سے دائرہ $لا + ما = ۰$ کے ماس کہنے گئے ہیں ثابت کرو کہ

جو مثلث ان مساوات اور $(ن، ق)$ کے قطبی سے بنا ہے اس کا قعر $(ن + ق) = ۰$ ہے۔

۳۹۔ دو دائرہ (لا + ج) + (د + م) = ر اور (لا + د) + (م + ج) = ز کے وتر مشترک کا طول معلوم کرو۔

۴۰۔ ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو قائم محور ز کو ممس کرے۔
۴۱۔ دو دائرہ لا + م، لا + د، لا + ج، لا + م، لا + د، لا + ج کے مشترک ممسوں کی مساوات معلوم کرو۔

۴۲۔ دس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو دو دائرہ لا + م، لا + د، لا + ج، لا + م، لا + د، لا + ج کے ساتھ ممس ہو اور مبدائیں سے گزرے۔

۴۳۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور اضلاع کی باہمی نسبت معلوم ہے، ثابت کرو کہ رأس کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴۴۔ ایک ممس محور نظام دو دائرہ کے ممس ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں ان کے نقاط ممس کا طریق معلوم کرو۔

۴۵۔ اگر ایک سلسلہ سے دائرے ایک دوسرے کو ایک ہی نقطہ پر ممس کریں تو ان کے قطبی ممس ایک نقطہ معلوم کے مشترک ہوں گے۔

آزمائشی پرچہ ۱

۱۔ ایک خط مستقیم کا طول ۲۰ معلوم ہے اور یہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے سرے ہمیشہ محوروں پر واقع ہوتے ہیں اس کے وسطی نقطہ کا طریق معلوم کرو، محور قائم ہیں۔

۲۔ ایک نقطہ کا جو فاصلہ ہے اس کا مربع خط لا = ۱/۲ سے اس کے فاصلے کا ۲ لگنا ہے، ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک نقطہ دائرہ ہے۔
اس کا مقام معلوم کرو جو محور قائم ہیں۔

۳۔ اس کی با تفصیل تشریح کرو کہ ”ایک منحنی کے ممس“ سے کیا مراد ہے۔

۴۔ دائرہ لا + م، لا + د، لا + ج کے نقطہ پر کا ممس محور لا اور ماسے بالترتیب م اور د پر ممس ہے ل اور ن ل ان محوروں پر عمود کیونچے گئے ہیں ثابت کرو

ج ل \times ج م = ل اور ج ل \times ج م = ل جہاں ج دائرہ کا مرکز ہے۔

$$۵۔ \text{دائرہ ل}^۲ + \text{م}^۲ = ۲۵ \text{ اور ل}^۲ + \text{م}^۲ = ۲۵ + ۲۶ = ۵۱$$

کے نقاط تقاطع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

۶۔ ف کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ خط مستقیم ل ا ج م + م ا ج ب ع = ف دائرہ ل^۲ + م^۲ = ۲ ل^۲ + ۲ م^۲ = کو مس کرے۔

۷۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم م ل دائرہ

$$\text{ل}^۲ + \text{م}^۲ = ۲ ل^۲ + ۲ م^۲ = ۲ \text{ ل}^۲ + ۲ م^۲ = ۲$$

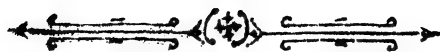
$$\text{اور ل}^۲ + \text{م}^۲ = ۲ ل^۲ + ۲ م^۲ = ۲ \text{ ل}^۲ + ۲ م^۲ = ۲$$

اس سے حاصل کرو کہ دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اگر ل = م ب

۸۔ ایک دائرہ کے دو ترا یک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں (اس نقطہ کو قطب انکر) ان سے وسطی نقاط کا طریق معلوم کرو ثابت کرو کہ اگر مرکز کا مقام نہ بدے تو یہ طریق دائرہ کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہے۔

۹۔ اگر ایک خط مستقیم کا قطب بلحاظ دائرہ ل^۲ + م^۲ = ج کے دائرہ ل^۲ + م^۲ = ۹ ج پر ہو تو قطبی دائرہ ل^۲ + م^۲ = ۹ ج کا مس ہے۔

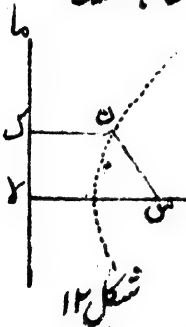
۱۰۔ نقطہ میں سے ایک خط کسی سمت میں کھینچا گیا ہے اور یہ ایک ثابت خط مستقیم سے نقطہ پر ملتا ہے اگر وں پر ایک نقطہ ق ایسا لیا جائے کہ سطح وں \times وں متساوی ہو تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔



باب سوم

قطع مکانی

۳۸۔ مکانی تعریفات جب ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اثنائے حرکت میں اس کے فاصلے ایک ثابت نقطہ اور ایک ثابت خط مستقیم سے ہمیشہ مساوی رہتے ہیں تو اس کے طریق کو قطع مکانی یا اختصاراً مکانی کہتے ہیں۔



نوٹ ۱۔ اوپر کی تعریف میں "فاصلہ" سے مراد چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے ثابت خط مستقیم کی صورت میں یہ اس عمود کے طول سے تعبیر ہو گا جو متحرک نقطہ کے کسی مقام سے ثابت خط مستقیم پر گھنیا جائے۔

نوٹ ۲۔ نقطہ کی حرکت ہمیشہ اس سطح

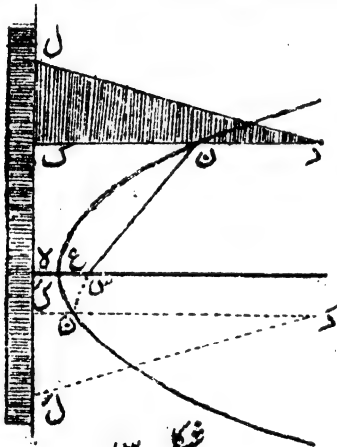
مستوی میں وقوع پذیر ہوتی ہے جس میں نقطہ اور خط واقع ہیں، اس کنہ میں شروع سے آخر تک تمام نقطے، خط اور منحنی ایک ہی سطح میں واقع ہیں۔

ثابت نقطہ کو ماسکہ کہتے ہیں اور ثابت خط مستقیم کو مرتبہ ماسکہ کو بالعموم حروف سے تعبیر کرتے ہیں اور اس سے مرتبہ پر جو عمود نکالا جائے اس کے پایہ کو لا کہتے ہیں۔

مثلاً اگر منحنی پر کوئی نقطہ ن ہو اور ن سے مرتبہ پر عمود ن ک نکالا جائے

$$\text{تو } س ن = ن ک$$

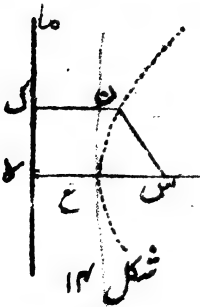
۹۳۔ مکانی کی آبی ترسیم
 اوپر کی تعریف سے مکانی کی پہچنے کی ایک آسان ترکیب حاصل ہوتی ہے۔ ایک
 چٹھی پٹری لو اور اس کا ایک سر مرتب لاک پر ٹھیک منطبق کرو، اس پیمانہ کے ساتھ
 ایک مثلثی کنیاک دل اس طرح رکھا دو کہ اس کا ایک کنارہ ک د منحنی کے محور کے
 متوازی ہو، طول د ک کے مساوی ایک ناگا لوجس کا ایک سراد پر اور دوسرا اس
 پر باندھو۔ اب اگر ایک پل سے ناگے کو د ک پر بخوبی تلنے رکھیں (دیکھو شکل ۱۳) تو
 منحنی گنے کو ثابت سیدھ پیمانہ پر حرکت دینے سے منسل کا سرا مکانی کے کچھ
 حصہ کو مرتسم کرے گا۔



شکل ۱۳

کیونکہ $س ن + ن د = س ک$ کا طول
 $ک د = ک ن + ن د$
 $س ن = ل ن$ کی
 منحنی کا پچھلا حصہ منحنی گنے وغیرہ کو
 اُس مقام پر رکھنے سے حاصل ہو سکتا
 ہے جہاں نقطوں سے نشان دیا گیا ہے۔
 نتیجہ صریح یہ مکانی شکل میں ایک
 جیسے لیکن ناپ میں مختلف ہوتے ہیں۔

تعریف اور بناوٹ سے ظاہر ہے کہ کوئی دو مکانی شکل میں ایک جیسے ہیں اور
 ان کے متناظر خطوط ان کے س ل، فاصلوں کے تناسب ہیں یعنی اُن
 فاصلوں کے تناسب ہیں جو ماسکوں سے اُن کے مرتبوں تک بالترتیب
 کھینچے جائیں۔



شکل ۱۴

۹۴۔ مکانی کی مساوات معلوم کرو۔
 فرض کرو کہ س ن ثابت نقطہ ہے اور
 لاک ثابت خط مستقیم ہے اور س سے
 لاک پر عود س ل اکھینچا گیا ہے۔
 لاک کو مبدأ، لاک کو محور لاک کو

محور ما بانوا فرض کرو کہ اس کا طول ۲ ہے، اگر منحنی پر کوئی نقطہ
 ن (لا) ہو تو چونکہ اس میں $n = ۱$ ک
 اس لئے اس میں $n = ۱$ ک یعنی (لا - ۲) $+ ۱ = ۱$ لا
 تحول کے بعد $۱ = ۱$ لا (لا - ۱)

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

۴۱۔ مساوات مکانی کی تحول شکل $۱ = ۱$ لا میں۔

اگر ہم نیابتاً نقطہ ع (۱) یعنی اس کا نقطہ وسطی پر لیں اور نئے
 محور اصلی محوروں کے متوازی ہوں تو نئی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہمیں پرانی مساوات
 میں لا کی بجائے لا + ۱ اور ما کی بجائے ما لکھنا چاہئے۔ (دیکھو جدول دفعہ ۳۱)
 اس طرح مساوات ہو جائے گی

$$۱ = ۱ \text{ لا} \text{ (لا + ۱ - ۱) = ۱} \text{ لا}$$

$$۱ = ۱ \text{ لا} \text{ یا } ۱ = ۱ \text{ لا} \dots\dots\dots (۱)$$

۱ = ۱ لا مساوات مکانی کی سادہ سے سادہ شکل ہے اور ضرور یاد رکھنی
 چاہئے، نئے محور جو منتخب کئے گئے ہیں انہیں اصلی محور کہتے ہیں۔

۴۲۔ مکانی کی شکل کا اس کی مساوات سے حاصل کرنا۔

ع کو مبدأ مانو (شکل ۱۵) اب اس میں $ع = ۱$ لا = ۱

اور مکانی کی مساوات ہے $۱ = ۱$ لا

$$۱ = ۱ \text{ لا}$$

پس لا کی ہر ایک مثبت قیمت کے لئے ما کی دو مساوی اور مختلف علامت
 قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، نیز اگر لا کو مثبت قرار دیا جائے تو لا کے منفی ہونے کی
 صورت میں لا منفی ہوگا اور اس لئے ما غیر حقیقی ہوگا۔

اس سے ہم نتائج ذیل اخذ کرتے ہیں

(۱) منحنی بالتمام محور ما کے دائیں جانب واقع ہے۔

(۲) ع ما کے متوازی کوئی خط منحنی سے ایسے دو نقاط پر ملتا ہے جو خط ع لا سے

مساوی الفضل ہوتے ہیں۔

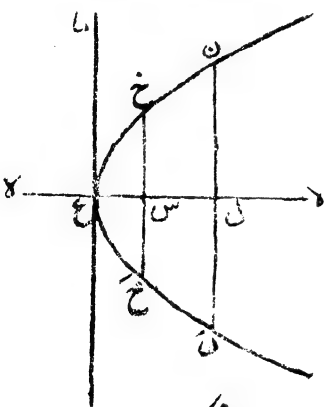
(۳) نتیجہ ۲ سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ خط ع مایا لا =۔ نقطہ ع پر منحنی کا تماس ہے کیونکہ اس سے مائی دو مساوی قیمتیں (یعنی صفر) ملتی ہیں۔

(۴) لا کے لا انتہا بڑھنے سے مابھی لا انتہا بڑھتا ہے۔

امور بالا سے ہم منحنی کی شکل کا کچھ اندازہ کر سکتے ہیں یہ ع مایا ع پر مس کرتا ہے اور لمحاظ لا ع کے متشاکل ہے نیز محور لا کے دونوں جانب باہر کی طرف لا انتہا فاصلے تک پھیلتا ہے۔

نوٹ۔ ایک منحنی لمحاظ ایک خط مستقیم کے متشاکل اُس وقت کہلاتا ہے جبکہ اسکے ایک جانب منحنی کا جو حصہ ہوا اسکے ہر ایک نقطہ کے مقابل خط مستقیم کی دوسری طرف اُس عمود پر جو نقطہ مذکورہ سے خط مستقیم پر نکالا جائے مساوی فاصلہ پر ایک اور نقطہ ہو، اگر خط مستقیم کو ایک مستوی آئینہ خیال کیا جائے تو ایک طرف کا منحنی دوسری طرف کے منحنی کی تصویر ہو، اُس لئے اگر خط مذکور پر ایک خط عمود نکالا جائے اور یہ دونوں جانب منحنی پر اگر ختم ہو تو ظاہر ہے کہ یہ خط مستقیم اس مقطوعہ کی تنصیف کرے گا۔

انتباہ۔ اگر منحنی ہو تو منحنی بالتمام محور مایا کے بائیں جانب واقع ہوگا لیکن اوپر کے نتائج (۲)، (۳)، (۴) اس صورت میں بھی درست رہینگے۔



شکل ۱۵

محور، رأس، تقریضیں۔ خط مستقیم لا ع میں لمحاظ جس کے منحنی متشاکل ہے مکانی کا محور کہلاتا ہے اور یہ نقطہ ع کو جہاں محور منحنی سے ملتا ہے منحنی کا رأس کہتے ہیں۔

اگر کوئی نقطہ ن منحنی پر واقع ہو اور ن سے محور پر عمود ن ل نکالا جائے تو ن ل کون کا معین کہتے ہیں اور اگر یہ منحنی سے

دوبارہ ن پر لے تو ن ن دوہرا معین کہلاتا ہے، ماسکے میں سے جو دوہرا معین رخ نس رخ گذرتا ہے اُسے وتر خاص کہتے ہیں، اس کا طول ۴ لا ہے کیونکہ مساوات

$$\begin{aligned} \text{ما} = ۴ \text{ لا سے } \text{رخ نس} = ۴ \text{ لا } \times \text{ع نس} = ۴ \text{ لا} \\ \text{رخ نس} = ۲ \text{ لا اس لئے } \text{رخ نس رخ} = ۴ \text{ لا} \end{aligned}$$

مشقیں

۱۔ ثابت کرو کہ مکانی ما = ۴ لا پر کے نقطہ ن (لا، ما) کا فاصلہ ماسکے سے لا + لا ہے۔

۲۔ ذیل کے ہر ایک مکانی کے وتر خاص کا طول معلوم کرو

$$(۱) \text{ ما} = ۲ \text{ لا} \quad (۲) \text{ ما} = ۷ \text{ لا} \quad (۳) \text{ ما} = ۷ \text{ لا} = -$$

۳۔ ایک مکانی کے رأس سے اس کے ماسکے کا فاصلہ ۳ ہے، سادہ سے سادہ شکل میں اس کی مساوات معلوم کرو۔

۴۔ مکانی ما = ۱۰ لا پر ایک نقطہ ن ایسا ہے کہ لان محور لا سے بالترتیب زاوے (۱) ۴۵° (۲) ۳۰° بناتا ہے، ن کے محدد معلوم کرو۔

[(۱) میں ن کا معین اس کے فاصلہ کے مساوی ہے]

۳۳۔ مکافیوں کا مرسم کرنا

دفعہ ۳۹ میں بیان ہو چکا ہے کہ سب مکانی ایک ہی شکل کے ہوتے ہیں لیکن ناپ (اور البتہ محل) کے لحاظ سے مختلف ہوتے ہیں، طالب علم کو چاہئے کہ مربع دار کاغذ پر چند مکافیوں کو نقطہ بنقطہ مرسم کرنے سے انکی شکل سے بخوبی واقف ہو جائے، ملاحظہ ہو مثال ذیل۔

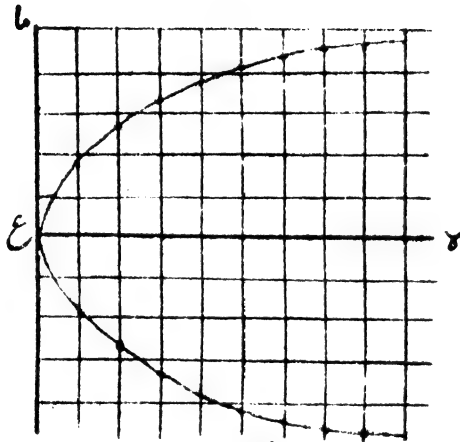
مثال منحنی ما = ۳ لا کو مرسم کرو

اگر ہم لا کو بالترتیب حسب ذیل قیمتیں دیں

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸

تو ما کی متناظر قیمتیں حاصل ہونگی

$$\begin{aligned} & ۳۴ \pm ۱۳, ۱۳ \pm ۹, ۱۲ \pm ۱۵, ۱۵ \pm ۱۸, ۱۸ \pm ۲۴, ۲۴ \pm ۳۴ \\ & یا ۱۵ \pm ۳, ۳ \pm ۲۵, ۲۵ \pm ۳۵, ۳۵ \pm ۳۹, ۳۹ \pm ۴۲, ۴۲ \pm ۴۹ \end{aligned}$$



شکل ۱۶

ان نقاط کی شکل میں نشان دہی کرنے اور ان میں سے ایک منحنی کھینچنے سے ہمیں مکانی کی شکل کا کچھ اندازہ ہوتا ہے۔
نوٹ حسابات میں آسانی ہوگی اگر ما کو قیمتیں $۱ \pm ۱, ۲ \pm ۲, \dots$ دیکر لا کی متناظر قیمتیں $۱ \pm ۱, ۲ \pm ۲, \dots$ معلوم کی جائیں۔

مشقیں

اسی طرح ذیل کے منحنیات کو مرتسم کرو۔

$$۵ - (۱) \quad ۲ = ۱ \quad ۹ = ۲ \quad (۲)$$

$$۶ - (۱) \quad ۲ = ۱ \quad ۷ = ۲ \quad (۲)$$

۳۴ - مکانی کی مساوات بلحاظ ایسے محوروں کے جو اس کے اصلی محوروں کے متوازی ہوں۔

ہم یہ مان لیتے ہیں کہ طالب علم منحنی کی عام شکل سے واقف ہے، اب ہم مکانی کو مرتب کرنے کی کوشش کرتے ہیں جبکہ اس کی مساوات ایسے محوروں کے لحاظ سے دی گئی ہو جن میں سے ایک، مکانی کے محور اور دوسرا اس پر کے تماس کے متوازی ہو۔

مثال (۱) منحنی $۲ - لا = ۵ + ۲$ کو مرتب کرو۔
مساوات کو اس طرح ترتیب دو کہ وہ رقبے جن میں ماسٹل ہوتا ہے مربع کامل کی صورت میں رکھی جاسکیں

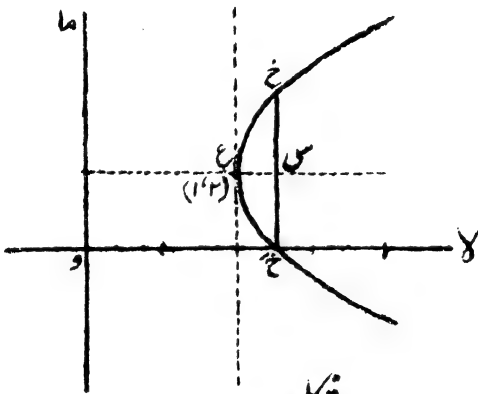
$$۲ - لا = ۵ + ۲$$

$$(۲ - لا) = ۱ + ۵ + ۲$$

اب مبدأ کو نقطہ $(۱, ۲)$ پر منتقل کرو تو مساوات ہو جاتی ہے

$$۲ - لا = ۵ + ۲$$

[حصہ اول دفعہ ۳۱]
[ظاہر ہے کہ جس نقطہ پر ہم نے مبدأ کو منتقل کیا ہے وہ منحنی کا رأس ہے]



شکل ۱۷

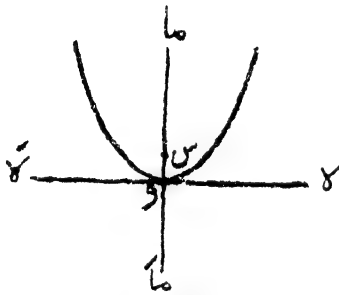
منحنی مذکور ایک مکانی ہے جس کا وتر خاص ۲ ہے اس کو ہم باسانی مرتب کر سکتے

ہیں دیکھو شکل ۱۷۔

طالب علم کو یہ دیکھنے سے اپنے عمل کی تصدیق کرنی چاہئے کہ منحنی ابتدائی محوروں سے کہاں ملتا ہے۔ مثلاً جب $ما = ۰$ تو $لا = ۵$ اور جب $لا = ۰$ تو

ما^۲ - ۲ + ۵ = ۰۔ جس سے ما کی خیالی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔
انتباہ۔ یاد رہے کہ مبدأ کو منتقل کرنے سے منحنی کی شکل اور نائب میں فرق نہیں آتا، صرف اس کا مقام بلحاظ محوروں کے بدلتا ہے، ظاہر ہے کہ منحنی کا مقام بلحاظ نئے محوروں کے وہی نہیں ہے جو اس کا مقام بلحاظ پرانے محوروں کے ہے۔

مثال ۲۔ منحنی لا^۲ = ۴م کو متسم کرو۔
مسادات ما^۲ = ۴م لا کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات لا^۲ = ۴م لا مادہ ہی ہے جو مساوات ما^۲ = ۴م لا اگر ہم محاور لا اور ما کا



شکل ۱۸

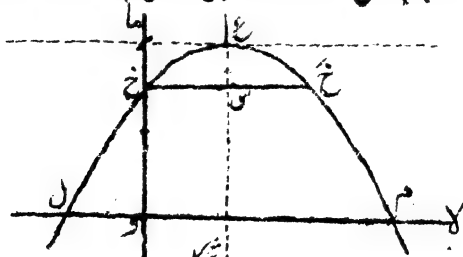
باہم تبادلہ کر دیں، یعنی یہ ایک ایسا مکانی ہے جس میں محور لا رأس پر کا ماس ہے (اور منحنی کا محور نہیں ہے) اور محور ما منحنی کا محور ہے (اور رأس پر کا ماس نہیں ہے) اس لئے اسکی شکل منحنی شکل ۱۸ کی طرح ہوگی۔

مثال ۳۔ منحنی لا^۲ - ۲ + ۵ = ۰ کو متسم کرو۔

چونکہ مساوات میں لا واقع ہوتا ہے اور ما شامل نہیں ہوتا اس لئے ہمیں ان رقموں کو جن میں لا شریک ہوتا ہے مریج کامل بنانا چاہئے

$$\text{پس } (لا - ۱)^۲ = ۲ - ۱ + ۳ + ۵ = ۷ \quad (۲ - ۱)^۲ = ۱$$

مبدأ کو نقطہ (۱، ۷) پر منتقل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے لا^۲ - ۲ + ۵ = ۰



شکل ۱۹

اس لئے یہ ایک مکانی ہے جس کا وتر خاص ۲ ہے۔
 نیا محور لاؤ اس پر کا ماس ہے اور نئے محور ماس کا منفی حصہ منحنی کا محور ہے۔
 مکانی ابتدائی محور لاؤ وہاں قطع کرتا ہے جہاں $ما = ۰$ اور $لا = ۲$ ۔ $۳ = -$
 یا $لا = ۳$ یا ۱ (م' ل) اور ابتدائی محور ماس کو جہاں $لا = ۰$
 اور $ما = ۳$ (خ)۔ اس لئے منحنی کی شکل حسب بالا ہے دیکھو شکل ۱۹۔

مشقیں

- ۷۔ منحنی $ما = ۲$ ۔ $لا = ۲$ کو مرتسم کرو۔
- ۸۔ ثابت کرو کہ مکانی $ما = ۳$ اور $لا$ منحنی $ما = ۴$ اور $لا$ کے بالکل مساوی ہے لیکن اس کا رخ مقابل کی جانب میں ہے۔
 [ملاحظہ ہو کہ $لا = ۳$ سے ایک مکانی میں دہی معین حاصل ہوتا ہے جو $لا = ۳ + ۲$ سے دوسرے میں]
- ۹۔ $ما = ۳$ ۔ $لا = ۲$ کو مرتسم کرو، ثابت کرو کہ اس کے وتر خاص کا طول ۳ ہے۔
- ۱۰۔ $ما = ۳$ ۔ $لا = ۱۸ + ۲۷ = ۲۷$ ۔ کو شکل میں کھینچو اور اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو۔
- ۱۱۔ مکانی $لا = ۴$ ۔ $لا = ۸$ ۔ $ما = ۱۲$ ۔ کو مرتسم کرو اور اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو۔
- ۱۲۔ منحنی $ما = ۲$ ۔ $لا = ۳$ کا راس کہاں ہے اس کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔
- ۱۳۔ منحنی $(۲ + ما) = ۲$ ۔ $لا$ کا راس معلوم کرو، راس پر کے ماس کی مساوات معلوم کرو۔
- ۱۴۔ ثابت کرو کہ نقطہ (لا، ما) مکانی $ما = ۴$ اور $لا$ کے اندر یا اوپر یا باہر واقع ہوگا اگر ما بالترتیب کم ہو، مساوی ہو یا بڑا ہو $لا$ سے۔
- ۱۵۔ معلوم کرو کہ نقطہ (۲، ۱) مکانیوں $ما = ۲$ اور $لا = ۲$ کے اندر ہے یا باہر اس کی توضیح کے لئے شکل کھینچو۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ منحنی (ما - ن) = ق (لا - ر) کا رأس (ر، ن) ہے اور وتر خاص ق ہے۔

۱۷۔ ذیل کے منحنیات کے رأس، ماسکے اور مرتب معلوم کرو۔

(۱) (ما - ن) = ق (لا - ر) (۲) (ما + ن) = ق (لا + ر) (۳) (ما - ن) = ق (لا - ر) اور لا، ما میں جو درجہ دوم کی رتبتیں ہیں وہ ایک مربع کامل بنائیں گی۔ سادہ سے سادہ صورت میں مکانی کی مساوات ہے

$$ما + ن = ق$$

اب اگر کسی نئے محوروں کے لحاظ سے ہم اس مساوات کو بدلنا چاہیں خواہ یہ محور قائم ہوں یا مائل ہوں لا، ما کی بجائے نئے محدودوں کے خطی درجہ اول کے (جملے لکھتے ہوں گے) (حصہ اول دفعہ ۳۵)

فرض کرو کہ لا کی بجائے ہم ل، لا + م، ما + ن اور ما کی بجائے ل، لا + م، ما + ن لکھتے ہیں، اس طرح اوپر کی مساوات ہو جائے گی

$$(ل + لا + م + ما + ن) = ق (ل + لا + م + ما + ن)$$

جو درجہ دوم کی مساوات ہے۔

اس میں درجہ دوم کی رتبتیں (ل، لا + م، ما + ن) ہیں اور یہ مربع کامل بناتی ہیں۔

۱۸۔ اگر نئے محور قائم ہوں تو اس مسئلہ کو ہم ایک اور طرح ثابت کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ (لا، ما) ماسکے میں کے محدود ہیں اور ل، لا + م، ما + ن = مرتب کی مساوات ہے

$$تب \quad س \quad ن = (لا - ل) + (ما - ن)$$

$$اور \quad ن \quad ک = \frac{(ل + لا + م + ما + ن)}{ل + م}$$

(حصہ اول دفعہ ۳۵)

$$\frac{(ل, لا + م, ما + ن, نا)}{ل, م + ن} = (لا - لا) + (ما - ما) = ۰$$

جو لا، ما میں درجہ دوم کی مساوات ہے۔
کسوں کو خارج کرنے سے یہ ہو جاتی ہے

$$(ل, م + ن) \{ (لا - لا) + (ما - ما) \} - (ل, لا + م, ما + ن, نا) = ۰$$

اب لا، ما میں درجہ دوم کی رقیس ہیں

$$(ل, م + ن) (لا + ما) - (ل, لا + م, ما) = (ل, م - م, لا) \text{ اور}$$

یہ مربع کامل ہے۔

پس اگر درجہ دوم کی مساوات

۱ لا + ۲ م + ۳ ب + ۴ گ + ۵ لا + ۶ ف + ۷ ج = ۰
ایک مکانی کو تعبیر کرے تو رقوم ۱ لا + ۲ م + ۳ ب + ۴ گ + ۵ لا + ۶ ف + ۷ ج میں
مربع کامل ہونا چاہئے اس کے لئے شرط یہ ہے کہ ۱ ب = ۴ ج
ہم دفعہ ۵۲ میں دیکھنے کے لئے اس کا عکس بھی درست ہے یعنی
اگر درجہ دوم کی رقیس ایک مربع کامل بنائیں تو منحنی مکانی ہوگا۔

مثال :- ایک مکانی کا ماسکہ (۱، ۱) ہے اور اس کے مرتب کی مساوات
۳ لا + ۴ م = ۱ ہے اس کی مساوات اور اس کے وتر خاص کا طول دریا
کرو۔

اگر (لا، ما) کوئی نقطہ منحنی پر ہو تو اس کا فاصلہ نقطہ (۱، ۱) سے وہی
ہوگا جو اس کا عمودی فاصلہ خط ۳ لا + ۴ م = ۱ سے ہے۔

$$\text{اس لئے } \sqrt{(لا - ۱)^2 + (ما - ۱)^2} = \frac{۳ لا + ۴ م - ۱}{۳}$$

جس سے مساوات

ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$۲۵ لا - ۵۰ لا + ۲۵ م - ۲۵ م + ۱۰ = ۲۵ لا + ۲۴ م + ۱۶ م - ۱۶ لا - ۸ م + ۱$$

∴ ۱۶ لا - ۲۴ لا + ۱۹ ما - ۲۴ لا - ۱۲ ما + ۱۹ ما = ۰
وتر خاص اس عمود کا دو چند ہے جو ماسک سے مرتب پر کھینچا جائے اس لئے

$$= \frac{12}{5} = \frac{1 - 1 \times 2 + 1 \times 3}{251}$$

مشقیں

۱۸۔ اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسک (۱۰) ہو اور مرتب

$$= 1 + 1$$

۱۹۔ اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسک (۲۱) ہو اور مرتب

$$= 2 - 6 + 1$$

۲۰۔ اوپر کی مشقوں ۱۸ اور ۱۹ میں جو مکانی ہیں ان کے وتر خاص معلوم کرو۔

۲۱۔ خط مستقیم مکانی سے دو نقاط پر ملتا ہے۔

فرض کرو کہ خط مستقیم ما = ص لا + ج ہے اور مکانی کی مساوات ما = م لا
ہے، ان دونوں کے نقاط تقاطع معلوم کرنے کی غرض سے ہمیں ان دو مساواتوں
کو ایک ساتھ لا، ماسک کے لئے حل کرنا چاہئے۔

ماسک کے لئے لا کی رقوم میں مندرج کرنے سے

$$(ص لا + ج) = ۲ لا \quad (۱)$$

$$\text{یعنی } م لا + ۲ لا (ص ج - ۲) = ج = ۰$$

جو لا میں مساوات درجہ دوم ہے اس لئے اس کی دو اصلیں ہیں۔ اگر
اصلیں لا، لا ہوں تو یہ نقاط تقاطع کے فیصلے ہوں گے اور ان کے جواب
میں معین ہوں گے ما = ص لا + ج، ما = م لا + ج اس طرح سے دو نقاط

تقاطع (لا، ما) اور (لا، ما) حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ص = ۰۔ تو مساوات درجہ دوم کی ایک اصل لامتناہی ہوگی اس صورت میں بھی

نقاط تقاطع دوہیں مگر ایک لامتناہی فاصلہ پر ہے۔

نوٹ۔ جب (۱) کی اصلیں خیالی ہوں تو خط مستقیم منحنی سے دو خیالی نقطوں پر ملے گا۔

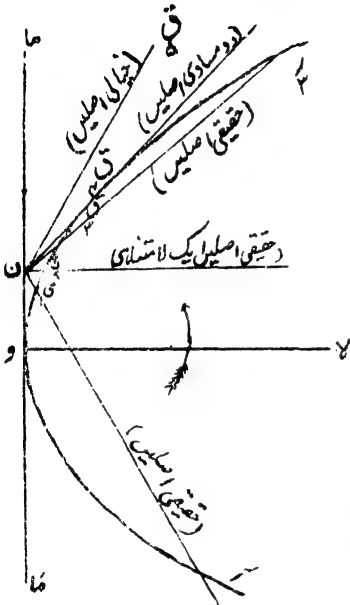
اس مسئلہ کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے، فرض کرو کہ ω ما پر کوئی نقطہ N ہے اور N میں سے ایک خط NQ پر کھینچا گیا ہے، نیز فرض کرو کہ یہ خط مقام N ما سے مقابل سمت ساعت حرکت کر کے مقام N ما پر پہنچتا ہے یعنی اس خط کا ”ص“ ”ا“ کر کے ∞ سے (صفر میں سے گزر کر) $+\infty$ تک بدلتا ہے، اب یہ خط ابتدا میں مکانی سے

دو نقاط Q ، P پر ملے گا اور M کی اُس قیمت کے لئے جو مقام NQ پر

کے جواب میں حاصل ہوتی ہے مساوات (۱) کی دونوں اصلیں حقیقی ہوں گی۔ جب یہ خط تمام NQ پر ہوگا یعنی ω کے تساوی تو $M = 0$ اور ایک اصل لامتناہی ہوگی۔ اس کے بعد دونوں اصلیں حقیقی اور محدود ہوں گی جیسے NQ لم کی صورت میں اور یہ حقیقی اور محدود رہیں گی جب تک کہ خط منحنی کو مس نہیں کرے گا جیسے مقام NQ پر۔ اس کے بعد دونوں اصلیں خیالی ہو جائیں گی اور خط منحنی سے حقیقی نقاط پر اس وقت تک نہیں ملے گا جب تک کہ یہ پھر مقام N ما پر نہ آجائے۔

۳۔ $M = 0$ اس کی شرط معلوم کرو کہ خط $Ma = M + J$ مکانی $Ma = M + J$ کو

مس کرے۔ اگر خط $Ma = M + J$ منحنی کو مس کرے تو دونوں نقاط تقاطع ایک دوسرے



شکل ۲۰

منطبق ہوں گے اور لا میں جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے اسکی اصلیں مساوی ہوں گی۔ مساوات مذکورہ یہ ہے

$$(م لا + ج) - ۲ = لا$$

$$یا لا \times م + ۲ لا (ج م - ۱۲) + ج = -$$

اس لئے مساوی اصلوں کے لئے شرط ہے

$$(ج م - ۱۲) = ج م$$

$$یا - ۲ لا ج م + م لا = -$$

$$ج م = لا یا ج = \frac{لا}{م}$$

$$اس لئے خط ما = م لا + \frac{لا}{م} \dots \dots (۲)$$

م کی تمام قیمتوں کے لئے مکانی کو مس کرتا ہے۔

انتباہ۔ جب م = ∞ یعنی جب خط محور ما کے متوازی ہو تو ثبوت بالا ناکام رہتا ہے کیونکہ مساوات کی شکل اس صورت میں لا = ج ہو جاتی ہے اور اس کے ذریعہ ہم ما کو سا قذ نہیں کر سکتے، اس صورت میں ہمیں لا کی ایک قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی اور مختلف علامت قیمتیں ملتی ہیں اور خط لا = ج منحنی کا ما میں نہیں ہو سکتا جب تک کہ ج صفر کے مساوی نہ ہو۔

۴۹۔ چونکہ مکانی بسند منحنی نہیں ہے اس لئے بعض خط اس کو ایسے نقاط پر ملیں گے جو مبدأ سے لا انتہا فاصلے پر ہوں۔

اس صورت میں لا کے لئے جو مساوات درجہ دوم ہے اس کی اصلوں میں سے ایک یا دونوں غیر متناہی ہوں گی، یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$لا \times م + ۲ لا (ج م - ۱۲) + ج = -$$

اور اس مساوات کی ایک اصل لائن ہی ہوگی اگر
 $m^2 = 0$ یعنی اگر $m = 0$ [یوٹوریل الجبر حصہ دوم دفعہ ۱۶۶]
 پس ایک ایسا خط مستقیم جو مکانی کے محور کے متوازی ہو منحنی سے دو نقاط
 پر ملتا ہے جن میں سے ایک لائن ہی فاصلہ پر ہوتا ہے۔

اگر مساوات درجہ دوم کی دونوں اصلیں غیر متناہی ہوں
 تو $m^2 = 0$ اور $m = 2$ ج۔

جس سے $y = 0$ جو فرضات کے خلاف ہے

یا $j = 0$ اگر یہ درست ہو تو خط لائن ہی پر ہوگا۔

اس لئے کوئی ایسا خط جو محور و فاصلہ پر ہو منحنی سے ایسے دو نقاط پر
 نہیں ملتا جو غیر متناہی فاصلہ پر ہوں۔

۵۰۔ اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ اس شکل $y = 0$ یا $y = 2$ ماباکی
 مساوات ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔

یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$y = 0 \text{ یا } y = 2$$

یا الجھا نا کے مربع کامل بنانے سے

$$(y - 1)^2 = \frac{y^2}{4} + (y - 2)^2$$

اور $(\frac{y^2}{4}, \frac{y^2}{4})$ کو نیا مبدأ مقرر کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

یا $y = 0$ [حصہ اول دفعہ ۳۱]

جو اسی قسم کی مساوات ہے جو دفعہ ۴۱ میں حاصل کی گئی، اس لئے یہ مکانی
 کو تعبیر کرتی ہے۔

۵۱۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک خط مستقیم پر اس کے عمود
 کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے اس کا عمود ایک اور خط پر ثابت کرو کہ نقطہ کا
 طریق مکانی ہے۔

خطوط کے نقطہ تقاطع کو مبدأ اور پہلے خط کو محور لا مانو، تو دوسرے خط کی مساوات اس شکل کی ہوگی $ما - م لا = ۰$ ۔

اس لئے مساوات ہے $ما = ک$ $\frac{ما - م لا}{ما + م لا}$ [حصہ اول دفعہ ۱]

جہاں ک مستقل ہے، لیکن یہ مساوات صریحاً $ما = ن لا + ق$ کی شکل کی ہے، اس لئے یہ ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔

۵۳ = اگر مساوات $(لا + ۲)ھ لا + ما + ب + ۲$ گ $لا + ۲$ ف $ما + ج = ۰$ میں دوسروں کی رقیس (یعنی $لا + ۲$ ھ $لا + ما + ب + ۲$ گ $لا + ۲$ ف $ما + ج$) مربع کامل بنائیں تو مساوات ایک مکانی کو تعبیر کرے گی۔

فرض کرو کہ $(لا + ۲)ھ لا + ما + ب + ۲ = (عہ لا + بہ ما)$

تب $(عہ لا + بہ ما) = - (۲ گ لا + ۲ ف ما + ج)$

اب نقطہ $(لا، ما)$ سے خط $عہ لا + بہ ما = ۰$ پر جو عمود کھینچ سکتا ہے

اس کا مربع $\frac{(عہ لا + بہ ما)^2}{عہ^2 + بہ^2}$

اور خط $۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$ پر کا عمود اسی نقطہ سے

$\frac{۲ گ لا + ۲ ف ما + ج}{۲ گ^2 + ۲ ف^2}$

اس لئے منحنی کے نقاط کے لئے پہلے عمود کے مربع کی نسبت دوسرے عمود کے ساتھ

$\frac{۲ گ لا + ۲ ف ما + ج}{۲ گ^2 + ۲ ف^2} \div \frac{(عہ لا + بہ ما)^2}{عہ^2 + بہ^2} =$

$\frac{۲ گ^2 + ۲ ف^2}{عہ^2 + بہ^2}$ جو مستقل ہے۔

اس لئے دفعہ ۵۴ کی رو سے مساوات سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے وہ مکانی ہے۔

مشقیں

۲۱۔ ثابت کرو کہ مساوات $ما = لا + ما$ ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے، اس کے رأس کے محدود معلوم کرو۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ مساوات $ما = لا + ما + ا$ ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے، اس کے رأس کے محدود معلوم کرو، نیز اس کے محور اور رأس پر کے تماس کی مساواتیں معلوم کرو۔

[مبدأ کو بدلنے سے ہم مساوات کو شکل $ما = لا$ میں لا سکتے ہیں، اب $لا = ۰$ اور $ما = ۰$ بالترتیب رأس پر کے تماس اور محور کی مساواتیں ہیں، پس مساوات کو پیرائے مبدأ کے لحاظ سے بدلو]

۲۳۔ ثابت کرو کہ $لا = لا + ب$ ما کی شکل کی مساوات ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور و ماس کے متوازی ہے۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ مثال ۲۳ میں مکانی کا رأس نقطہ $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ پر ہے۔

۲۵۔ مکانی $لا = لا + ما$ کا رأس، ماسک، مرتب معلوم کرو۔

[سب سے پہلے رأس اور وتر خاص کا طول معلوم کرو، پھر شکل کو استعمال کرو]

۲۶۔ ثابت کرو کہ مکانی (عہ $لا + ب$) $ما + ا + ب$ کا محور خط مستقیم عہ $لا + ب$ کے متوازی ہے۔

باب سوم پر متفرق مشقیں

۲۷۔ اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسک $(-۱, ۱)$ ہو اور مرتب $لا + ما = ۰$ ۔

۲۸۔ مشق ۲۷ کے مکانی کا وتر خاص معلوم کرو۔

۲۹۔ مکانی $ما = لا$ اور خط مستقیم $لا + ما = ۳$ کے نقاط تقاطع کے

محمد معلوم کرو۔

۳۰۔ وہ شرط معلوم کرو کہ خط ما = م لا + ج مکانی ما = م لا + ج (لا + پ) کو مس کرے۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ خط ما = م لا + ج مکانی ما = م لا + ج کو

$$\text{مس کرے گا اگر ج} = \frac{1}{\text{م لا}} (1 + \text{ب م}) + \frac{\text{ج م}}{1}$$

[لا کو ساقط کرو اور ما کے لئے مساوات درجہ دوم معلوم کرو]

۳۲۔ مکانی ما = م لا + ۱ اور خط مستقیم م لا - ما = ۲ کے نقاط تقاطع کے محمد معلوم کرو۔

۳۳۔ اگر مشق ۲۹ میں نقاط تقاطع ن اور ق ہوں تو ن ق کے وسطی نقطہ کے محمد معلوم کرو۔

[ملاحظہ ہو کہ اگر کے محمد ہوں (س، ص) ن کے (لا، لا) اور ق کے (لا، لا) تو س = $\frac{1}{2}$ (لا + لا) مسائل مساوات درجہ دوم استعمال کرو]

۳۴۔ اس مثلث مساوی الاضلاع کا ضلع معلوم کرو جو مکانی ما = م لا کے اندر بنایا جائے اور اس کا ایک رأس مکانی کے رأس پر واقع ہو۔

۳۵۔ ایک مثلث مساوی الاضلاع مکانی ما = م لا کے اندر بنایا گیا ہے اور اس کا ایک رأس ماسکے پر ہے، اس کے ضلع کا طول معلوم کرو۔

۳۶۔ ایک خط مستقیم مکانی کے ماسکے میں سے گزرتا ہے اور نخی سے ن اور ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن اور ق کے معینوں کا ضرب نصف وتر خاص کے مربع کے مساوی ہے۔

۳۷۔ اوپر کی مشق میں ثابت کرو کہ فضلوں کا حاصل ضرب ایک چوتھائی وتر خاص کے مربع کے مساوی ہے۔

۳۸۔ ثابت کرو کہ اگر ایک خط لا + ما = کے متوازی ہو تو مکانی لا + م لا + ما + م لا + م لا + م لا = کے ساتھ اس کے نقاط

تقاطع میں سے ایک لائن ہی پر ہوگا، اس لئے لا + ما = محور کے متوازی ہے۔
 ۳۹۔ مکانی کا محور لا جم عہ + ماجب عہ = ع۔ ہے، رأس پر کاماس
 لاجب عہ۔ ماجم عہ =۔ اور وتر خاص لم ل، ثابت کرو کہ مکانی
 کی مساوات

(لا جم عہ + ماجب عہ - ع) = لم ل (لا جب عہ - ماجم عہ)
 ہے جہاں علامت اس امر پر منحصر ہے کہ مکانی رأس پر کے ماس کے ایک
 طرف واقع ہے یا دوسری طرف -

[ضابطہ ن م = لم ل س x ل م استعمال کرو جہاں ن م محور پر
 عمود ہے اور ل م اس عمود کے مساوی ہے جو رأس پر کے ماس پر
 کھینچا جائے]

۴۰۔ اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جس کا محور لا + ما - ۲ =۔ ہے
 رأس پر کاماس لا - ما =۔ اور وتر خاص ما م، مکانی رأس پر کے
 ماس کے اس طرف واقع ہے جس طرف نقطہ (۱، ۲) ہے۔
 ۴۱۔ اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جس کے محور، رأس، اور وتر خاص
 سب وہی ہوں جو اوپر کی مشق میں لیکن یہ رأس پر کے ماس کی دوسری
 جانب واقع ہو۔

۴۲۔ ثابت کرو کہ اگر خط مستقیم لہ لا + مہ ما + نہ =۔ مکانی
 لم ن لا + م ن ق =۔ کو مس کرے تو لازماً
 لہ ق + لہ نہ = ن مہ =۔

آزمائشی پرچہ ۱

۱۔ جو خطوط مبادا کو لا + لا + ہا + ما + گ لا + ۲ ن ما =۔ اور ما = م لا + ج
 کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں ان کی مشترک مساوات معلوم کرو اور اسلئے
 اس کی شرط معلوم کرو کہ ما = ج، لا + لا + ہا + ما + گ لا + ۲ ن ما =۔ کا
 ماس ہو۔

۲۔ ا ب ج ایک مثلث ہے، د ع ایک متغیر خط ہے جو ب ج کے متوازی ہے اور ا ب کو د پر ا ج کو ع پر قطع کرتا ہے، ب ع اور ج د کے نقطہ تقاطع کا طر ق معلوم کرو۔

۳۔ اگر محور قائم ہوں تو بتاؤ کہ ان کو کس زاویہ میں سے پھرایا جائے،
کہ ۱ + ۲ ص لا + ب ماحملہ ۱ + لا + ب مائیں شخوئل ہو جاے
ایک سادہ ربطاً ۱ + ب، ۱ + ب میں حاصل کرو۔

۴۔ ثابت کرو کہ محوروں کی کسی تبدیلی سے مساوات کا درجہ نہیں بدلتا۔

۵۔ مثال دفعہ ۳۴ کی مانند (۱) مکانی لا^۲ = ۳ ما + ۷

(۲) منحنی $61 \dots = 4 + 3 + 2 + 1$ کو مرتبہ کرو۔

۶۔ منفی لا۔ ۲ + لا + ۳ + ما + لا = کو گھنچو اور (۱) مرتب کی سنا

(۲) وتر خاص کے سروں کے محمدؐ، معلوم کرو نیز محور ماپر کا منقطعہ معلوم کرنے سے اپنے کام کی تصدیق کرو۔

۷۔ ایک مکانی کا ماسک $(-1, -)$ ہے اور ترتیب $1 + 2 + 3 + \dots + n$ کے وتر خاص کا طول اور اسکی مساوات معلوم کرو۔

۸۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم $لا + ن + ما + ن = ۲$ ۔ مکافی $ما = ۴$ لا کو مس کرتا ہے، اس کا نقطہ تماس معلوم کرو۔

۹۔ ثابت کرو کہ مساوات

لاؤ + مھ لا ما ب ما گ لا + ن ما ج .

ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے اگر $\mu = 1$ ب

۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کا رقبہ جو مکافی ما = ۴ لاکھ اندر بنایا جائے۔

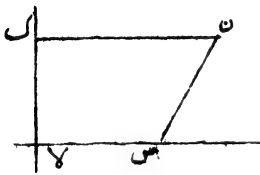
$$\frac{1}{18} (l \sim m) (m \sim n) (n \sim l)$$

جہاں ل، م، ن، راسوں کے مغین ہیں۔

باب چہام

قطع ناقص

۵۳۔ قطع ناقص، تعریفات۔ جب ایک نقطہ اسطرح حرکت کرے کہ اس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے ہمیشہ مستقل نسبت رکھتا ہو (جو ایک سے کم ہو) اُس عمودی فاصلہ کے ساتھ جو متحرک نقطہ اور ایک ثابت خط مستقیم کے درمیان ہے تو اس نقطہ کے طریق کو قطع ناقص کہتے ہیں۔



ثابت نقطہ کو ماسکہ اور ثابت خط مستقیم کو مرتب کہتے ہیں اور مستقل نسبت خروج المرکز کہلاتی ہے۔

خروج المرکز کو بالعموم صرف "ز" سے تعبیر کرتے ہیں قطع ناقص کی صورت میں نسبت ز ایک سے کم ہوتی ہے۔ مثلاً اگر ن کوئی نقطہ مخفی پر ہو اور ن ک عمود ہو مرتب پر تو

$$س ن = ز \times ن ک \dots \dots \dots (۱)$$

۵۴۔ قطع ناقص کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ س ماسکہ ہے لاک مرتب اور س لا اُس پر عمود ہے (دیکھو شکل ۲۱)

لا کو مبداء اور لا س لاک کو محور مانو

فرض کرو کہ خروج المرکز ز ہے اور س لا = ز

تب آگ نقطہ ن (جس کے محدد لا، مابین) مخفی پر ہو تو

$$س ن = ز \times ن ک$$

$$\therefore \text{سن} = \text{ر} \times \text{نک}$$

یعنی (لا - د) + ما' = ر لا'

$$\therefore \text{لا}' (1 - \text{ر}) + \text{ما}' = 2 \text{د لا} + \text{د}' = 0$$

جو ناقص کی مساوات مطلوب ہے۔

$$55 - \text{ناقص کی مساوات کی تحویل شکل} \quad \frac{\text{لا}'}{\text{ر}} + \frac{\text{ما}'}{\text{ب}} = 1 \text{ میں۔}$$

مبدأ کو بدلنے سے ہم مساوات دفعہ ۴ کو سادہ شکل میں لاسکتے ہیں جو عام طور پر استعمال ہوتی ہے، مساوات مذکورہ اسطرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$(1 - \text{ر}) \left\{ \text{لا}' - 2 \frac{\text{لا}}{\text{ب}} \right\} + \text{ما}' + \text{د}' = 0$$

لا کے لحاظ سے مربع کامل بنانے سے

$$(1 - \text{ر}) \left\{ \text{لا}' - \frac{\text{لا}}{\text{ب}} \right\}^2 = \text{د}' + \text{ما}' + \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2}$$

اب اگر ہم بنیاء میں لا پر کے ایک ایسے نقطہ پر لیں جو لا سے فاصلہ $\frac{\text{لا}}{\text{ب}}$ پر ہو اور نئے محور پرانے محوروں کے متوازی ہوں تو حصہ اول دفعہ ۳ کی رو سے اوپر کی مساوات ہو جائیگی

$$(1 - \text{ر}) \left\{ \text{لا}' - \frac{\text{لا}}{\text{ب}} \right\}^2 = \text{د}' - \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2}$$

$$\text{یا} \quad \text{لا}' - \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ما}'}{\text{ب}^2} + \frac{\text{د}'}{\text{ب}^2}$$

اب $\frac{\text{لا}}{\text{ب}}$ کو $\text{لا}'$ کے مساوی رکھو

تو $\text{لا}'$ پر دونوں جانب تقسیم کرنے سے اوپر کی مساوات ہوگی

$$1 = \frac{\text{ما}'}{\text{ب}^2} + \frac{\text{د}'}{\text{ب}^2}$$

اور $\text{لا}' (1 - \text{ر})$ کو ب کے مساوی رکھنے سے یہ مساوات ہوگی

$$\frac{\text{لا}'}{\text{ب}} + \frac{\text{لا}'}{\text{ب}} = 1 \quad (2)$$

$$\text{نتیجہ صحیح} \quad \text{ر} = 1 - \frac{\text{ما}'}{\text{ب}}$$

مثال - اس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۱۴) ہو

متناظر مرتب ۲ لا - ما = ۱ + ۰ اور خروج المركز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -
یہاں اگر ن کے محلہ لا، ما ہوں تو

س ن^۲ = (لا - ا^۲) + (دا - ا^۲) ن ک نقطہ ن سے مرتب پر
 نمود ہے = $\frac{۲ - لا - ما + ۱}{۲}$ ن ک
 لیکن س ن^۲ = ر^۲ × ن ک = $\frac{۱}{۲}$ ن ک
 اسلئے (لا - ا^۲) + (دا - ا^۲) = $\frac{۱}{۲}$ (۲ - لا - ما + ۱)
 مطلوبہ مساوات ہے مختصر کرنے اور رقموں کو ایک طرف لیجانے سے
 $۲لا + ۲لا - ما + ۹ - ۲۲ - ۲لا - ۱۸ + ۱۹ = ۰$

مشقیں

- ۱۔ اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۱۰۰) ہو مرتب
 $لا + ما = ۰$ اور خروج المکرز $\frac{۱}{۲}$
- ۲۔ اس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۱۰۰ - با^۲) ہو مرتب
 $لا = \frac{۱}{۲}$ ہو اور خروج المکرز $\frac{۱}{۲}$ - با^۲

۵۶۔ قطع ناقص کی شکل

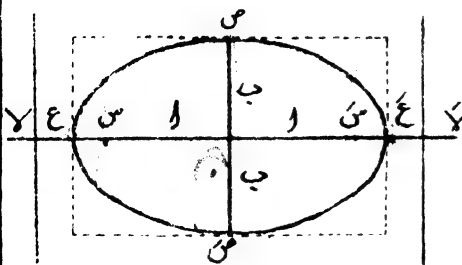
ناقص کی مساوات کی سادہ ترین صورت $۱ = \frac{لا}{۲} + \frac{با^۲}{۲}$ سے
 اس کی شکل آسانی حاصل ہو سکتی ہے۔
 مساوات سے ما^۲ = با^۲ (۱ - $\frac{لا}{۲}$)
 اور چونکہ ما^۲ کو لازماً مثبت ہونا چاہئے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$۱ - \frac{لا}{۲} > ۰$$

یعنی لا کی عددی قیمت ۱ سے بڑی نہیں ہے
 اسلئے ما کی قیمت با سے زیادہ نہیں ہوتی۔
 اوپر کی مساوات سے

$$ما = \pm \sqrt{\frac{با^{۲}{۲} (۲ - لا)}{۲}}}$$

اس لئے (۱) لا تعداد ۱ سے
 بڑا نہیں ہو سکتا۔



شکل ۲۲

(۲) لا = \pm ل سے حاصل ہوتا ہے ما = ب اب چونکہ خطوط لا = \pm ل سے ماکہ دونوں قیمتیں صفر کے مساوی حاصل ہوتی ہیں اس لئے یہ دونوں خط حماس ہیں۔
 (۳) لا کی کسی ایسی قیمت کے جواب میں جو ل سے کم ہو ماکہ دو مساوی اور مختلف علامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

پس منحنی بالتمام خطوط لا = + ل اور لا = - ل کے درمیان واقع ہے اور اگر اس کا کوئی وتر محور ما کے متوازی کھینچا جائے تو محور لا پر اس کی تنصیف ہوتی ہے یعنی منحنی محور لا کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

ایسی طرح مساوات لا = \pm $\frac{1}{2}$ ب - ما سے ہم حاصل کرتے ہیں کہ منحنی بالتمام خطوط ما = + ب اور ما = - ب کے درمیان واقع ہے اور محور ما کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ جب ایک محدود تعداد بڑھتا ہے تو دوسرا تعداد کم ہوتا ہے لہذا منحنی بیضوی شکل کا ہے ملاحظہ ہو شکل بالا۔

اگر محور لا پر نقطے ع اور ح ایسے لئے جائیں کہ ج ع = ج ح = ل جہاں ج مبدا ہے اور محور ما پر نقطے ص اور ص لئے جائیں جہاں ج ص = ج ص = ب

تو ع اور ص ص کو بالترتیب ناقص کے محور اعظم اور محور اصغر کہتے ہیں نقطہ ج مرکز کہلاتا ہے۔

نتیجہ صریح منحنی لا = $\frac{1}{2}$ ب + $\frac{1}{2}$ ب = ایسے اگر ب < ل تو صریحاً ناقص کا محور اعظم ب محور ما پر واقع ہوتا ہے اور محور اصغر لا محور لا پر اس صورت میں ناقص کے ماسکے محور ما پر واقع ہیں دونوں مرتب محور لا کے متوازی ہیں اور خروج مرکز مساوات ل = ب (۱ - ل) سے حاصل ہوتا ہے۔

مشقیں

۳۔ ذیل کے منحنیات کو ایک ہی شکل میں کھینچو۔

$$(۱) \frac{لا}{۴} + \frac{ب}{۴} = ۱ \quad (۲) لا = ۴ + ۴ = ۴ \quad (۳) ۴ لا + ۴ = ۴$$

۴۔ مشق ۳ میں جو منحنی دئے گئے ہیں ان میں سے ہر ایک کی صورت میں نیم محور اعظم (ج ح) کے نقطہ منصف پر جو منحنی کا معین ہے اس کا طول معلوم کرو۔
 ۵۔ ثابت کرو کہ نقطہ (طہ ک) ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے باہر واقع ہوگا اگر بالترتیب

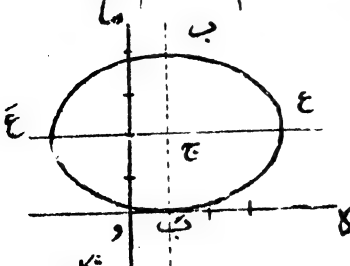
$$\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$$

۶۔ معلوم کرو کہ نقطہ $(\frac{لا}{ب}, \frac{ما}{ب})$ منحنیات
 (۱) $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$
 (۲) $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$
 کے باہر یا اندر واقع ہے اور منحنی کے ذریعہ اپنے جواب کی توضیح کرو۔
 ۷۔ ناقص کی مساوات ایسے محوروں کے لحاظ سے جو اصلی محوروں کے متوازی ہوں۔

$$۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

میں ناقص کا مرکز مبداء ہے اور منحنی کے محور حوالہ کے محور ہیں۔
 اکثر اوقات منحنی کی مساوات ایسے محاور کے لحاظ سے دی جاتی ہے جو منحنی کے محوروں کے متوازی ہو۔ تھے ہیں لیکن ان پر منطبق نہیں ہوتے۔ اس صورت میں منحنی کا مرتسم کرنا ایسا مشکل نہیں ہوتا۔ کافی کی صورت میں ہم نے مبداء کو مکانی کے رأس پر منتقل کرنے سے مرتسم حاصل کی قطع ناقص (۱) اور قطع زائد باب پنجم کو مرتسم کرنے کے لئے ہم مبداء کو منحنی کے مرکز پر منتقل کر نیئے ترکیب عمل ذیل سنگی مثالوں سے بخوبی واضح ہوگی۔

مثال ۱۔ منحنی $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کو مرتسم کرو۔ اگر ہم مبداء کو نقطہ



ج (۲) پر منتقل کریں تو مساوات ہو جائیگی
 $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ [حصہ اول دفعہ ۳]
 یہ صرفاً قطع ناقص ہے جس کے محور ۳
 اور ۲ ہیں۔

ابتدائی محوروں پر متطوعات کا طول

معلوم کرنے سے مشکل کی تصدیق کرو۔

$$لا = ۰ \text{ سے حاصل ہوتا ہے } \frac{(۲-۵)}{۳} = \frac{۱}{۳} - ۱ = \frac{۱}{۳}$$

$$یا ۵ = ۲ \pm \frac{۳}{۳۶} = ۳۵۸۸ یا ۵۱۲$$

$$اگر ۵ = ۰ \text{ تو } \frac{(۱-۲)}{۳} = ۱ - ۱ = ۱ \text{ یا } لا = ۱$$

مثال ۲۔ منحنی لا + م + م^۲ - ۲ لا - ۱۶ م + ۸ = ۰ کو مرتسم کرو۔
یہاں لا اور م کی رقوم میں کوئی عددی مقدار جمع کرنے سے انہیں مربع
کامل بناؤ، اسطرح م^۲ اور م کی رقوم کو بھی مربع کامل بناؤ

$$\text{تب } (لا^۲ - ۲ لا + ۱) + م (۲ - ۱۶ م + ۸) = ۰$$

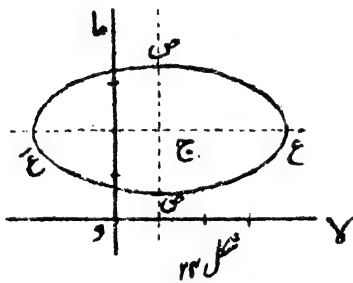
$$یا (لا - ۱)^۲ + م (۲ - ۱۶ م + ۸) = ۰$$

$$یا ۱ = \frac{(۲-۵)}{۳} + \frac{(۱-۲)}{۳}$$

مبدأ کو نقطہ (۱، ۲) منتقل کرنے سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$۱ = \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳}$$

جو صریحاً قطع ناقص ہے جس کے نصف محور ۳ اور ۲ ہیں ملاحظہ ہو شکل۔



یہ ابتدائی محور لا = ۰ کو کاٹتا ہے

$$\text{جہاں } م = ۱۶ - ۸ + ۸ = ۰$$

$$یا ۵ = ۲ \pm \frac{۳}{۳۶} = ۳۵۸۸ یا ۵۱۲$$

اور یہ محور م = ۰ کو کاٹتا ہے

$$\text{جہاں } لا = ۲ - ۸ + ۸ = ۰ \text{ یعنی}$$

نیالی نقاط پر۔

مثال ۳۔ منحنی لا + م + م^۲ - ۲ لا - ۳ م = ۰ کو مرتسم کرو۔

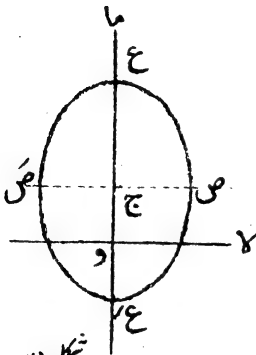
مثال ۲ کی طرح ہم رقوم کو اسطرح اکٹھا کرتے ہیں

$$۰ = م (۲ - ۳ م + ۱) + لا^۲$$

$$یا ۲ = \frac{(۱-۳)}{۳} + \frac{(۱-۲)}{۳}$$

$$یا ۱ = \frac{(۱-۳)}{۳} + \frac{(۱-۲)}{۳}$$

مبدأ کو نقطہ (۱، ۰) منتقل کرنے سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔



یہ قطع ناقص ہے جس کے نصف محور $\frac{a}{2}$ اور
 $\frac{b}{2}$ ہیں لیکن محور اعظم نے محور $\frac{a}{2}$ پر واقع ہوتا
 ہے منحنی شکل منسلک میں دیا گیا ہے۔
 ابتدائی محوروں پر نقطوں حاصل ہوتے ہیں

$$لا = ۰، تو ا = ۲، ب = ۳، یا ا = ۳، یا ا = ۱$$

$$اور ا = ۰، لا = ۱، یا ا = ۱، یا ا = ۱۵۲$$

مثال ۳۔ مثال ۲ میں جو منحنی دیا گیا ہے اُس کے لئے ابتدائی محوروں کے
 لحاظ سے (ا) خروج مرکز (ب) محور اعظم کے سروں کے محدود (ج) محور
 اصغر کے سروں کے محدود معلوم کرو۔

$$(ا) اس منحنی میں ل = ۳ اور ب = \frac{3}{4}$$

$$\therefore ل = ۱ - \frac{ب^2}{ا^2} = ۱ - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = ۱ - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \therefore ل = \frac{7}{16}$$

(ب) ج کے محدود ہیں (ا' ۲) اور ج ج ع محور لا کے متوازی ہے

نیز چونکہ ج ج ع = ج ج ع = ۳ اس لئے ع کے محدود (۳ + ۱، ۲)

یا (۲، ۲) ہیں اور ع کے (۱ - ۳، ۲) یا (۲ - ۲، ۲)

(ج) چونکہ ج ج ص = ج ج ص = \frac{3}{4} اور ص ج ص محور ما کے

متوازی ہے اس لئے ص اور ص کے محدود بالترتیب

$$(ا' ۲ + \frac{3}{4}) اور (ا' ۲ - \frac{3}{4}) یا (ا' \frac{3}{4}) اور (ا' \frac{1}{4}) ہیں۔$$

مشقیں

ذیل کے منحنیات کو مرتسم کرو

$$۷۔ لا = \frac{۲(۲-۱)}{۱} + \frac{۲(۱-۱)}{۹} - ۸ \quad ۸۔ لا = \frac{۲(۲-۱)}{۱} + \frac{۲(۱-۱)}{۹} - ۸$$

$$۹۔ لا = ۲ + ۲ - ۸ = ۰ \quad ۱۰۔ لا = ۲ + ۲ - ۸ = ۰$$

$$۱۱۔ لا = ۲ + ۲ - ۸ = ۰ \quad ۱۲۔ لا = ۲ + ۲ - ۸ = ۰$$

۱۳ تا ۱۸۔ امثلہ (۷-۱۲) میں جو منحنی دئے گئے ہیں ان میں سے ہر ایک کیلئے

(۱) خروج المركز (۲) محور اعظم کے سروں کے محدود (۳) محور اصغر کے سروں کے محدود معلوم کرو۔

۵۸۔ ناقص کی قطبی مساوات جبکہ مرکز قطب ہو۔
قطبی مساوات حاصل کرنے کیلئے ہمیں (حصہ اول دفعہ ۶) کی رو سے مساوات

$$1 = \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_3}$$

میں لا = رجم ط، ما = رجب طہ مندرج کرنا چاہئے۔

اس طرح حاصل ہوتا ہے $r_1 = \left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_3} \right) \times \text{جب طہ}$

یا $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ جو قطبی مساوات مطلوبہ ہے۔ (۳)

۵۹۔ قطبی مساوات سے منحنی کی شکل کا حاصل کرنا۔

مساوات (۳) کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \quad \text{جب طہ} \quad \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)$$

اب چونکہ $\frac{1}{r_1} < \frac{1}{r_2}$ اس لئے $\frac{1}{r_3} < \frac{1}{r_2}$

اس لئے جب زاویہ طہ صفر سے $\frac{1}{r_2}$ تک بڑھتا ہے تو بائیں طرف کا جلد بھی بڑھتا ہے اس لئے $\frac{1}{r_3}$ بڑھتا ہے یعنی ر کم ہوتا ہے پس جیسے زاویہ طہ صفر سے $\frac{1}{r_2}$ تک بڑھتا ہے ر بالترتیب کم ہوتا ہے اور ہر ربع میں یہی واقع ہوتا ہے یعنی محور اعظم کے ایک سرے سے محور اصغر کے سرے تک پہنچنے میں مسلسل کم ہوتا جاتا ہے۔

اس سے ہم منحنی کو قسّم کرنے کی ایک آسان ترکیب حاصل ہوتی ہے کیونکہ جہاں مرکز میں سے گزرنیوالا کوئی خط منحنی کو کاٹتا ہے اُن نقاط کا فاصلہ مرکز سے ہم آسانی معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک ناقص کے نیم محور ۲ اور ۱ ہیں، اُس سمتی قطر کا طول معلوم کرو جو محور اعظم سے ۵۴° کا زاویہ بنائے۔

منحنی کی کارٹیزی مساوات جبکہ محور اعظم اور اصغر حوالہ کے محور مانے جائیں

$$1 = \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_3}$$

اس لئے اگر مرکز قطب ہو تو قطبی مساوات سے

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{\text{جہا ط}} + \frac{1}{\text{جہم ط}} = \frac{1}{\frac{5}{8}}$$

اس لئے $r = \frac{5}{8}$ مثال ۲۔ قطع ناقص میں جو سمتی نیم قطر علی القوائم ہوں اُن کے مربعوں کے شکائیوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ سمتی نیم قطریہ ہیں r جو ج ع سے زاویہ طہ بناتا ہے اور p جو ج ع سے زاویہ (طہ + $\frac{\pi}{4}$) بناتا ہے تب

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\text{جہا ط}^2} + \frac{1}{\text{جہم ط}^2} = \frac{1}{\frac{5}{8}^2} + \frac{1}{\frac{5}{8}^2} = \frac{1}{\frac{5}{8}^2}$$

جمع کرنے سے

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\frac{5}{8}^2} + \frac{1}{\frac{5}{8}^2} = \frac{1}{\frac{5}{8}^2}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مشقیں

۱۹۔ مشق ۳ دفعہ ۵۶ کے منحنیات میں اُن سمتی نیم قطروں کا طول مرکز سے دریافت کرو جو محور اعظم سے (۱) ۴۵° (۲) ۶۰° کے زاویے بنائیں۔

۲۰۔ ایک ہی شکل میں منحنیات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ اور $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو یکپوٹو اس زاویہ کا ماس معلوم کرو جو مشترک سمتی نیم قطر نور لا کے ساتھ بناتا ہے اور اس نیم قطر کا طول معلوم کرو۔

۶۰۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص ایک دوسرا ماسکد اور ایک دوسرا مرتب رکھتا ہے۔

چونکہ منحنی بلحاظ ج ع اور ص ج ص کے متشاکل ہے اس لئے اگر ہم ج ع ج ع پر نقاط ملے اور لا ایسے ہیں کہ ج س = ج س اور ج لا = ج لا اور لا ک ج لا پر عمود کھینچیں تو ظاہر ہے کہ س دوسرا ماسک ہے اور لا ک دوسرا مرتب ہے اور ان کی مدد سے تمام قطع ناقص بعینہ اسی طرح مرتب ہو سکتا ہے جس طرح کہ س اور لا ک کی مدد سے۔

$$۶۱۔ ثابت کرو کہ ج لا = \frac{1}{2} \text{ اور ج س} = \frac{1}{2}$$

(۱) چونکہ ج ع اور ع منحنی پر واقع ہیں اس لئے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{س ع} = \text{ز ع} \times \text{لا} \\ \text{س ع} = \text{ز ع} \times \text{لا} \end{array} \right. \text{ شکل ۲۶} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ز}} = \frac{\text{ع}}{\text{لا}}$$

شکل ۲۶

ان دو نتائج کو جمع کرنے سے

$$\text{س ع} + \text{ع} = \text{س ع} + \text{ز (ع لا + لا ع)}$$

$$\text{س ع} + \text{ع} = \text{س ع} + \text{ع ع} = \text{ع} = ۱ \quad \text{لیکن}$$

$$\text{اور} \quad \text{ع لا} + \text{لا ع} = \text{لا ع} + \text{لا ع} = \text{لا ع} = ۲ \text{ ج لا}$$

$$\therefore ۱ = ۲ \times \text{ج لا}$$

$$\therefore \text{ج لا} = \frac{1}{2} \dots \dots \dots (۲)$$

(۲) نیز (۱) سے پل تفریق

$$\text{س ع} - \text{ع} = \text{س ع} - \text{ز (ع لا - لا ع)}$$

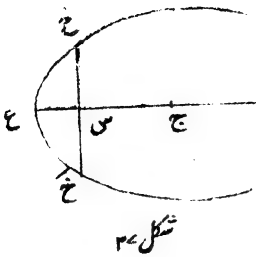
$$\therefore \text{س ع} - \text{ع} = \text{س ع} - \text{ع (ع لا - لا ع)}$$

$$\text{یعنی} \quad \text{س س} = \text{ز ع} \times \text{ع ع} \quad \text{یا} \quad ۲ \text{ ج س} = ۱ \times \text{ز}$$

$$\therefore \text{ج س} = \frac{1}{2} \dots \dots \dots (۵)$$

نتیجہ صریح۔ ج لا \times ج س = $\frac{1}{2} \times \text{ز} = \text{ز} = \text{ع} = \text{ج ع}$

۶۲۔ وتر خاص تقریباً۔ وتر خ س خ جو ماسک میں سے محور پر عمود وار کھینچا جائے ناقص کا وتر خاص کہلاتا ہے اس کو بالعموم



۲ ل سے تعبیر کرتے ہیں۔

$$\frac{ب^۲}{ا} = \text{نیم وتر خاص ل}$$

وتر خاص خ س خ کی نصف س پر ہوتی ہے اور چونکہ ج س = ل اور اس لئے

خ کے محدود (ل ز ل) ہیں

$$\text{اس لئے } \frac{ل}{ا} = \frac{ل}{ب} + \frac{ل}{ا} = 1$$

$$\therefore \frac{ب^۲}{ا} = 1 - \frac{ل}{ا} = \frac{ل}{ب}$$

$$\therefore \frac{ل}{ب} = \frac{ب^۲}{ا} \quad (۶)$$

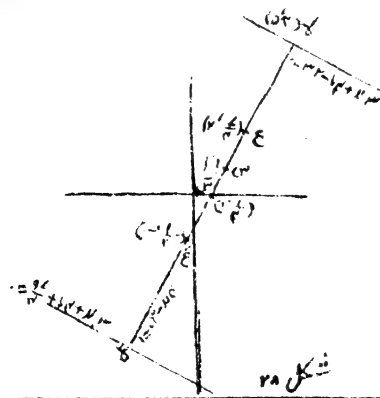
مثال۔ ایک قطع ناقص کا ماسکہ (۱) ہے مرتب ۳ لا + ۴ م - ۶۲ = ۳۲۔ اور خروج مرکز ۱ میں نقاط ع ع اور ج کے محدود اس کے محاور کے طول اور دوسرے ماسکہ اور مرتب کے مقام معلوم کرو نیز ناقص کی مسادات دریافت کرو۔

سب سے پہلے ناقص کی مسادات صریحاً

$$\left[(۱ - ۶) + (۱ - ۶) \right]^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲۵۶} = \frac{۳۲ - ۶۲ + ۳ لا}{۲۵۶} \text{ ہے۔}$$

$$۲۲۵ = \left\{ (۱ - ۶) + (۱ - ۶) \right\} (۳۲ - ۶۲ + ۳ لا)$$

$$\text{یعنی } ۲۱۶ لا - ۲۲ لا + ۶۲۰۹ - ۲۵۸ لا - ۱۹۳۶ - ۵۷۲ = ۰$$



مشقیں

۲۱۔ دفعہ ۵۶ کی شکل سے ثابت کرو کہ

$$\text{س ص} = \text{ع ج} = \text{ج س} = \text{ا ب}$$

۲۲۔ ایک ناقص کے نیم قطر ۴ اور ۳ ہیں، اُن سمتی نیم قطروں کے طول معلوم کرو جو محور اعظم سے بالترتیب زاویے ۳۰°، ۴۵° اور ۹۰° بنائیں۔

۲۳۔ اسی ناقص کا خروج مرکز اور وتر خاص معلوم کرو۔

۲۴۔ اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۱، ۲) ہے، مرتب $لا + ما + ا = ۰$ اور خروج مرکز $\frac{1}{3}$ ہے، اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو $[ل = ز \times ماسکہ سے مرتب پر کے عمود کا طول]$

۲۵۔ مشق ۲۴ میں جو قطع ناقص حاصل ہوتا ہے اس کے محور اعظم اور محور اصغر کے طول معلوم کرو۔

۲۶۔ اسی ناقص کے محور اعظم کے سروں کے محدودوں کے طول معلوم کرو۔

۲۷۔ اوپر کے ناقص کا دوسرا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

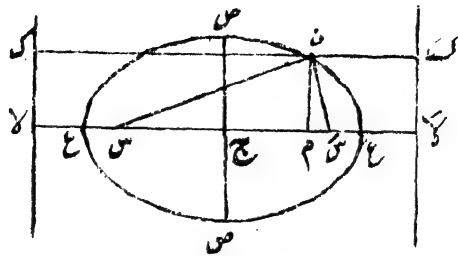
۲۸۔ اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(\frac{1}{3}, ۰)$ ہے مرتب $لا + م + ا = ۰$ اور خروج مرکز $\frac{1}{3}$ ہے۔

۲۹۔ اگر ایک ناقص کے نیم محوروں کے طول اور ان کے مقام دے دیے ہوں تو بتاؤ کہ ماسکے اور مرتب کس طرح معلوم ہو سکتے ہیں۔

۳۰۔ ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ محور اعظم کے مساوی ہوتا ہے فرض کرو کہ ن کے محدود (لا، ما) ہیں، ن م مبین ہے اور ن ک ن ک مرتبوں پر عمود ہیں تب

$$\text{س ن} = \text{ز} \times \text{ن ک} = \text{ز} \times \text{م لا} = \text{ز} (\text{ج لا} + لا)$$

$$= \text{ز} \left(لا + \frac{1}{ز} \right) \text{ چونکہ ج لا} = \frac{1}{ز}$$



شکل ۲۹

$$\therefore \text{سن} \times \text{ن} = \text{ر} + \text{ز لا}$$

$$\text{اسی طرح سن} \times \text{ن} = \text{ر} \times \text{ن ک} = \text{ز} \times \text{م لا} = \text{ز} (\text{ج لا} - \text{ج م})$$

$$= \text{ز} (\text{بلے} - \text{لا}) = \text{ز لا} - \text{ز لا}$$

$$\text{اور اس لئے سن} \times \text{ن} + \text{سن} \times \text{ن} = \text{ر} + \text{ز لا} + \text{ز لا} - \text{ز لا}$$

$$\therefore \text{سن} \times \text{ن} + \text{سن} \times \text{ن} = ۲ \text{ سن} \times \text{ن} \dots \dots (۷)$$

۴۶۔ برعکس اس کے اگر ایک نقطہ ایک معلومہ سطح مستوی میں اسطرح حرکت کرے کہ اس سطح پر کے دو ثابت نقاط سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ متقل ہو تو یہ نقطہ ایک ناقص مرتسم کریگا۔

نقاط سن اور سن کو ملانے والے خط کو محور لا اور سن سن کے نقطہ تنصیف کو مبدأ مانو، اسطرح سن اور سن کے محدوبہ بالترتیب (ج، ۰) اور (ج، ۰) سے تعبیر ہو سکتے ہیں۔

اگر مثنی پر کوئی نقطہ ن (لا، ما) ہو تو

$$\text{سن} \times \text{ن} + \text{سن} \times \text{ن} = \text{سنقل} = ۲ \text{ (فرض کرو)}$$

$$۲ = \sqrt{۲ + ۲(ج - لا)} + \sqrt{۲ + ۲(ج + لا)}$$

$$\text{اور سن} \times \text{ن} + \text{سن} \times \text{ن} = \text{سن} \times \text{ن} \text{ یا } ۲ \times ۰$$

ترتیب بدسنے سے

$$\sqrt{۲ + ۲(ج - لا)} - ۲ = ۲ - \sqrt{۲ + ۲(ج + لا)}$$

$$\sqrt{۲ + ۲(ج + لا)} = ۲ - \sqrt{۲ + ۲(ج - لا)} \quad \text{مربع}$$

ترتیب بدلنے اور ہم پر تقسیم کرنے سے میں حاصل ہوتا ہے

$$1 = \frac{(a-b)^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - 2ab + b^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{a^2}$$

دوبارہ مربع لینے سے $\frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} - \frac{2ab}{a^2} + \frac{2b^2}{a^2} = 1 - \frac{2b}{a} + \frac{2b^2}{a^2}$ یعنی $1 - \frac{2b}{a} + \frac{2b^2}{a^2} = \frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{a^2}$

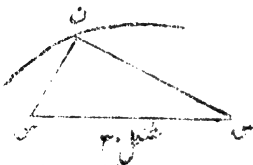
$$1 = \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

چونکہ $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1$ اس لئے یہ ایک ناقص ہے جس کے واسطے (ج)۔

(دیکھو دفعہ ۶۱)

۶۵۔ ناقص کی آلی ترسیم۔ دفعہ ۶۴ سے ہمیں ناقص کے مترسم کرنیکی آلی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

ایک تاگہ سن ن سن لو اور اس کے سروں سن سن کو دو کیلوں کیساتھ جو ایک کاغذ پر ثابت کر دئے گئے ہیں مضبوطی سے باندھ دو۔ پھر ایک انتصابی پینل کے ذریعہ تاگے کو تانے رکھو پینل کو حرکت دینے سے ایک ناقص مترسم ہوگا جس کے واسطے سن اور سن ہیں اور جس کا محور اعظم سن ن + سن ن = تاگے کا طول



نوٹ ناقص کے نیچے حصہ کو مترسم کرنے کے لئے تمام تاگے کو سن سن کے نیچے لاتا پڑیگا اور پینل اس صورت میں تاگے کے اوپر رہیگی۔

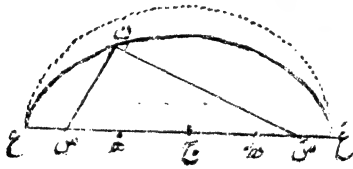
مشقیں

۳۰۔ ایک نقطہ اسطرح حرکت کرتا ہے کہ دو نقاط سن اور سن سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ ہمیشہ ۱۰ رہتا ہے اور سن سن = ۸، اس نقطہ کے طریق کی سادہ مساوات معلوم کرو۔

۳۱۔ مثال ۳۰ میں برعکس حال ہوتا ہے اس کا ضریح المرکز اور اسکے نیم وتر خاص کا طول معلوم کرو۔

۶۶۔ سب قطع ناقص ایک ہی شکل کے نہیں ہوتے (مقابلہ کرو نتیجہ صیح دفعہ ۳۹ کے ساتھ)
 فرض کرو کہ تاگے $س ن س$ کے ذریعہ اور ماسکوں $س س$ کے
 لحاظ سے ہم نے ناقص $ع ن ع$ کو مرسم کر لیا ہے اور اب ہم تاگے کے
 سروں کو $س س$ پر کے دو نقاط $ھ$ اور $ھ$ پر باندھتے ہیں جہاں
 $س ھ ھ س$

تب ظاہر ہے کہ $ھ ن ھ$ باعموم $س ن س$ کے
 مساوی نہیں ہے اور اس لئے $ھ ھ$ کو ماسکے مان کر جو غنی کھینچا جائیگا وہ
 باعموم $ن$ میں سے نہیں گزریگا۔



شکل ۳۱

اسی طرح یہ ناقص $ع ن ع$ کے کسی اور نقطہ میں سے نہیں گزریگا سوائے
 $ع$ اور $ع$ کے [اس لئے غنی ایک دوسرے کو قطع نہیں کریں گے]
 اس لئے نیا غنی ایک اور قطع ناقص ہوگا جس کا محور اعظم $ع ع$ ہوگا اور جو
 ناقص $ع ن ع$ کے باقیام اندر یا باہر واقع ہوگا سوائے نقاط $ع$ اور $ع$ پر
 جہاں یہ غنی ایک دوسرے کو مس کریں گے اس سے معلوم ہوا کہ یہ ناقص ایک ہی
 شکل کے نہیں ہیں۔

نوٹ نیا غنی اندر واقع ہوگا اگر $ھ ھ$ خط $س س$ میں محدودہ پر واقع ہیں اور باہر ہوگا اگر
 $ھ ھ$ خط $س س$ کے اندر ہوں۔ یہ امر $ن$ کے اُس مقام پر غور کرنے سے ثابت ہو سکتا
 ہے جبکہ $ن$ محور اصغر پر واقع ہو غنی $س س$ کے دونوں حصے $س س$ کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں۔
 ۶۷۔ دائرہ ناقص کی انتہائی صورت ہے۔

اگر دفعہ ۶۶ کے دو ثابت نقطے ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں تو طریق صریح کے
 نصف قطر کا ایک دائرہ ہے اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ
 اگر ایک ناقص کے ماسکے ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں تو ناقص ایک ایسا دائرہ

بن جاتا ہے جس کا مرکز نقطہ انطباق پر ہوتا ہے۔
 دفعہ ۶۴ کی مساوات سے بھی یہ ظاہر ہے کیونکہ اگر ثابت نقطہ منطبق ہو جائیں تو ج = ۰۔
 اور مساوات ہو جاتی ہے $لا + ما = لا$ جو نصف قطر $لا$ کا ایک دائرہ ہے اور
 جس کا مرکز مبدأ پر ہے۔

نیز چونکہ ج س = $لا$ اور دائرہ کی صورت میں ج س = ۰۔
 ہم دیکھتے ہیں کہ

دائرہ کی صورت میں خروج المرکز صفر ہوتا ہے

نیز دائرہ کیلئے ج لا = $\frac{لا}{ب}$ اور اس لئے

دائرہ کے مرتب مرکز سے غیر متساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

۶۸۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم ما = م لا + ج ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$
 سے دو نقاط (حقیقی یا خیالی) پر ملتا ہے۔ نیز وہ شرط معلوم کرو کہ خط مذکور ناقص کو مس کرے
 ان طریقوں کے نقاط مشترک معلوم کرنے کے لئے ہمیں مساواتوں

$$ما = م لا + ج \quad اور \quad \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$$

کو ایک ساتھ حل کرنا چاہئے۔

دوسری مساوات میں ما کو م لا + ج کے مساوی رکھنے سے ہمیں ذیل کی

$$مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے \quad \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = \frac{م(لا + ج)}{ب} \quad ۱ = \frac{م(لا + ج)}{ب}$$

$$یا \quad لا \left(\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} \right) = م(لا + ج) \quad ۲ = \frac{م(لا + ج)}{ب} \quad ۱ = \frac{م(لا + ج)}{ب} - ۱$$

اس مساوات سے لا کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور لا کی ہر قیمت کے جواب

میں مساوات ما = م لا + ج سے ما کی ایک قیمت نکلتی ہے

پس خط مستقیم ما = م لا + ج اور ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$ کے
 دو نقاط تقاطع ہوئے۔

لا کی قیمتیں حقیقی، منطبق یا خیالی ہوں گی اگر باتر ترتیب

$$\frac{لا}{ب} - \left(\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} \right) \left(\frac{لا}{ب} - ۱ \right) \geq ۰$$

[یوٹوریل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۵۹]

یعنی اگر $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

یا اگر $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

اس لئے اگر $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ تو یہ نقاط تقاطع ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اس لئے خطوط

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ (۸)

م کی تمام قیمتوں کے لئے ناقص کو مس کرتے ہیں۔ دوسری علامت یہ تعبیر کرتی ہے کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ کے متوازی دو ماس ہیں۔

چونکہ ناقص ایک بندھنی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ کوئی حقیقی خط یا اسکو غیر نقیضی فاصلہ پر قطع نہیں کر سکتا۔ یہ امر اوپر کی مساوات درجہ دوم سے بھی ظاہر ہے کیونکہ $\frac{1}{2}$ میں اگر اس کی ایک اسل لا ستاہی ہو تو

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. [یوٹوریل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۶۶]
جس سے $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ جو خیالی ہے۔

مشقیں

۳۲۔ ابتدائی اصولوں سے وہ شرط معلوم کرو کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ کو مس کرے اور نقطہ تماس کے محدد معلوم کرو۔

۳۳۔ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ کے اُن ماسات کی مساواتیں معلوم کرو جو محور اعظم سے 5° کا زاویہ بناتے ہیں۔

۳۴۔ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ کے اُن ماسات کے نقاط تماس کے محدد معلوم کرو جو محور اعظم سے ساتھ زاویہ 5° بناتے ہیں اور ثابت کرو کہ ان نقطوں کو ملانے والا خط مرکز میں سے گزرتا ہے۔

۶۹۔ ثابت کرو کہ ناقص کی مساوات درجہ دوم کی مساوات ہے خواہ حوالہ کے محور کچھ ہی ہوں اور اگر درجہ دوم کی قیمتیں حسب معمول

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

ہوں تو

اب < ج

مسافات کی سادہ سے سادہ شکل $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$ ہے اب کسی نئے محوروں کے لحاظ سے مساوات کو تبدیل کرنے کے لئے ہمیں $\frac{1}{2}$ کی بجائے نئے محوروں کے خطی تفاعل مندرج کرنے چاہئیں اس لئے نئی مساوات اس شکل کی ہوگی

$$I = \frac{(L_1 + M_1 + N_1)}{r_1} + \frac{(L_2 + M_2 + N_2)}{r_2}$$

درجہ دوم کی زمیں $\frac{(ل + لا + م + ما)}{۲} + \frac{(ل + لا + م + ما)}{۲}$

ہیں یعنی دو مربعوں کا مجموعہ، پس جملہ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ کا جواب $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ کے

اجزاء کے ضربی خیالی ہیں اور اس لئے $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
 ان دو مساواتوں کا مقابلہ کرنے سے $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ کی جو تین فی الحقیقت
 معلوم ہوں ہم ان کے لئے اس کی تصدیق کر سکتے ہیں کہ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

$$\frac{\frac{1}{2} \text{ ل. م. }}{\frac{1}{2} \text{ م. }} + \frac{\frac{1}{2} \text{ ل. م. }}{\frac{1}{2} \text{ م. }} = \frac{1}{2} \text{ م. } + \frac{1}{2} \text{ م. } = \text{ م. } \quad \frac{\frac{1}{2} \text{ ل. ب. }}{\frac{1}{2} \text{ م. }} + \frac{\frac{1}{2} \text{ ل. ب. }}{\frac{1}{2} \text{ م. }} = \text{ ب. }$$

اسے اب - ۲ =

۱۔ (ل۔م۔ل۔م) جو مربع کامل ہونکی وجہ سے صریحاً مثبت ہے۔

۷۰۔ اگر محور قائم ہوں تو اوپر کے نتیجہ کو ہم اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں

فرض کرو کہ (لا، ما) مانسک ہے اور لا جمع عہ + ما جب عہ - ع = .
 متناظر مرتب ہے۔ اگر منہی پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو

$$(ع - ع) + (ج - ج) = (ع - ع) + (ج - ج)$$

یا مجمع لینے سے

$$(لا - لا) + (ما - ما) = (لا جمعه + ما جب عه - ع)$$

درجہ دوم کی رقمیں ہیں

لا (۱- ز ج م ع) - ۲ لا ما ز ج ب ع جم ع + ما (۱- ز ج ب ع)
اسکے حسب معمول طریق کتابت کے موافق
۱ = ۱- ز ج م ع ب = ۱- ز ج ب ع ص = ۲- ز ج ب ع جم ع
جس سے ۱ ب = ص = ۱- ز
جو ضریراً مثبت ہے کیونکہ ز ایک سے کم ہے۔

اسکے بعد (باب ششم میں) ہم دیکھیں گے کہ اگر ۱ ب < ص
تو مساوات ۱ لا + ۲ ص لا ما + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج =
ہمیشہ ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے اس جگہ ہم نے اس مسئلہ کا سرن عکس ثابت کیا ہے۔
مشق ۳۵- منی لا + ما = اکولو (محور قائم فرض کئے گئے ہیں) اس کی
مساوات معلوم کرو جب مبدأ کو نقطہ ۱ پر منتقل کیا جائے۔ پھر دیکھو کہ جب
اس کے محور کو ۲ میں سے گھمایا جائے تو اس کی مساوات کیا ہو جاتی ہے۔
اس طرح بتاؤ کہ تینوں صورتوں میں ۱ ب < ص اور اس سے دفعہ ۶۹ کی تصدیق

باب چہارم پر متفرق مشقیں

۳۶- ایک ناقص کا ماسک میں اور متناظر اس دونوں معلوم ہیں ثابت
کرو کہ محور اصغر کے سروں کا طریق ایک مکانی ہے جس کا ماسک میں پر ہے۔
[استعمال کرو ربط میں ص = ع ج]

۳۷- ثابت کرو کہ خط مستقیم ل لا + م ما = ۱ ناقص کو مس کرتا ہے
بشرطیکہ لا + ب م = ۱

۳۸- خط مستقیم لا + ما = ۲ سے قطع ناقص کا جو حصہ کٹتا ہے اس کے
نقطہ تنصیف کے محدد معلوم کرو۔

۳۹- اگر ل لا + م ما = ۱ قطع ناقص کو حقیقی نقاط پر قطع کرے تو ثابت
کرو کہ مقطوعہ کے نقطہ تنصیف کے محدد ہیں

$$\frac{لا + ب م}{لا + ب م} = \frac{لا + ب م}{لا + ب م}$$

۴۰۔ دو دائرے ہیں جن میں سے ایک دوسرے کے بالکل اندر واقع ہے اگر ایک اور دائرہ اندرونی دائرہ کو خارجاً اور بیرونی دائرہ کو داخلً مس کرے تو ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا طریق ایک قطع ناقص ہے جس کے ماسکے دو مفروضہ دائروں کے مرکوزوں پر واقع ہیں۔ [دیکھو کہ فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہے]

۴۱۔ ناقص ۲ (لا-۱) $+ ۳$ ما $= ۴$ کا خروج المکرز اسکے وتر خاص کا طول اور اسکے ماسکوں کے محدود معلوم کردہ ایک شکل میں منحنی کو کمیچو۔

۴۲۔ اُن خطوط کی مسادات معلوم کر دو مبدأ کو خط متقیم لا جمعه + مابعد - ع = ۰ اور ناقص $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۱}{۲}$ = ۱ کے نقاط تقاطع سے ملائیں اور اس سے دکھاؤ کہ اگر اس وتر کے مقطوع کے سامنے مرکز پر زاویہ قائمہ بنے تو وتر ایک ایسے دائرہ کو مس کریگا جو ناقص کے ساتھ ہم مرکز ہوگا اور جس کا نصف قطر $\frac{۱}{۲}$ ہوگا۔

۴۳۔ خطوط ۳ لا + ۲ ما + ۵ = ۰ اور ۸ لا + ۹ ما - ۱۲ = ۰ میں سے کونسا خط مبدأ کے زیادہ قریب ہے کیا ان میں سے کوئی خط منحنی ۲ لا + ۲ ما = ۳ سے ملتا ہے؟

۴۴۔ ایک رسی کا حلقہ اسطوانہ کی شکل کے دو کیلوں اور ایک نیل کے گرد ہو کر گزرتا ہے اسطوانوں کے ایسا کو ٹوٹو رکھ کر اور یہ فرض کر کے کہ ان کے نصف قطر مساوی ہیں ثابت کرو کہ اگر رسی کو تانے رکھا جائے اور نیل کو حرکت دی جائے تو اس کا سرا ایک ناقص کو مرسم کریگا بشرطیکہ عین نیل کے مرکز پر ہو۔

۴۵۔ ناقص کے ایک وتر $ن$ کا نقطہ تنصیف $ص$ ہے $ص$ ک مرتب پر عمود ہے اور $س$ متناظر ماسکے ہے ثابت کرو کہ

$$س + ن = س ن = ۲ ن ر \times ص ک$$

اس سے حاصل کرو کہ ایک ایسے وتر کے نقطہ تنصیف کا طریق جس کے سروں کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو ایک ایسا خط ہے جو محور اصغر کے متوازی ہے۔

۴۶۔ اگر $س$ ، $ن$ ایک ناقص کے ماسکے ہوں اور $ن$ کوئی نقطہ منحنی پر ہو تو ثابت کرو کہ $مس \frac{۱}{۲} ن س س مس \frac{۱}{۲} ن س = ۱ + \frac{۱}{۲} ن$

برعکس اسکے اگر ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدہ پر کے نیم زاویوں کے ماسوں کا حاصل ضرب دونوں معلوم ہوں تو ثابت کرو کہ اس کا دُراس ایک ایسے ناقص پر واقع ہوتا ہے جس کے ماسکے قاعدہ کے سرے ہیں۔

$$\left[\text{ربط مس } \frac{1}{p} = \frac{(ن-ب)(ن-ج)}{(ن-ا)} \right] \text{ کو استعمال کرو}$$

۴۷۔ ذیل کے ناقصوں کے خروج المرکز ماسکے اور مرتب معلوم کرو

$$(۱) \text{ لا}^۲ + \text{ما}^۲ = ۶ \text{ لا} \quad (۲) \text{ لا}^۲ + \text{ما}^۲ = ۵ \text{ لا}$$

۴۸۔ اگر مستقل طول کی ایک سلاح اس طرح حرکت کرے کہ اس کے سرے ہمیشہ دو ثابت علی القوائم خطوط مستقیم پر رہیں تو اس پر کا کوئی نقطہ ایک ناقص مرتسم کرے گا۔

۴۹۔ مخروطی تراش لا + ما = نڈ (لا جم ع + ما جب ع - ع) کے ماسوں کے محدد اور اس کے مرتبوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۵۰۔ قائم محوروں کے لحاظ سے ایک ایسے ناقص کی مسادات معلوم کرو جو مبدأ میں سے گزرے جس کا خروج المرکز $\frac{1}{p}$ ہو اور جس کا ماسکہ لا + ما = لا = ۰۔

۵۱۔ ناقص $\frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲} = ۱$ کی مسادات معلوم کرو جبکہ نقطہ (۰، ۱) کو مبدأ قرار دیا جائے اور محوروں کی سمتیں نہ بدلیں۔

اس سے حاصل کرو کہ مسادات ما = ۲ فن لا + ق لا ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے اگر ق منفی ہو نیز ثابت کرو کہ وتر خاص کا طول ۲ فن ہے اور خروج المرکز $\frac{۱}{۲}$ - ق ہے اگر ق = ۰ تو مسادات کیا تعبیر کرتی ہے۔

۵۲۔ اگر ناقص $\frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲} = ۱$ پر کے دو نقاط ن اور ق کے فصلے لا، لا ہوں اور محور اعظم پر دو نقطے ن، ق ایسے لئے جائیں کہ ان کے فصلے ز لا، ز لا ہوں تو ثابت کرو کہ ن ق = ن ق

باسپنجم

قطع زائد

۷۱۔ قطع زائد۔ تعریفات۔ قطع زائد ایک ایسے متحرک نقطہ کا طریق ہے جس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے ہمیشہ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے (جو ایک سے بڑی ہوتی ہے) اس عمودی فاصلہ کے ساتھ جو نقطہ مذکورہ اور ایک ثابت نقطہ مستقیم کے درمیان ہے۔
 ثابت نقطہ کو ماسکہ کہتے ہیں اور ثابت خط مستقیم کو مرتبہ اور مستقل نسبت خروج المرکز کہلاتی ہے، قطع زائد کی صورت میں یہ مستقل نسبت یعنی خروج المرکز ایک سے بڑی ہوتی ہے۔
 ۷۲۔ قطع زائد کی مساوات

[طریقہ بالکل وہی ہے جو ناقص کی صورت میں استعمال ہوا]

فرض کرو کہ $س$ ماسکہ ہے اور

لاک متناظر مرتبہ ہے، $س$ سے

$س$ لاک مرتبہ پر عمود نکالو۔

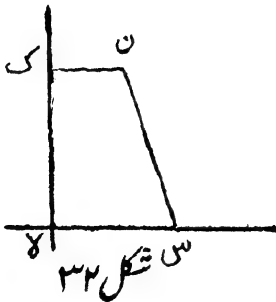
لاکو مبدأ مانو اور فرض کرو کہ $س$ کے

محدد (۵، ۶) ہیں، تب جیسا قطع ناقص

کی صورت (صفحہ ۵۴) میں عمل ہوا۔

$$س \times ن = ز \times ن ک$$

$$س \times ن' = ز' \times ن ک'$$



$$\therefore (لا - د) + ما = ز لا$$

$$یا لا (۱ - ز) + ما - د لا + د = ۰$$

فوق صرف یہ ہے کہ اس جگہ $ز < ۱$

$$۳ - قطع زائد کی مساوات کی تحویل شکل $\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{ز} = این$$$

[طرز عمل وہی ہے جو ناقص کے لئے]

جو مساوات دفعہ ۲ میں معلوم ہوئی اُسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$(۱ - ز) \{ لا - د \} + ما = ز لا + د = ۰$$

یا بحفاظ لا کے مربع کامل بنانے سے

$$(۱ - ز) \{ لا - د \} + ما + د = ز لا + د = ۰$$

لیکن چونکہ $ز < ۱$ اس لئے ہم اسے اس طرح لکھتے ہیں

$$(ز - ۱) \{ لا + د \} - ما - د = ز لا + د = ۰$$

اگر نقطہ $(- \frac{د}{ز - ۱}, ۰)$ کو نیا مبدأ قرار دیا جائے تو

$$(ز - ۱) لا - ما = ز لا + د = ۰ \quad [حصہ اول دفعہ ۳]$$

$$یا لا - \frac{ما}{ز - ۱} = \frac{د ز}{(ز - ۱)}$$

$$اب رکھو $\frac{د ز}{(ز - ۱)}$$$

طرفین مساوات کو $لا$ پر تقسیم کرنے سے

اور لا (ز - ا) کو ب^۲ کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{لا^۲}{ب^۲} - \frac{لا^۲}{(ز - ا)^۲} = ۱ \dots \dots \dots (۱)$$

$$\frac{لا^۲}{ب^۲} + ۱ = ز$$

مثال - اس قطع زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا مرتب ۲ لا + ما = ۱ ہو،
ماسک (۲، ۱) اور خروج مرکز ۳
اگر نقطہ ن (لا، ما) نخنی پر واقع ہو تو

$$س ن = (لا - ا) + (۲ - ما)$$

ن ک = اس عمود کا طول جو (لا، ما) سے خط ۲ لا + ما = ۱ پر کھینچا جائے

$$= \frac{۲ لا + ما - ۱}{۵}$$

اس کی مساوات مطلوبہ ہے (لا - ا) + (۲ - ما) = ۱
یا تحویل کے بعد ۷ لا + ۱۲ لا - ما - ۲ ما - ۲ لا + ۱۲ ما - ۲۲ = ۰

مشقیں

۱۔ اس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسک (۲، ۰) ہو، مرتب لا + ما = ۱
اور خروج مرکز ۳ -

$$۲۔ اگر زائد کا ماسک (۱، ۱) ہو، مرتب لا = \frac{لا^۲}{لا + ب^۲}$$

اور خروج مرکز \frac{لا + ب^۲}{۱} تو ثابت کرو کہ

اس کی مساوات $\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲} = ۱$ ہے۔

۳۔ اگر ایک زائد کا ماسکہ مبداء ہو، مرتب $لا + ۲ = ۰$ اور خروج المرکز ہو تو اسکی مساوات معلوم کرو۔

۴۔ ثابت کرو کہ ذیل کی ہر ایک مساوات قطع زائد کو تعبیر کرتی ہے ان کے نصف محوروں کے طول معلوم کرو۔
 $لا - \frac{ما}{۲} = ۱$ ، $\frac{لا}{۲} - \frac{ما}{۳} = ۲$

۳ لا۔ ۴ ما = ۵ ، ۱ لا۔ ۲ ما = ۳ (جہاں ۱، ۲، ۳ ج مثبت ہیں)
 [ہر مساوات کو شکل $\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲} = ۱$ میں تبدیل کرنا چاہئے۔ یعنی

اگر ۲ لا۔ ۴ ما = ۳ تو $\frac{لا}{۲} - \frac{ما}{۴} = \frac{۳}{۲}$ یا $\frac{لا}{۴} - \frac{ما}{۳} = ۱$ یہ مساوات ایک زائد کو تعبیر کرتی ہے جس کے نصف محور $\frac{۳}{۲}$ اور $\frac{۳}{۳}$ ہیں]
 ۵۔ مشق ۴ میں جو زائد دئے گئے ہیں ان کے خروج المرکز معلوم کرو

[استعمال کرو $۱ = \frac{ما}{۲} + \frac{لا}{۱}$]

۴۔ منحنی کی شکل۔ جیسا دفعہ ۵۶ قطع ناقص کی صورت میں ہم نے

دیکھا مساوات $\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲} = ۱$ سے ہمیں منحنی کی شکل کا اچھا اندازہ ہو سکتا ہے۔

مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = ب' \left(۱ - \frac{لا}{۱} \right)$$

چونکہ ما لازماً مثبت ہے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{لا}{۱}$ ایک سے کم نہیں

ہو سکتا یعنی لا تعداداً \neq سے کم نہیں ہو سکتا۔

$$\text{نیز } لا = لا' (1 + \frac{لا}{لا'})$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ماکہ قیمت پر کوئی قید نہیں، فی الحقیقت ماکہ قیمت کچھ ہی ہو سکتی ہے، نیز مساواتوں

$$لا = \pm \frac{ب}{لا'} \quad لا' = لا \pm \frac{لا}{ب}$$

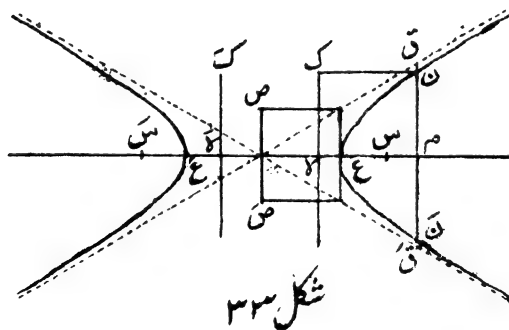
سے ہم یہ نتائج اخذ کرتے ہیں۔

(۱) لا تعداداً \neq سے کم نہیں ہو سکتا

(۲) لا = لا' سے حاصل ہوتا ہے لا = لا'۔

(۳) لا کی کسی ایسی قیمت کے جواب میں جو \neq سے بڑی ہو ماکہ دو مساوی اور مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۴) ماکہ کسی قیمت کے جواب میں لا کی دو مساوی اور مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔



شکل ۳۳

اس لئے منحنی بلحاظ دونوں محوروں کے متشاکل ہے اور خطوط لا = لا' اور لا = لا' کے باقیات باہر واقع ہے۔

ہر ایک ایسے دو ترکیبیت جو ایک محور کے متوازی ہو دوسرے محور پر ہوتی ہے۔

اگر نقاط ع اور غ محور لا پر ایسے لئے جائیں کہ

$$ج ع = ج غ = ل$$

اور ص ص محور سا پر ایسے لئے جائیں کہ

$$ج ص = ج ص = ب$$

تو ع غ اور ص ص کو محور کہتے ہیں۔ بعض اوقات انہیں بالترتیب محور اعظم اور محور اصغر کہتے ہیں جیسا ناقص کی صورت میں، لیکن یہ ضروری فرق ملحوظ رکھنا چاہئے کہ ناقص میں ص اور ص منحنی پروجہ ہوتے ہیں لیکن زائد کی صورت میں یہ منحنی پروجہ نہیں ہوتے۔ اس لئے ع غ کو عام طور پر تقاطع محور کہتے ہیں اور ص ص کو مزدوج محور۔

$$\text{علاوہ اس کے چونکہ } ب = ل (ل - ز) (۱)$$

اس لئے جب ز < ۲۱ تو ب < ل، اس لحاظ سے محور ص ص کے لئے محور اصغر کا نام موزوں نہیں۔

ج کو حسب سابق مرکز کہتے ہیں۔

زائد کی شکل ٹھیک طور پر معلوم کرنے کے لئے ہمیں اس کی قطبی مساوات استعمال کرنی چاہئے، اگلی دفعہ میں ہم یہ مساوات معلوم کریں گے۔

۵۔ زائد کی قطبی مساوات جبکہ مرکز قطب ہو۔

اگر مساوات $\frac{لا^۲}{ب} - \frac{ما^۲}{ب} = ۱$ میں لا = رجم طہ اور ما = رجب طہ لکھا جائے تو حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{ر} = \frac{رجم طہ}{ب} - \frac{رجب طہ}{ب} \dots\dots\dots (۲)$$

$$= \frac{۱}{ر} - جب طہ \left(\frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ر} \right)$$

اور یہ مطلوبہ قطبی مساوات کی دو مختلف شکلیں ہیں۔

۶۔ منحنی کی شکل کا اس کی قطبی مساوات سے حاصل کرنا۔

اگر زاویہ طہ = $\frac{1}{2}$ تو $\frac{1}{2}$ جیسے طہ بڑھتا ہے $\frac{1}{2}$ تعداد کم ہوتا ہے یعنی منحنی مرکز ج سے لگاتار دور ہوتا جاتا ہے، اگر غیر متناہی ہوتا ہے جب $\frac{1}{2} =$ یعنی جب $\frac{1}{2}$ جم طہ = $\frac{1}{2}$ جب طہ یا مس طہ = $\frac{1}{2}$ پس وہ سمتی نیم قطر جو محور کے ساتھ زاویہ مس $\frac{1}{2}$ بناتا ہے وہ منحنی سے لا انتہا فاصلے پر ملتا ہے۔

اس لئے منحنی کے اس حصہ کی شکل جو مثبت ربع میں واقع ہے ایسی ہے جیسی شکل میں دکھائی گئی ہے۔ سمتی نیم قطر طول میں بڑھتا ہے جیسے اس کی سمت خط طہ = مس $\frac{1}{2}$ کے قریب پہنچتی جاتی ہے، نیز چونکہ منحنی باقی ربعات میں بھی متشاکل ہے اس لئے اسے ہم مکمل طور پر پہنچ سکتے ہیں۔ یہ غور سے دیکھا جائے کہ $\frac{1}{2}$ زاویہ طہ کی ان قیمتوں کے لئے منحنی ہے جن کے لئے مس طہ تعداد $\frac{1}{2}$ سے بڑا ہے یعنی $\frac{1}{2}$ طہ کی ان قیمتوں کے لئے منحنی ہے جو مس $\frac{1}{2}$ اور اس کے مکمل کے درمیان واقع ہوتی ہیں پس طہ کی ان قیمتوں کے جواب میں جو دو خط حاصل ہوتے ہیں ان کے درمیان منحنی کا کوئی حصہ واقع نہیں ہوتا کیونکہ ان حدود کے اندر کی قیمتیں خیالی ہیں [ملاحظہ ہو شکل ۳۳] طہ کی وہ قیمتیں جن میں سے ہر ایک کے لئے $\frac{1}{2}$ کی قیمت غیر متناہی ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہیں

$$\text{مس طہ} = \pm \frac{1}{2}$$

مرکز میں سے گزرنے والے ان خطوط کو جو منحنی سے غیر متناہی فاصلہ پر ملتے ہیں متقارب کہتے ہیں، یاد رہے کہ یہ متقارب کی باقاعدہ تعریف نہیں ہے، ہم اسے آگے چلکر بیان کرینگے۔
۷ کے ناقص اور زائد کی خاصیتوں کا مقابلہ۔

اگرچہ زائد اور ناقص کی خاصیتوں میں خاص مشابہت پائی جاتی ہے

تاہم طالب علم کو چاہئے کہ ان کے امتیازی فرق کو بھی پیش نظر رکھے۔
(۱) ناقص بند منحنی ہے اور زائد دونوں طرف لانتہا فاصلہ تک پھیلتا ہے۔

(۲) ناقص ہر دو محاورے حقیقی نقاط پر ملتا ہے لیکن زائد صرف ایک محور سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے۔

(۳) ناقص کی صورت میں مرکز اور ماسک متناظر مرتب کے ایک ہی جانب واقع ہوتے ہیں لیکن زائد میں متقابل جانبوں میں واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک قطع زائد کے قاطع اور فردوج محور بالترتیب ۳ اور ۲ ہیں، ان سمتی قطروں کے طول معلوم کرو جو محور اعظم کے ساتھ زائد کے ۳۰° اور ۶۰° بناتے ہیں۔

قطبی مساوات ہے $\frac{1}{r} = \frac{\cos \theta}{a} - \frac{\cos \theta}{b}$ جب $\theta = 0^\circ$ یا $\theta = 180^\circ$ تو

$$\frac{1}{r} = \frac{3}{9} - \frac{2}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{r} = \frac{2}{12} - \frac{3}{9} = -\frac{1}{12}$$

جب زاویہ $\theta = 60^\circ$ تو $\frac{1}{r} = \frac{\cos 60^\circ}{9} - \frac{\cos 60^\circ}{12} = \frac{1}{18} - \frac{1}{24} = \frac{1}{72}$ یا $\frac{1}{r} = \frac{2}{12} - \frac{3}{18} = \frac{1}{36}$

نو خالذہ صورت میں خیالی ہے اور یہ ہونا بھی چاہئے کیونکہ متقارب محور اعظم کے ساتھ زاویہ 60° بناتا ہے اور یہ 60° سے کم ہے اسلئے دوسرا خط منحنی سے حقیقی نقاط پر نہیں ملتا۔

مثال ۲۔ قطع زائد میں اگر کوئی دو سمتی نیم قطر علی القوائم لے جائیں تو ان کے شکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔
یہاں بھی جیسے ناقص کی صورت میں ہم نے دیکھا اگر نیم قطروں کے سرے (ر، طہ)

اور (ر، طہ) ہوں تو

$$\frac{\text{جہم طہ}}{\text{ب}} - \frac{\text{جہم طہ}}{\text{ب}} = \frac{1}{\text{ر}}$$

$$\frac{\text{جہم طہ}}{\text{ب}} - \frac{\text{جہم طہ}}{\text{ب}} = \frac{1}{\text{ر}} \quad \text{اور}$$

$$\frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ر}} = \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ب}}$$

لیکن یاد رہے کہ ر اور ب میں سے کوئی ایک یا دونوں خیالی ہو سکتے ہیں۔

مشقیں

۶۔ ایک ہی شکل میں ذیل کے منحنیات کو کھینچو (۱) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1$

(۲) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1$ (۳) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1$

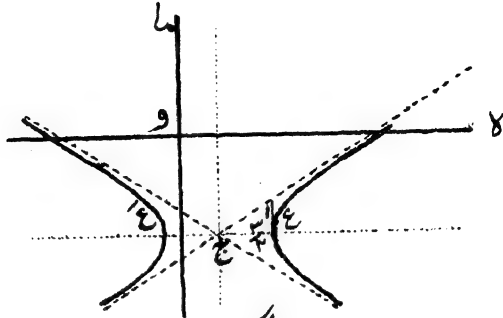
۷۔ مشق ۶ کے منحنیات میں سے ہر ایک کے ان سمتی نیم قطروں کے طول معلوم کرو جو قاطع محور کے ساتھ زاویے ۳۰ اور ۴۵ بنائیں۔

۸۔ ایک ہی شکل میں $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1$ ، $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1$ کو مرسم کرو، انکا مشترک سمتی نیم قطر محور سے جو زاویہ بناتا ہے اس کا محاس اور نیز اس مشترک وتر کا طول معلوم کرو۔

۸۔ زائد کی مساوات بلحاظ ان محوروں کے جو اصلی محوروں کے متوازی ہوں۔
اب ہم زائدوں کے کھینچنے کی چند توضیحی مثالیں حل کریں گے جبکہ حوالہ کے محور منحنی کے محوروں کے متوازی ہوں لیکن ان پر منطبق نہ ہوں
(مقابلہ کرو دفعہ ۵۷)

مثال ۱۔ زائد $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1$ کو مرسم کرو۔
یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے

$$1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$



شکل ۳۴

مبدأ کو نقطہ (۱-۳) پر منتقل کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$1 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$$

اور یہ قطع زائد کی مساوات ہے جس کے نیم محوروں کے طول ۲ اور ۳ ہیں منحنی کو شکل ۳۴ میں مرسم کیا گیا ہے -

منحنی ابتدائی محور ۴ سے ملتا ہے جہاں ما = ۰ اور ۳ (لا - ۱) = ۹ + ۱۸ یا لا = ۳۰ تقریباً

منحنی ابتدائی محور ۵ سے ملتا ہے جہاں لا = ۰ اور ۹ (ما + ۳) = ۳۰ - ۹ = ۲۱ (خیالی تقاطع پر)

طالب علم کو چاہئے کہ لایا ما کو اور قیمتیں دینے سے منحنی پر اور نقاط معلوم کرے جیسے دفعہ ۳۳ میں -

مثال ۲ - منحنی ۹ لا - ۲ ما = ۱۸ - لا - ۴ ما + ۲۵ = ۰ کو مرسم کرو۔
(دفعہ ۵۷ مثال ۲ کی مانند) رقموں کو اس طرح اکٹھا کرنے سے کہ لا اور لا والی رقمیں ایک مربع کامل بنائیں اور ما اور ما والی رقمیں ایک الگ مربع کامل بنائیں ہمیں حاصل ہوگا

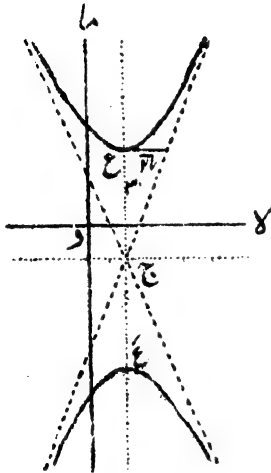
$$9(لا - ۱) - ۲(ما + ۳) = ۱۸ + (۱ + ۶۲ + ۹)$$

$$یا 9(لا - ۱) - ۲(۱ + ۶) = ۱۸ -$$

$$یا 9(لا - ۱) - ۲(۱ + ۶) = ۱۸ -$$

مبدأ کو نقطہ (۱، -۱) پر منتقل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$1 = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{9}$$



شکل ۳۵

اس لئے منحنی قطع زائد ہے جس کا قاطع محور نئے محور مساوی منطبق ہوتا ہے اور جس کے نیم محوروں کے طول ۳، ۳ ہیں۔

ابتدائی محوروں پر نقطہ ۷ ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

$$9 - 18 = 18 - 9 = 0 = 25 - 4 = 21$$

اول الذکر خیالی ہیں اور مؤخر الذکر $1 \pm \frac{2}{3}$

یا $1 - 1 \pm 3$ ہیں تقریباً

مشقیں

نہیات ذیل کو مرسم کرو

$$1 = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{9}$$

$$8 = (1 + 1) - (3 - 1) = 2$$

$$11 = 4 - 1 = 3 + 1 = 4$$

$$12 = 9 - 1 = 8 + 1 = 9$$

۱۳- ۱۶ مشق ۹ تا ۱۲ میں جتنے منحنی دئے گئے ہیں ان کے خروج المکز معلوم کرو نیز ابتدائی محوروں کے لحاظ سے قاطع محوروں کے سروں کے

مجدد معلوم کرو۔

۹۔ قطع زائد ایک دوسرا ماسکہ اور دوسرا مرتب رکھتا ہے۔

چونکہ منحنی لمحاظ محوروں کے متشائل ہے اس لئے اگر ہم قطع کریں
ج س = ج س (شکل ۳۳) اور ج لا = ج لا اور لا ک کو ع ج ع پر
عمود وار کھینچیں تو جیسا ہم نے ناقص کی صورت میں دیکھا س زائد کا
دوسرا ماسکہ ہے اور لا ک متناظر مرتب۔ خروج المرکز دونوں ماسکوں
کے لئے ایک ہی ہے۔

انتباہ۔ یہ غور سے دیکھا جائے کہ زائد کی دو مختلف شاخیں دو مختلف منحنی
نہیں ہیں، بلکہ دونوں شاخیں ایک اور صرف ایک ہی منحنی بناتی ہیں، کسی ماسکہ
اور اس کے متناظر مرتب کی مدد سے ہم صرف وہی شاخ نہیں حاصل کر سکتے
جو اس ماسکہ کے گرد واقع ہے بلکہ ان کی مدد سے ہم دونوں شاخیں
حاصل کر سکتے ہیں۔

$$۸۰۔ ثابت کرو کہ ج س = ز لا، ج لا = \frac{1}{ز}$$

چونکہ ع اور ع منحنی پر واقع ہیں اس لئے

$$س ع = ز ع \times لا، س ع = ز ع \times لا$$

$$\text{جمع کرنے سے } س ع + س ع = ز ع (لا + لا) \text{ یا } س ع + س ع = ز ع (لا + لا)$$

$$س س = ز ع \times ع$$

$$\text{اب چونکہ } س س = ۲ ج س \text{ اور } ع ع = ۲ ج ع$$

$$\text{اس لئے } ج س = ز ع \times ج ع \dots\dots\dots (۴)$$

$$\text{س ع لا} \quad \text{ج} \quad \text{س ع لا}$$

شکل ۳۶

نیز تفریق کرنے سے

$$س ع - س ع = ز ع (لا - لا) = ز ع (لا - لا) \text{ یا } ع ع = ز ع \times لا$$

$$\text{یعنی } ج ع = ز ع \times ج ع \dots\dots\dots (۵)$$

نتیجہ صریح - ج س \times ج $\lambda = \lambda^2$ (۶)
 ۸۱ - وتر خاص - تعریف وتر رخ س رخ جو ماسکے میں سے محور پر عمود وار
 لکھنچا جائے وتر خاص کہلاتا ہے۔

$$\text{نیم وتر خاص} = \frac{\lambda^2}{2} \dots\dots\dots (۷)$$

ثبوت بالکل ویسا ہے جو ناقص کی صورت میں دیا گیا (دفعہ ۶۲)
 مثال - ایک زائد کا ماسک (۱، ۱) ہے، مرتب ۳ لا + ۴ م - ۳۳ = ۰ اور
 خروج المرکز ۳، اس کی مساوات معلوم کرو، نیز قاطع محور کے سروں کے
 محدود، مرکز اور دوسرے ماسک کے محدود معلوم کرو نیم محوروں کے طول بھی
 معلوم کرو۔

مربع لینے سے مساوات باسانی شکل ذیل میں آجاتی ہے

$$۲۵ \{ (۱-۱) + (۱-۱) \} = ۹ (۳ لا + ۴ م - ۳۳)$$

تحویل کے بعد ۵۶ لا + ۲۱۶ لا م + ۱۱۹ م - ۱۶۷ لا - ۲۲۵۴ م + ۹۱۶۶ = ۰
 جیسا ہم نے مثال دفعہ ۶۲ میں دیکھا اس لا کی مساوات ہے (معیاری صورت)
 $۴ لا - ۳ م - ۱ = ۰$

اور اس لئے نقطہ لا ہے (۴، ۵) ماب ع اور غ خط س لا کو داخل
 اور خارجاً نسبت ۳:۱ سے تقسیم کرتے ہیں اس لئے ضابطہ کی مدد سے

$$ع ہے (۱۳، ۴) اور غ ہے (۱۱، ۷)$$

مرکز ع غ کا نقطہ تنصیف ہے اس لئے اس کے محدود ہیں (۱۱، ۱۱)
 نیز چونکہ مرکز س س کا نقطہ تنصیف ہے اس لئے ہم باسانی س کے

محدود (۱۰، ۳۱) حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\left(\frac{15}{2}\right) = (7-4) + \left(\frac{13}{2} - \frac{11}{2}\right) = 6 = 3 \times 2$$

اس لئے $\frac{15}{8} = 1$ اور $b = 1$ ، $\sqrt{\frac{15}{8}} = \sqrt{2 \times \frac{15}{8}} = \sqrt{2 - 2}$

مشقیں

۷۱۔ ایک قطع زائد کے نیم محور m اور e ہیں، موخر الذکر مزدوج نیم محور ہے۔ اس کا وتر خاص، خروج مرکز، ماسکوں کا فاصلہ مرکز سے اور مرتبوں کا فاصلہ مرکز سے دریافت کرو۔

۱۸۔ اگر $s = 4 = d$ تو ثابت کرو کہ n م و n ر خاص یعنی $L = d = 4$
 اگر ماسک $(1, 1)$ ہو، مرتب $5 = 4 + 1$ ، $12 = 9 + 3$ اور خروج المرکز 2
 تو n ر خاص معلوم کرو۔

۱۹۔ مشق ۱۸ کے زائد کے نیم محور معلوم کرو۔

۲۰۔ زائد $\frac{9}{3} - \frac{6}{2} = 1$ میں ان سمتی نیم قطروں کے طول معلوم

کرو جو قاطع محور کے ساتھ 30° اور 45° کے زاوے بناتے ہیں۔

۲۱۔ اس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسک $(-1, 1)$ ہے، متناظر مرتب $9 + 6 = 15$ ۔ اور خروج مرکز 15 ہے نیز اس زائد کا وتر خاص معلوم کرو۔

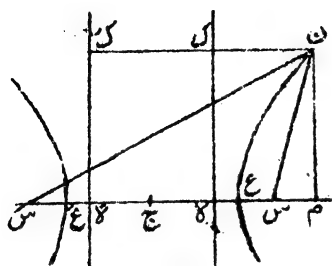
۴۴۔ ثابت کرو کہ $L = L'(Z - 1)$

۲۳۔ وہ معنی کھینچو جس کی مساوات ۲ (ا)۔ ۳ ما = ۵ ہے۔

۸۲۔ منحنی پر کسی نقطہ سے ماسکی فاصلوں کا فرق قاطع محور کے مساوی ہوتا ہے اگر ن (۱، ۱) ہو اور ن ص محور پر عمود ہو تو

س ن = ز ن ک

$$= z(1-j4)$$



شکل ۳۷

$$= ز (ا - \frac{1}{س})$$

$$= ز ا - ۱$$

$$\text{اسی طرح سن} = ز (ا + \frac{1}{س}) = ز ا + ۱$$

$$\text{سن} - \text{سن} = ۱۲ = ۱۸$$

اس لئے دائیں طرف کی شاخ کیلئے

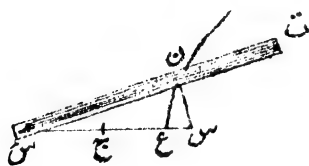
$$\text{سن} - \text{سن} = ۱۲$$

اور بائیں طرف کی شاخ کے لئے

$$\text{سن} - \text{سن} = ۱۲$$

۸۳۔ زائد کی آلی ترسیم۔ دفعہ ۸۲ سے ہمیں زائد مرتسم کرنے کی ایک آلی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

چھٹی پٹری کے ایک سرے کو نقطہ سن پر اس طرح نصب کرو کہ یہ سن کے گرد کاغذ کی سطح میں پھر سکے۔ ایک تاکا لوجس کا طول پٹری کے طول سے کم ہو اور اس کے ایک سرے کو سی پر اور اس کے دوسرے سرے کو پٹری کے آزاد سرے



شکل ۳۸

ت پر باندھو۔ اب اگر ایک پٹل

ن تاکے کو پٹری کے ساتھ ساتھ

اس طرح تانے رکھے جیسا کہ

شکل ۳۸ میں دکھایا گیا ہے تو

یہ زائد کی دائیں شاخ کے اوپر کے کچھ حصہ کو مرتسم کرے گی یعنی یہ منحنی کے اس حصہ کو مرتسم کرے گی جو ع اور ن کے درمیان ہے جہاں سن ن رسی کا طول ہے۔

$$\text{کیونکہ سن} - \text{سن} = (\text{سن} + \text{ن} + \text{ت}) - (\text{سن} + \text{ن} + \text{ت})$$

$$= \text{سن} - \text{ت} = (\text{سن} + \text{ن} + \text{ت})$$

$$= \text{پٹری کا طول} - \text{رسی کا طول}$$

= مستقل مقدار

نیز اس شاخ کے نچلے متناظر حصہ کو مرتسم کرنے کے لئے پٹری کو سس سس کے نیچے رکھنا پڑیگا۔ بائیں طرف کے متناظر حصوں کو مرتسم کرنے کے لئے پٹری کے ایک سرے کو سس کی بجائے سس پر ثابت کرو اور تاکئے کے ایک سرے کو سس پر باندھنے کی بجائے سس پر باندھو۔

مشقیں

۲۴۔ دفعہ ۶۴ کی طرح ثابت کرو کہ اگر سس ن - سس ن مستقل ہو جہاں سس ن ثابت نقطے میں تو ن کا طریق ایک قطع زائد ہے۔

۲۵۔ اس نقطہ کے طریق کی سادہ سے سادہ مساوات معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرے کہ دو ثابت نقاط میں اور سس سے اس کے فاصلوں کا

فرق ۳ ہو جہاں سس = ۸
۲۶۔ مشق ۲۵ کے منحنی کا خروج المرکز اور اس کے نیم وتر خاص کا طول معلوم کرو
۸۴۔ ثابت کرو کہ خط استقیم ما = م لا + ج زائد

$\frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ب} = ۱$ سے دو نقاط حقیقی یا خیالی پر ملتا ہے، اگر

خط مذکور منحنی کا ماس ہو تو اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے۔

اسی طرح کے عمل سے جو ناقص کی صورت میں کیا گیا تھا ہمیں فصلوں کے لئے مساوات ذیل حاصل ہوگی

$$۱ = \frac{لا}{ب} - \frac{(م لا + ج)}{ب}$$

$$یا لا \left(\frac{۱}{ب} - \frac{م}{لا} \right) - \frac{م ج}{ب} - لا = ۱$$

نیز چونکہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی ایک اور صرف ایک قیمت مساوات ما = م لا + ج سے حاصل ہوتی ہے اس لئے معلوم ہوا کہ

تقاطع دو ہیں۔

لاکی قیمتیں حقیقی، ایک دوسرے پر منطبق یا خیالی ہونگی

$$\text{اگر بالترتیب } \frac{م^۱ ج^۱}{ب^۱} + \left(\frac{۱}{ب^۱} - \frac{۱}{ب^۲} \right) \left(\frac{م^۲ ج^۲}{ب^۲} + ۱ \right) > ۰$$

$$\text{یعنی اگر } \frac{۱}{ب^۱} + \frac{۱}{ب^۲} - \frac{۱}{ب^۱} > ۰ \text{ یا اگر } \frac{۱}{ب^۱} + \frac{۱}{ب^۲} - \frac{۱}{ب^۱} > ۰$$

$$\text{اگر } ج = \pm \left[\frac{۱}{ب^۱} - \frac{۱}{ب^۲} \right]$$

تو دونوں نقطے ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے، اس لئے خطوط

$$م = لا \pm \left[\frac{۱}{ب^۱} - \frac{۱}{ب^۲} \right] \dots \dots \dots (۹)$$

م کی تمام قیمتوں کے لئے زائد کو مس کرتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر $\frac{ب}{ر} > \frac{ج}{ر}$ تو ج کی قیمت خیالی ہے یعنی

زائد کا کوئی تماس محور کے ساتھ ایسا زاویہ نہیں بنا سکتا جو متقارب اور محور کے درمیانی زاویہ سے کم ہو

$$\text{اگر } م = \pm \frac{ب}{ر} \text{ تو } ج = ۰ \text{ اور اس صورت میں تماس ہونگے}$$

$$م = لا \pm \frac{ب}{ر}$$

اور یہ فی الحقیقت متقارب ہیں جو دفعہ ۷۶ میں معلوم کئے جا چکے ہیں۔ چونکہ یہ خط منحنی سے صرف لا انتہا فاصلے پر ملتے ہیں اس لئے معلوم ہوا

مقارب کو ہم ایک ایسا تماس خیال کر سکتے ہیں جس کا نقطہ تماس لا تنہا ہی پر ہے۔

۸۵- متقارب - تعریف، ایک ایسا خط مستقیم جو ایک منحنی سے لانا تھا فاصلے پر دو منطبق نقطوں پر ملے متقارب کہلاتا ہے۔ اس سے قبل ہم نے متقارب کی باضابطہ تعریف نہیں کی تاہم جو متقارب ہم نے اس سے پہلے معلوم کئے ہیں ان میں اوپر کی خاصیت ضرور پائی جاتی ہے۔

$$۸۶- \text{زائد} \frac{۱۹}{۲۱} - \frac{۲۱}{۲۱} = ۱ \text{ کے متقارب معلوم کرو۔}$$

اگر $ما = ص لا + ج$ متقارب ہو تو جس مساوات درجہ دوم سے نقاط تقاطع کے فصلے معلوم ہوتے ہیں اس کی دونوں اصلیں لاشناہی ہونی چاہئیں۔ مساوات مذکورہ ذیل کی مساوات درجہ دوم ہے

$$لا^۲ \left(\frac{۱}{۲۱} - \frac{۲۱}{۲۱} \right) - ۲ لا \frac{ص}{۲۱} - \frac{ج^۲}{۲۱} = ۱$$

اس کی دو اصلیں ہیں اور ان دونوں کے غیر متناہی ہونے کی شرائط ہیں (یونیورسل الجبر حصہ دوم دفعہ ۱۶۷)

$$\frac{۱}{۲۱} - \frac{۲۱}{۲۱} = ۰ \text{ اور } \frac{ص^۲}{۲۱} = ۰$$

اس سے حاصل ہوتا ہے $ص = \pm \frac{۲۱}{۲۱} ج$

پس مطلوبہ متقارب صرف وہی دو متقارب ہیں جن کا پہلے بیان ہو رہا تھا

$$ما = \pm \frac{۲۱}{۲۱} لا \dots \dots \dots (۱۰)$$

اور انکی مشترک مساوات ہے $\frac{لا^۲}{۲۱} - \frac{۲۱}{۲۱} = ۰$

۸۷- کوئی خط جو متقارب کے متوازی ہو وہ منحنی سے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے جو غیر متناہی فاصلہ پر ہو۔
اوپر کی مساوات میں لا کی ایک قیمت لاشناہی ہوگی اگر

$$= \frac{20}{25} - \frac{1}{25}$$

یعنی اگر $m = \pm \frac{b}{a}$

اور یہ صورت اس وقت پیدا ہوگی جبکہ خط $MA = LA + J$ ایک متقارب کے متوازی ہو۔

مثال - اگر متقاربوں کا درمیانی زاویہ 2° ہو تو $z =$ قطعہ

مس غم = ب کیونکہ متقارب محوروں کے ساتھ

ساوی نہ اوئے بناتے ہیں، اُس لئے

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b^2}}{2} = \sqrt{1 + 4b^2} + 1 = \text{قطعه}$$

یاد رہے کہ ۲۷۰ متقاربوں کے درمیان وہ تراویہ ہے جس کے اندر

کل نختی گمراہوا ہے، دوسرا زاویہ ان کے درمیان $\pi - \alpha$ ہے۔

۸۸۔ قائم زائد۔ ایسے زائد کو جس میں ۱ = تب قائم زائد کہتے

ہیں، اس کی مساوات لائے۔ $\mu = 1$ ہوگی۔

اس نام کی وجہ تسمیہ یہ ہے کہ اس صورت میں متقارب علی القوام

ہوتے ہیں۔

یعنی لاء ما = . یا لا - ما = . اور لا + ما = .

نتیجہ صریح: قائم زائد بلحاظ رشتہ کے زائد کے ساتھ اسی طرح منسوب

ہے جیسے دائرہ ناقص کے ساتھ کیونکہ یہ خاص صورتیں ناقص اور زائد

دونوں میں محاورہ کو ایک دوسرے کے مساوی بنانے سے حاصل ہوتی ہیں۔

مشقیں

۲۷۔ ابتدائی اصولوں سے اس کی شرط معلوم کرو۔ $a = 3$ ، $b = 3$ ، $c = 3$ ، $d = 3$ ، $e = 3$ ، $f = 3$ ، $g = 3$ ، $h = 3$ ، $i = 3$ ، $j = 3$ ، $k = 3$ ، $l = 3$ ، $m = 3$ ، $n = 3$ ، $o = 3$ ، $p = 3$ ، $q = 3$ ، $r = 3$ ، $s = 3$ ، $t = 3$ ، $u = 3$ ، $v = 3$ ، $w = 3$ ، $x = 3$ ، $y = 3$ ، $z = 3$ ، $aa = 3$ ، $ab = 3$ ، $ac = 3$ ، $ad = 3$ ، $ae = 3$ ، $af = 3$ ، $ag = 3$ ، $ah = 3$ ، $ai = 3$ ، $aj = 3$ ، $ak = 3$ ، $al = 3$ ، $am = 3$ ، $an = 3$ ، $ao = 3$ ، $ap = 3$ ، $aq = 3$ ، $ar = 3$ ، $as = 3$ ، $at = 3$ ، $au = 3$ ، $av = 3$ ، $aw = 3$ ، $ax = 3$ ، $ay = 3$ ، $az = 3$ ، $ba = 3$ ، $bb = 3$ ، $bc = 3$ ، $bd = 3$ ، $be = 3$ ، $bf = 3$ ، $bg = 3$ ، $bh = 3$ ، $bi = 3$ ، $bj = 3$ ، $bk = 3$ ، $bl = 3$ ، $bm = 3$ ، $bn = 3$ ، $bo = 3$ ، $bp = 3$ ، $bq = 3$ ، $br = 3$ ، $bs = 3$ ، $bt = 3$ ، $bu = 3$ ، $bv = 3$ ، $bw = 3$ ، $bx = 3$ ، $by = 3$ ، $bz = 3$ ، $ca = 3$ ، $cb = 3$ ، $cc = 3$ ، $cd = 3$ ، $ce = 3$ ، $cf = 3$ ، $cg = 3$ ، $ch = 3$ ، $ci = 3$ ، $cj = 3$ ، $ck = 3$ ، $cl = 3$ ، $cm = 3$ ، $cn = 3$ ، $co = 3$ ، $cp = 3$ ، $cq = 3$ ، $cr = 3$ ، $cs = 3$ ، $ct = 3$ ، $cu = 3$ ، $cv = 3$ ، $cw = 3$ ، $cx = 3$ ، $cy = 3$ ، $cz = 3$ ، $da = 3$ ، $db = 3$ ، $dc = 3$ ، $dd = 3$ ، $de = 3$ ، $df = 3$ ، $dg = 3$ ، $dh = 3$ ، $di = 3$ ، $dj = 3$ ، $dk = 3$ ، $dl = 3$ ، $dm = 3$ ، $dn = 3$ ، $do = 3$ ، $dp = 3$ ، $dq = 3$ ، $dr = 3$ ، $ds = 3$ ، $dt = 3$ ، $du = 3$ ، $dv = 3$ ، $dw = 3$ ، $dx = 3$ ، $dy = 3$ ، $dz = 3$ ، $ea = 3$ ، $eb = 3$ ، $ec = 3$ ، $ed = 3$ ، $ee = 3$ ، $ef = 3$ ، $eg = 3$ ، $eh = 3$ ، $ei = 3$ ، $ej = 3$ ، $ek = 3$ ، $el = 3$ ، $em = 3$ ، $en = 3$ ، $eo = 3$ ، $ep = 3$ ، $eq = 3$ ، $er = 3$ ، $es = 3$ ، $et = 3$ ، $eu = 3$ ، $ev = 3$ ، $ew = 3$ ، $ex = 3$ ، $ey = 3$ ، $ez = 3$ ، $fa = 3$ ، $fb = 3$ ، $fc = 3$ ، $fd = 3$ ، $fe = 3$ ، $ff = 3$ ، $fg = 3$ ، $fh = 3$ ، $fi = 3$ ، $fj = 3$ ، $fk = 3$ ، $fl = 3$ ، $fm = 3$ ، $fn = 3$ ، $fo = 3$ ، $fp = 3$ ، $fq = 3$ ، $fr = 3$ ، $fs = 3$ ، $ft = 3$ ، $fu = 3$ ، $fv = 3$ ، $fw = 3$ ، $fx = 3$ ، $fy = 3$ ، $fz = 3$ ، $ga = 3$ ، $gb = 3$ ، $gc = 3$ ، $gd = 3$ ، $ge = 3$ ، $gf = 3$ ، $gg = 3$ ، $gh = 3$ ، $gi = 3$ ، $gj = 3$ ، $gk = 3$ ، $gl = 3$ ، $gm = 3$ ، $gn = 3$ ، $go = 3$ ، $gp = 3$ ، $gq = 3$ ، $gr = 3$ ، $gs = 3$ ، $gt = 3$ ، $gu = 3$ ، $gv = 3$ ، $gw = 3$ ، $gx = 3$ ، $gy = 3$ ، $gz = 3$ ، $ha = 3$ ، $hb = 3$ ، $hc = 3$ ، $hd = 3$ ، $he = 3$ ، $hf = 3$ ، $hg = 3$ ، $hh = 3$ ، $hi = 3$ ، $hj = 3$ ، $hk = 3$ ، $hl = 3$ ، $hm = 3$ ، $hn = 3$ ، $ho = 3$ ، $hp = 3$ ، $hq = 3$ ، $hr = 3$ ، $hs = 3$ ، $ht = 3$ ، $hu = 3$ ، $hv = 3$ ، $hw = 3$ ، $hx = 3$ ، $hy = 3$ ، $hz = 3$ ، $ia = 3$ ، $ib = 3$ ، $ic = 3$ ، $id = 3$ ، $ie = 3$ ، $if = 3$ ، $ig = 3$ ، $ih = 3$ ، $ii = 3$ ، $ij = 3$ ، $ik = 3$ ، $il = 3$ ، $im = 3$ ، $in = 3$ ، $io = 3$ ، $ip = 3$ ، $iq = 3$ ، $ir = 3$ ، $is = 3$ ، $it = 3$ ، $iu = 3$ ، $iv = 3$ ، $iw = 3$ ، $ix = 3$ ، $iy = 3$ ، $iz = 3$ ، $ja = 3$ ، $jb = 3$ ، $jc = 3$ ، $jd = 3$ ، $je = 3$ ، $jf = 3$ ، $jj = 3$ ، $jh = 3$ ، $ji = 3$ ، $jj = 3$ ، $jk = 3$ ، $jl = 3$ ، $jm = 3$ ، $jn = 3$ ، $jo = 3$ ، $jp = 3$ ، $jq = 3$ ، $jr = 3$ ، $js = 3$ ، $jt = 3$ ، $ju = 3$ ، $jv = 3$ ، $jw = 3$ ، $jx = 3$ ، $ji = 3$ ، $jj = 3$ ، $jk = 3$ ، $jl = 3$ ، $jm = 3$ ، $jn = 3$ ، $jo = 3$ ، $jp = 3$ ، $jq = 3$ ، $jr = 3$ ، $js = 3$ ، $jt = 3$ ، $ju = 3$ ، $jv = 3$ ، $jw = 3$ ، $jx = 3$ ، $iy = 3$ ، $iz = 3$ ، $ka = 3$ ، $kb = 3$ ، $kc = 3$ ، $kd = 3$ ، $ke = 3$ ، $kf = 3$ ، $kg = 3$ ، $kh = 3$ ، $ki = 3$ ، $kj = 3$ ، $kk = 3$ ، $kl = 3$ ، $km = 3$ ، $kn = 3$ ، $ko = 3$ ، $kp = 3$ ، $kq = 3$ ، $kr = 3$ ، $ks = 3$ ، $kt = 3$ ، $ku = 3$ ، $kv = 3$ ، $kw = 3$ ، $kx = 3$ ، $ky = 3$ ، $kz = 3$ ، $la = 3$ ، $lb = 3$ ، $lc = 3$ ، $ld = 3$ ، $le = 3$ ، $lf = 3$ ، $lg = 3$ ، $lh = 3$ ، $li = 3$ ، $lj = 3$ ، $lk = 3$ ، $ll = 3$ ، $lm = 3$ ، $ln = 3$ ، $lo = 3$ ، $lp = 3$ ، $lq = 3$ ، $lr = 3$ ، $ls = 3$ ، $lt = 3$ ، $lu = 3$ ، $lv = 3$ ، $lw = 3$ ، $lx = 3$ ، $ly = 3$ ، $lz = 3$ ، $ma = 3$ ، $mb = 3$ ، $mc = 3$ ، $md = 3$ ، $me = 3$ ، $mf = 3$ ، $mg = 3$ ، $mh = 3$ ، $mi = 3$ ، $mj = 3$ ، $mk = 3$ ، $ml = 3$ ، $mm = 3$ ، $mn = 3$ ، $mo = 3$ ، $mp = 3$ ، $mq = 3$ ، $mr = 3$ ، <

لا۔ ۴ = ۲ = ۹ کو مس کرے ، نیز نقطہ تماس کے مجدد معلوم کرو۔

۲۸۔ لا۔ ۴ = ۲ = ۹ کے ان محاسبات کی مساواتیں معلوم کرو جو قاطع محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتے ہیں۔

۲۹۔ معلوم کرو کہ خط مستقیم لا + ما = ۲ زائد لا۔ ۴ = ۲ = ۱ سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے یا نہیں۔

۳۰۔ زائد ۲ لا۔ ۳ = ۲ = ۵ کے نصف محور معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

خط مستقیم ما = لا + $\left[\frac{5}{4} \right]$ زائد کو مس کرتا ہے۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ خط لا + ما = ۰ منحنی

۲ لا + ۳ لا + ما + ۳ لا + ۲ ما = ۰ سے لاتنا ہی پر کے ایک نقطہ

پر اور خطوط لا + ما + ۱ = ۰ اور ۲ لا + ما + ۱ = ۰۔ دونوں منحنی مذکور سے

لاتنا ہی پر کے دو نقطوں پر ملتے ہیں۔

۳۲۔ ج کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ خط ما = لا + ج اُس زائد کو مس کرے جس کا

ماسک (۰.۶۲) ہو مرتب ۲ لا۔ ما + ۳ = ۰ اور خروج المرکز ۲۶۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ خطوط لا + ۱ = ۰ ، ما + ۳ = ۰ منحنی لا + ما + ۳ لا + ما = ۰

کے متقارب ہیں۔

۳۴۔ ایک زائد کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے اسکا خروج المرکز

معلوم کرو۔

[استعمال کرو ز = قطع عم]

۸۹۔ اگر منحنی کے کسی نقطہ سے متقاربوں پر عمود نکالے جائیں تو انکا

حاصل ضرب مستقل ہوتا ہے۔

مقارب ہیں $\frac{لا}{ب} - \frac{ب}{لا} = ۰$ اور $\frac{لا}{ب} + \frac{ب}{لا} = ۰$ [دفعہ ۸۶]

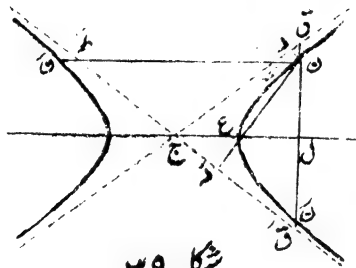
نقطہ (لا، ب) سے ان پر جو عمود کھینچے جا سکتے ہیں ان کا حاصل ضرب

$$\frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}} \times \frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}} =$$

کیونکہ $\frac{a^2}{b^2}$ بانسختی پر واقع ہے، پس عمودوں کا حاصل ضرب ہمیشہ $\frac{a^2}{b^2}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

مشقیں

۳۵۔ زائد کے نقطہ N میں سے گزرنے والا معین متقاربوں سے Q اور Q' پر اور زائد سے دوبارہ N پر ملتا ہے ثابت کرو کہ $NQ \times NQ' = b^2$



شکل ۳۹

[اگر متقاربوں پر عمود N اور N' کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ نسبتیں $\frac{NQ}{NQ'} = \frac{b^2}{a^2}$ اور $\frac{NQ'}{NQ} = \frac{a^2}{b^2}$ مستقل ہیں، اس لئے چونکہ $NQ \times NQ' = b^2$ مستقل ہیں اس لئے $NQ \times NQ' = b^2$ بھی مستقل ہے، مستقل قیمت معلوم کرنے کے لئے N کو C پر فرض کرو]

۳۶۔ ثابت کرو کہ $NQ \times NQ' = b^2$

۳۷۔ اگر قاطع محور کے متوازی خطوط ط ط ن متقاربوں سے ط اور ط پر اور منحنی سے ن پر ملے تو ثابت کرو کہ (۱) ن ط x ط ن = ۱ (۲) ن ط = ط ن (۳) ن ط x ن ط = ۱

۳۸۔ ثابت کرو کہ جیسے ن شاخ ع ن پر حرکت کر کے دور جاتا ہے ن د اور ن ق طول میں نہایت چھوٹے ہوتے جاتے ہیں اور ن کو اس شاخ پر کافی دور لینے سے ہم ن د اور ن ق کے طولوں کو اتنا کم کر سکتے ہیں جتنا چاہیں۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مرکز سے بہت بڑے فاصلے پر منحنی اپنے متقارب کے لانتہا قریب آ جاتا ہے۔

۹۰۔ حوالہ کے محور کچھ ہی ہوں زائد کی مساوات ہمیشہ درجہ دوم کی ہوگی اور اس مساوات میں اور متقاربوں کی مساوات میں صرف فرق یہ ہوگا کہ دونوں میں مستقل رقبے مختلف ہوں گی۔

ہم نے اوپر زائد اور متقاربوں کی مساواتیں صورت ذیل میں حاصل کی ہیں

$$\frac{لا^۲}{عہ^۲} - \frac{ما^۲}{بہ^۲} = ۱ \text{ اور } \frac{لا^۲}{عہ^۲} - \frac{ما^۲}{بہ^۲} = ۰$$

اور یہ صرف بلحاظ مستقل رقم کے ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔

اگر ان مساواتوں کو کسی اور محوروں کے لحاظ سے تبدیل کیا جائے تو

ہیں لا، ما کی بجائے اس شکل کے جملات ل، لا، ص، ما، ن اور ل، لا، ص، ما، ن مندرج کرنے ہوں گے (حصہ اول دفعہ ۳۵) اس طرح نئی مساواتیں ہو جائیں گی

$$\frac{(ل، لا، ص، ما، ن)^۲}{عہ^۲} - \frac{(ل، لا، ص، ما، ن)^۲}{بہ^۲} = ۱$$

$$\text{اور } \frac{(ل، لا، ص، ما، ن)^۲}{عہ^۲} - \frac{(ل، لا، ص، ما، ن)^۲}{بہ^۲} = ۰$$

یہ دونوں مساواتیں صریحاً ایک ہی ہیں سوائے بلحاظ اپنی مستقل رقموں کے

کیونکہ پہلی مساوات کی مستقل رقم میں - ۱ موجود ہے اور دوسری مساوات میں یہ نہیں ہے۔

پس مطلوب ثابت ہوتا ہے۔

اس سے یہ نہیں فرض کر لینا چاہئے کہ مستقل رقموں کا فرق ہمیشہ ایک ہوگا۔ کیونکہ اگر مساواتوں کو ایک ہی مستقل مقدار سے ضرب دیدیا جائے تو ان میں فرق نہیں آتا اس لئے ان مساواتوں کی ان رقموں کا فرق جن میں لا، شامل نہیں ہوتے کچھ ہی ہو سکتا ہے۔

۹۱۔ اگر زائد کی مساوات میں درجہ دوم کی رقمیں لا + ۲ تھ لا + ب + ۲ ہوں تو اب > ۲ تھ

دفعہ ماقبل کی مساوات میں درجہ دوم کی رقمیں ہیں

$$\frac{(لا + ۳، ما)}{۲} - \frac{(لا + ۳، ما)}{۲}$$

اور یہ دو مربعوں کا فرق ہے، پس لا + ۲ تھ لا + ما + ب + ۲ کے دو اجزائے ضربی حقیقی ہونے چاہئیں اور اس کے لئے شرط یہ ہے

اب > ۲ تھ

سروں کا باہم مقابلہ کرنے سے ہم اسے باسانی ثابت کر سکتے ہیں کیونکہ

$$1 = \frac{لا}{۲} - \frac{لا}{۲} = \frac{لا}{۲} - \frac{لا}{۲} = \frac{لا}{۲} - \frac{لا}{۲} = \frac{لا}{۲} - \frac{لا}{۲}$$

$$\text{اس لئے اب - ۲ تھ} = \left(\frac{لا + ۳، ما}{۲} - \frac{لا + ۳، ما}{۲} \right)$$

اور یہ منفی مقدار ہے کیونکہ مربع ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

ہم آگے چلکر دیکھیں گے کہ جب اب > ۲ تھ تو مساوات لا + ۲ تھ لا + ما + ب + ۲

$$+ ۲ تھ لا + ۳، ما + ج = ۰$$

ہمیشہ ایک زائد کو تعبیر کرتی ہے، یہاں ہم نے صرف اس کے عکس کو ثابت کیا۔

متبادل ثبوت۔ فرض کرو کہ $ق + لا + ق + ما + ل = ۰$ اور $ق + لا + ق + ما + ل = ۰$ ۔
 متقارب ہیں، اگر منحنی پر کے کسی نقطہ سے ان پر عمود کھینچے جائیں تو ان کا
 حاصل ضرب مستقل ہوگا اس لئے

$$\frac{ق + لا + ق + ما + ل}{ق + لا + ق + ما + ل} \times \frac{ق + لا + ق + ما + ل}{ق + لا + ق + ما + ل} = ج$$

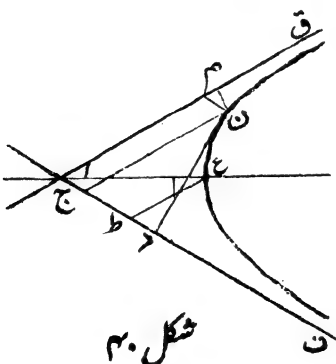
جہاں ج مستقل ہے منحنی کی مساوات ہے اور یہ مساوات صریحاً متقاربوں

کی مساوات سے صرف بلحاظ مستقل رقم کے مختلف ہے۔

طالب علم اس زائد کی مساوات معلوم کرے جس کا ماسکہ (لا، با) ہو اور
 مرتب لاجم عہ + ماجب عہ = ع۔ اور اس سے دیکھے کہ اب $ج > ع$ [دیکھو قطع
 ۹۲۔ متقاربوں کو حوالہ کے محور مان کر زائد کی مساوات دریافت کرو۔

ج ق (شکل ۳۰) متقارب ہیں اور منحنی کے کسی نقطہ ن سے
 ان پر ن د، ن م عمود نکالے گئے ہیں، ہم جانتے ہیں کہ حاصل ضرب
 ن د \times ن م مستقل ہے۔

اگر ج ق کو محور لا اور ج ق کو محور ما مانا جائے اور ان کا
 درمیانی زاویہ ۲ سہ ہو تو



شکل ۳۰

ن د = ماجب ۲ سہ، ن م = لاجب ۲ سہ
 لا ماجب ۲ سہ = مستقل = ک

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{ک}^2}{\text{جب}^2 \text{سہ}} = \text{س}^2 \text{ (فرض کرو)}$$

س^۱ کی قیمت ۱، ب کی رقوم میں معلوم کرنے کی غرض سے ہم لا کو ایک سادہ صورت میں محسوب کرتے ہیں یعنی جب نقطہ ن منحنی کے رأس ع پر واقع ہو۔
ع ط کو ج ق کے متوازی کھینچو، تب

$$\begin{aligned} \text{ع ط} \times \text{ط ج} &= \text{س}^2 \\ \text{لیکن چونکہ } \triangle \text{ع ط ج} &= \triangle \text{ق ج ع} = \triangle \text{ط ج ع} \\ \therefore \text{ط ج} &= \text{ط ع} \end{aligned}$$

$$\text{نیز } \frac{\text{ط ع}}{\text{ع ج}} = \frac{\text{جب ط ج ع}}{\text{جب ع ط ج}} = \frac{\text{جب سہ}}{\text{جب}^2 \text{سہ}} = \frac{۱}{\text{جم}^2 \text{سہ}}$$

$$\text{پس س}^1 = \text{ع ط} \times \text{ط ج} = \frac{\text{ع ج}^2}{\text{جم}^2 \text{سہ}} = \frac{\text{ر}^2}{\text{جم}^2 \text{سہ}}$$

$$\text{لیکن مس سہ} = \frac{\text{ب}}{\text{ر}} \text{ یا جم}^2 \text{سہ} = \frac{\text{ر}^2}{\text{ب} + \text{ر}}$$

$$\therefore \text{س}^2 = \frac{۱}{\text{ہم}} (\text{ر} + \text{ب})$$

اور مطلوبہ مساوات ہے لا = $\frac{\text{ر} + \text{ب}}{\text{ہم}}$ (۱۱)

متبادل ثبوت۔ ثبوت ذیل نہایت علم آموز ہے۔

$$\text{مساوات } \frac{\text{لا}}{\text{ر}} - \frac{\text{ب}}{\text{ب}} = ۱ \text{ کو اصلی محوروں سے کسی اور محوروں کے}$$

محافظ سے تبدیل کرنے کے لئے ہمیں لا، ما کی بجائے محدودوں کے لئے
خطی جے ل، لا + ص، ما + ن، - اور ل، لا + ص، ما + ن، =۔ مندرجہ کرتے

ہوں گے۔

اگر نیا مبداء وہی ہو جو پرانا مبداء ہے تو $n = 1$ ، $n = 2$ ۔ کیونکہ نئے مجدد
صفر ہوتے ہیں جب پرانے مجدد صفر ہوں۔ اس لئے اگر مبداء مرکز پر
ہو تو نام کی مساوات اس شکل کی ہوگی

$$= \frac{r_2(l_1 + m_1 + n_1)}{r_1} - \frac{r_2(l_2 + m_2 + n_2)}{r_2}$$

یہ صریحاً اس شکل کی ہے $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$ اب خط لا۔ کو متقارب ہونا چاہئے اسلئے مساوات درجہ دوم ب مآ۔ ا۔ کی دونوں اصلیں لا انتہا بڑی ہیں اس لئے $\frac{1}{\lambda} =$
اسی طرح $\frac{1}{\lambda} =$ اور مطلوبہ مساوات اس شکل کی ہے
 $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$ مستقل حسب سابق۔
مستقل مقدار کی قیمت بعینہ ایسے محسوب ہوگی جیسے دفعہ آخر میں۔
مساوات کو بالعموم اس طرح لکھتے ہیں
 $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n}$

معلوم کرو کہ ذیل کے زائدوں کی مساواتیں کیا ہو جائیں گی اگر ان کے مقارنوں کو حوالہ کے محور مانا جائے۔

$$5 = 6 - 1 \quad 2 - 4 \quad 3 = 6 - 1 \quad 2 - 4$$

٢١ - ولا' ب ما' ج = ٢٢ - لا(لا-ما) = ٢

سہم۔ اس کے نئے شرط معلوم کرو کہ ما = م لا + ک زائد لا ما = ج^۲
کو مس کرے۔

۴۴-۴۳- مشق ۴۳ کے نتیجے سے حاصل کردہ زائد کا ہر محاسب متعارف

سے ایسا زاویہ بناتا ہے جو متقاربوں کے درمیانی زاویہ سے

六十一

باب پنجم پر متفرق مشقیں

۴۵۔ اگر مزدوج محور کا ایک سراسر ہو تو ثابت کرو کہ

$$ج س^۲ - ج ص^۲ = \frac{1}{2}$$

۴۶۔ اس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسک (۱، ۱) ہو مرتب

$$لا + ما = ۲ = ۰ \text{ اور خروج مرکز } \frac{1}{3} -$$

۴۷۔ مشق ۴۶ کے زائد کا وتر خاص معلوم کرو۔

۴۸۔ ثابت کرو کہ محور کا زائد $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ ما + $\frac{1}{2}$ ب + $\frac{1}{2}$ گ لا + $\frac{1}{2}$ ن ما + $\frac{1}{2}$ ج کا متقارب ہوگا اگر $\frac{1}{2}$ = گ =

۴۹۔ ثابت کرو کہ ماسک سے متقارب پر عمود میں ق نیم مزدوج محور کے مساوی ہے اور ج ق نیم قاطع محور کے مساوی ہے۔

۵۰۔ ثابت کرو کہ خط ما = لا + ج زائد لا = ۲ لا - ما = ۱ کو مس کریگا

$$\text{اگر ج} = \frac{1}{2}$$

۵۱۔ ایک زائد کے متقارب لا + ما = ۱ اور لا - ما = ۲ ہیں اور اس کے

محوروں کے مربعوں کا مجموعہ ۵ ہے، اس کی مساوات معلوم کرو۔

[دیکھو کہ متقارب علی القوانم ہیں]

۵۲۔ زائد کے لئے ثابت کرو کہ $ن م : ع ص = ع ص : ع م = ص ج : ع ج$

جہاں $ن م$ کوئی معین ہے۔

$$[ن م = ما، ع ص \times ع م = (لا - ۱)(لا + ۱)]$$

۵۳۔ زائد کے کسی معین $ن م$ پر ایک نقطہ ق ایسا لایا گیا ہے کہ ق م اور ن م کی باہمی نسبت مستقل ہے، ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک زائد ہے جس کا قاطع محور وہی ہے جو اصلی زائد کا۔

۵۴۔ اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ خط مستقیم ما = ص لا + ج زائد $\frac{لا}{ب} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ کو مس کرے اور اس سے حاصل کرو کہ ایک نقطہ

(لا، ما) سے دو حقیقی ماس صرف اُس صورت میں کھنچ سکتے ہیں جبکہ

$$\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۱} > ۱$$

[اگر ماس (لا، ما) میں سے گزرے تو ایک مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے]
۵۵۔ مخینات ذیل کے متقاربوں کی مساواتیں لکھو

$$لا (لا + ما) = ۱ ، لا (لا - ما) = ۱ ، ما (لا + ما) = ۲$$

اور عام صورت میں ثابت کرو کہ (ل لا + ص ما) (ل لا + ص ما) = ۱
کے متقارب ل لا + ص ما = ۰ اور ل لا + ص ما = ۰ ہیں۔

آزمائشی پرچہ ۲

۱۔ مفصلہ ذیل کی تعریف کرو، قطع زائد، خروج مرکز، محور اصغر، قاطع محور، وتر خاص، متقارب۔

ثابت کرو کہ ناقص یا زائد میں محور اصغر، محور اعظم اور وتر خاص کے درمیان وسط تناسب ہے۔

۲۔ منحنی ۴ لا + ۹ ما - ۴ لا - ۶ ما + ۱ = ۰ کو درسم کرو، اس کا خروج مرکز اس کے محور اعظم اور اصغر کے بیچ، نیز اس کے اوتار خاص کے طول اور مساواتیں معلوم کرو۔

۳۔ ابتدائی اصولوں کی بنیاد پر ایک ایسے متحرک نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کے فاصلوں کا مجموعہ دو نقاط معلومہ سے مستقل ہو

۴۔ مساوات $\frac{۱}{لا} - \frac{۱}{ما} = \frac{۱}{۱}$ جب طے (ب) $(\frac{۱}{لا} - \frac{۱}{ما})$ کی تعبیر بیان کرو اور اس سے منحنی کی شکل حاصل کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ ب لا - ما / ج = ۱ ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۱} = ۱$ کا ماس ہے، ج کے معنی بیان کرو۔

۶۔ ثابت کرو کہ اگر مساوات

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ ھ} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ ب} + 5 \text{ ا} + 6 \text{ گ} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ ف} + 9 \text{ ج} = 0$$

ایک ناقص کو تعبیر کرے تو اب۔ ھ لازماً مثبت ہوگا۔

۷۔ منحنی ۴ لا۔ ۵ ا۔ ۶ لا + ۷ ا + ۸ لا + ۹ ا = ۱۳۔ کو مرتبہ ۴ کرو اور اس کے ماسکوں کے محدود معلوم کرو۔

۸۔ زائد $\frac{1}{2} \text{ لا} - \frac{1}{3} \text{ ب} = 1$ کے متقارب معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

ان کا درمیانی زاویہ (۲ قسط - ۱ ز) ہے۔

۹۔ زائد کو آلی طریق پر مرتبہ کرنے کی ترکیب بیان کرو اور اس کا ثبوت لکھو۔

۱۰۔ اس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے متقارب لا + ما + ا = ۱۰۔

اور ۲ لا - ما + ۲ = ۰ ہیں اور جو لا = ۲ کو مس کرتا ہے۔



بائشتم

درجہ دوم کی عام مساوات

۹۳۔ اس باب میں ایک حد تک ہم ان تمام منحنیات پر جن کی مساواتیں درجہ دوم کی ہیں بحث کرینگے اور ان کو مختلف جماعتوں میں تقسیم کرنے کی کوشش کریں گے۔

حسب معمول ہم درجہ دوم کی مساوات عامہ کو اس شکل میں لکھتے ہیں

$$لا + ۲ + لا + ما + ب + ۲ + گ + لا + ۲ + ف + ما + ج = -$$

طالب علم دیکھے گا کہ گزشتہ تین بابوں میں ہم نے جن منحنیات پر بحث کی ہے ان کی مساواتیں درجہ دوم کی ہیں اور اس لحاظ سے سب کی سب ادپر کی صورت عامہ میں شامل ہیں۔

نیز ناقص اور زائد کی صورت میں ہم نے دیکھا کہ منحنی ایک مرکز رکھتا ہے جس کو اگر مبدا قرار دیا جائے تو منحنی کی مساوات سادہ سے سادہ صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اب ہم ثابت کرینگے کہ جو منحنی درجہ دوم کی عام سے عام مساوات سے تعبیر ہوتا ہے اس کا بھی بالعموم ایک مرکز ہوتا ہے جس کو مبدا مان کر ہم مساوات مذکورہ کو نہایت سادہ شکل میں لاسکتے ہیں۔

۹۴۔ اگر ایک منحنی میں جو مساوات درجہ دوم سے تعبیر ہوتا ہو مبدا میں سے گزرنے والے تمام وتروں کی تنصیف مبدا پر ہوتی ہو تو مساوات میں لا اور ما کے سرلازما مفر ہونگے۔

مبدا میں سے گزرنے والے کسی خط کی مساوات $ما = م$ (اسے اور یہ خط منحنی $لا + ۲ + لا + ما + ب + ۲ + گ + لا + ۲ + ف + ما + ج = -$

سے دو نقاط پر ملتا ہے جنکے فیصلے مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں۔

اولاً ۲ هم لا + ب بتم اولاً ۲ + لا ۲ + ب بتم لا + ج =

یا لا (۱ + ۲ هـ م + ب ف م) + ۲ لا (گ + ف م) + ج = ۰

اب اگر اس وتر کی تصنیف مبداء پر ہوتی ہو تو اس مساوات کی اصلیں مساوی اور مختلف العلامت ہوتی جائیں یعنی اس میں الا کا سر صفر ہونا چاہیے [یونیورسٹی الجبر حصہ دوم دفعہ ۱۶۳]

اسلئے گ + ف م =

لیکن چونکہ میدان میں سے گزرنے والے تمام دتروں کی سہولت پر تنصیف ہوتی ہے اس لئے اس مساوات کو م کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہونا چاہئے یعنی ضروری ہے کہ گ = ۰ اور ف = ۰ اور یہی ثابت کرنا تھا۔

برعکس اس کے اگر گ = ف = ۰ تو مبداء میں سے گزرنے والے
سبب و تزیوں کی مبداء پر تنصیف ہوگی کیونکہ فضلوں کی جو مساوات درجہ دوم
ما کی بجائے ملا لکھنے سے حاصل ہوگی اس کی اصلیں ۳ کی تمام قیمتوں کے
لئے مساوی اور مختلف علامت ہوں گی۔

۹۵۔ اگر آب، ہوا کے مساوی نہ ہو تو مبادی کی مناسب تبدیلی سے ہم درجہ دوم کے کسی مخفی کی مساوات کو ایسی شکل میں لاسکتے ہیں جس میں لا اور ما کے سر صفر ہوں۔

فرض کر دو کہ ہم کوئی نیا مبدأ (لا، مآ) لیتے ہیں، اس نقطہ (لا، مآ) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات کو تحویل کرنے کے لئے ہیں اصلی مساوات میں لا کی بجائے لا + لا اور مآ کی بجائے مآ + مآ لکھنا چاہیئے اس طرح نئی مساوات ہوگی

$$= 1 + (1 + \bar{a}) + (1 + \bar{a})^2 + \dots + (1 + \bar{a})^{n-1} + (1 + \bar{a})^n$$

یٰۤاُولَآءِ لَا مَآبَ لَکُمْ اَنْ تَرْجِعُوْا فِیْہِ (وَلَا تَرْجِعُوْا فِیْہِ) (وَلَا تَرْجِعُوْا فِیْہِ) (وَلَا تَرْجِعُوْا فِیْہِ)

۰ = لا + ۲هـ لا + ب + ۲گ لا + ۲ف تا + ج =

اب اس مساوات میں لا اور ا کے سر صفر ہونگے اگر
 (لا + ہ + ما + گ = ا اور لا + ب + ما + ف = (۱)
 ضرب چلیپی کے قاعدہ کی مدد سے حل کرنے سے

$$\frac{\text{لا} - \text{ب} - \text{گ}}{\text{لا} - \text{ب} - \text{گ}} = \frac{\text{ا} - \text{ب} - \text{ف}}{\text{ا} - \text{ب} - \text{ف}} = \frac{\text{ا} - \text{ب} - \text{ف}}{\text{ا} - \text{ب} - \text{ف}}$$

یعنی لا = ہ = ا

اسلئے اگر ا، ب، ہ کے مساوی نہ ہو تو ہم لا، ا کی ایسی محدود قیمت میں
 منتخب کر سکتے ہیں کہ نئی مساوات میں لا، ا، ما والی رقمیں موجود نہ ہوں۔
 اوپر کی دو مساواتوں (۱) کو یک ترکیب ذیل کی مدد سے بائانی یاد رکھ سکتے ہیں۔

حرف ا، ب، ج کو مربع کے
 ایک قطر پر لکھو اور اس کے دونوں
 طرف تین نقطوں کے اس طرح نشان
 دو جیسے شکل میں۔ پھر ان خالی جگہوں

کو حروف ف، گ، ہ سے پُر کرو جیسے تیروں کی سمتوں سے ظاہر ہے

و
 ہ
 ب
 ف
 گ
 ت
 ج

اس طرح سے ہم حاصل ہوگا۔

اس مربع کی پہلی دو سطروں میں جو حروف ہیں وہ
 مساواتوں (۱) میں بالترتیب لا، ا، ما کے سرادر مطلق رقمیں ہیں
 اوپر کی تین دفعات کو اکٹھا لانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ
 ۹۶۔ اگر ا، ب، ہ کے مساوی نہ ہو تو درجہ دوم کے ہر منحنی کے
 ساتھ ایک ایسا نقطہ متعلق ہے جس میں سے گزرنے والے منحنی کے تینوں
 کی اس نقطہ پر متصفی ہوتی ہے۔

دفعہ ۹۵ میں ہم نے دیکھا کہ اگر نقطہ (لا، ا، ما) کو نیا مبداء قرار دیا جائے
 تو نئی مساوات میں لا، ا، ما کی رقمیں نہیں رہیں اور اسلئے دفعہ ۹۴ سے

ظاہر ہے کہ اس نئے مبدا میں سے گزرنے والے سب دتروں کی تنقیف اسی نقطہ پر ہونی چاہیئے۔ اس نقطہ کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں اور اس میں سے گزرنے والے ہر دتر کو منحنی کا قطر کہتے ہیں۔

نوٹ۔ طالب علم دیکھ لیگا کہ مرکز کے متعلق جو کچھ یہاں بیان ہوا وہ بالکل اسکے مطابق ہے جو ابواب چارم و پنجم میں مرکروں کے بارے میں لکھا جا چکا ہے۔
نتیجہ صریح۔ منحنی کے مرکز کے محدود ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں

$$آ + ہ + م + گ = ۰ ، ہ + آ + ب + م + ف = ۰ (۱)$$

اور اگر مرکز کو نیا مبدا مانا جائے تو مساوات جو جاتی ہے

$$آ + ہ + م + ب + م + آ + ہ + آ + م + ب + م + آ + گ + آ + م + ف + ج = ۰$$

 مثال۔ منحنی ۳ - لا - آ - م + م - لا - ۳ - م + آ = ۰ کے مرکز معلوم کرنے کے لئے مساواتیں لکھو اور مرکز کے محدود معلوم کرو۔

یہاں ۱ = ۳ - ہ = ۱ ، ۱ = ب = ۱ ، گ = ۱ ، ف = ۱ ، ج = ۱
 اس لئے مرکز کے لئے مساواتیں ہیں

$$آ + ہ + م + گ = ۰ ، ہ + آ + ب + م + ف = ۰$$

یعنی ۳ - لا - آ - ۱ = ۱ ، ۱ - لا - م - ۳ = ۱

جس سے لا = ۱ ، م = ۱

مشقیں

ذیل کے منحنیات میں سے ہر ایک کے مرکز کے لئے مساواتیں لکھو اور ان سے مرکز کے محدود معلوم کرو۔

$$۱ - آ - لا + م + م + آ + ہ + لا + ۳ = ۰$$

$$۲ - لا - م - آ - ۲ - لا + م + ۴ = ۰$$

$$۳ - لا - آ - م + لا + م + ۳ + لا + م + ۳ = ۰$$

$$۴ - لا - آ + لا + م + ۱ = ۰$$

۹۶۔ منحنی کی مساوات جبکہ مرکز مبدا ہو۔

تاییدہ منحنی کی مساوات بلحاظ ایسے مبدأ کے جو منحنی کے مرکز پر ہوا اصلی مساوات کی درجہ اول کی رقوموں میں لانا کے بجائے مرکز کے نصف محدود مندرجہ کرے سے حاصل ہوتی ہے۔
ہم نے اوپر دیکھا کہ مساوات مطلوبہ ہے

$$۱۰ = ۲(لا + ما + ب + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج) =$$

اس میں رقم مطلق ہے $۱۰ = ۲(لا + ما + ب + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج)$
 $= لا(۱۰ + ۲ما + ۲گ) + ما(۱۰ + ۲لا + ۲ف) + ۲گ(۱۰ + ۲لا + ۲ف) + ۲ف(۱۰ + ۲ما + ۲ج) + ۲ج(۱۰ + ۲ما + ۲گ)$

$= ۲گ(۱۰ + ۲لا + ۲ف) + ۲ف(۱۰ + ۲ما + ۲ج) + ۲ج(۱۰ + ۲ما + ۲گ) + ۲(لا + ما + ب + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج) = ۱۰$
 اب چونکہ اصلی مساوات میں درجہ اول کی رقومیں $۲گ + لا + ۲ف + ما + ج$ ہیں اس لئے قاعدہ مندرجہ بالا ثابت ہوا، یہ قاعدہ ایک حد تک ضروری ہے اور عملیات میں حسابات کو مختصر بنا دیتا ہے، طالب علم اسے یاد رکھے
 مثال منحنی $۳ لا + لا + ما + ۲ + ۲ لا + ما + ۱ = ۱۰$ کے مرکز کے محدود معامہ کرد اور منحنی کی مساوات اس صورت میں حاصل کرو جبکہ مرکز مبدأ ہو۔
 اس جگہ $۱ = ۳$ ، $۲ = ۴$ ، $۳ = ۵$ ، $۴ = ۶$ ، $۵ = ۷$ ، $۶ = ۸$ ، $۷ = ۹$ ، $۸ = ۱۰$ ، $۹ = ۱۱$ ، $۱۰ = ۱۲$ ، $۱۱ = ۱۳$ ، $۱۲ = ۱۴$ ، $۱۳ = ۱۵$ ، $۱۴ = ۱۶$ ، $۱۵ = ۱۷$ ، $۱۶ = ۱۸$ ، $۱۷ = ۱۹$ ، $۱۸ = ۲۰$ ، $۱۹ = ۲۱$ ، $۲۰ = ۲۲$ ، $۲۱ = ۲۳$ ، $۲۲ = ۲۴$ ، $۲۳ = ۲۵$ ، $۲۴ = ۲۶$ ، $۲۵ = ۲۷$ ، $۲۶ = ۲۸$ ، $۲۷ = ۲۹$ ، $۲۸ = ۳۰$ ، $۲۹ = ۳۱$ ، $۳۰ = ۳۲$ ، $۳۱ = ۳۳$ ، $۳۲ = ۳۴$ ، $۳۳ = ۳۵$ ، $۳۴ = ۳۶$ ، $۳۵ = ۳۷$ ، $۳۶ = ۳۸$ ، $۳۷ = ۳۹$ ، $۳۸ = ۴۰$ ، $۳۹ = ۴۱$ ، $۴۰ = ۴۲$ ، $۴۱ = ۴۳$ ، $۴۲ = ۴۴$ ، $۴۳ = ۴۵$ ، $۴۴ = ۴۶$ ، $۴۵ = ۴۷$ ، $۴۶ = ۴۸$ ، $۴۷ = ۴۹$ ، $۴۸ = ۵۰$ ، $۴۹ = ۵۱$ ، $۵۰ = ۵۲$ ، $۵۱ = ۵۳$ ، $۵۲ = ۵۴$ ، $۵۳ = ۵۵$ ، $۵۴ = ۵۶$ ، $۵۵ = ۵۷$ ، $۵۶ = ۵۸$ ، $۵۷ = ۵۹$ ، $۵۸ = ۶۰$ ، $۵۹ = ۶۱$ ، $۶۰ = ۶۲$ ، $۶۱ = ۶۳$ ، $۶۲ = ۶۴$ ، $۶۳ = ۶۵$ ، $۶۴ = ۶۶$ ، $۶۵ = ۶۷$ ، $۶۶ = ۶۸$ ، $۶۷ = ۶۹$ ، $۶۸ = ۷۰$ ، $۶۹ = ۷۱$ ، $۷۰ = ۷۲$ ، $۷۱ = ۷۳$ ، $۷۲ = ۷۴$ ، $۷۳ = ۷۵$ ، $۷۴ = ۷۶$ ، $۷۵ = ۷۷$ ، $۷۶ = ۷۸$ ، $۷۷ = ۷۹$ ، $۷۸ = ۸۰$ ، $۷۹ = ۸۱$ ، $۸۰ = ۸۲$ ، $۸۱ = ۸۳$ ، $۸۲ = ۸۴$ ، $۸۳ = ۸۵$ ، $۸۴ = ۸۶$ ، $۸۵ = ۸۷$ ، $۸۶ = ۸۸$ ، $۸۷ = ۸۹$ ، $۸۸ = ۹۰$ ، $۸۹ = ۹۱$ ، $۹۰ = ۹۲$ ، $۹۱ = ۹۳$ ، $۹۲ = ۹۴$ ، $۹۳ = ۹۵$ ، $۹۴ = ۹۶$ ، $۹۵ = ۹۷$ ، $۹۶ = ۹۸$ ، $۹۷ = ۹۹$ ، $۹۸ = ۱۰۰$ ، $۹۹ = ۱۰۱$ ، $۱۰۰ = ۱۰۲$ ، $۱۰۱ = ۱۰۳$ ، $۱۰۲ = ۱۰۴$ ، $۱۰۳ = ۱۰۵$ ، $۱۰۴ = ۱۰۶$ ، $۱۰۵ = ۱۰۷$ ، $۱۰۶ = ۱۰۸$ ، $۱۰۷ = ۱۰۹$ ، $۱۰۸ = ۱۱۰$ ، $۱۰۹ = ۱۱۱$ ، $۱۱۰ = ۱۱۲$ ، $۱۱۱ = ۱۱۳$ ، $۱۱۲ = ۱۱۴$ ، $۱۱۳ = ۱۱۵$ ، $۱۱۴ = ۱۱۶$ ، $۱۱۵ = ۱۱۷$ ، $۱۱۶ = ۱۱۸$ ، $۱۱۷ = ۱۱۹$ ، $۱۱۸ = ۱۲۰$ ، $۱۱۹ = ۱۲۱$ ، $۱۲۰ = ۱۲۲$ ، $۱۲۱ = ۱۲۳$ ، $۱۲۲ = ۱۲۴$ ، $۱۲۳ = ۱۲۵$ ، $۱۲۴ = ۱۲۶$ ، $۱۲۵ = ۱۲۷$ ، $۱۲۶ = ۱۲۸$ ، $۱۲۷ = ۱۲۹$ ، $۱۲۸ = ۱۳۰$ ، $۱۲۹ = ۱۳۱$ ، $۱۳۰ = ۱۳۲$ ، $۱۳۱ = ۱۳۳$ ، $۱۳۲ = ۱۳۴$ ، $۱۳۳ = ۱۳۵$ ، $۱۳۴ = ۱۳۶$ ، $۱۳۵ = ۱۳۷$ ، $۱۳۶ = ۱۳۸$ ، $۱۳۷ = ۱۳۹$ ، $۱۳۸ = ۱۴۰$ ، $۱۳۹ = ۱۴۱$ ، $۱۴۰ = ۱۴۲$ ، $۱۴۱ = ۱۴۳$ ، $۱۴۲ = ۱۴۴$ ، $۱۴۳ = ۱۴۵$ ، $۱۴۴ = ۱۴۶$ ، $۱۴۵ = ۱۴۷$ ، $۱۴۶ = ۱۴۸$ ، $۱۴۷ = ۱۴۹$ ، $۱۴۸ = ۱۵۰$ ، $۱۴۹ = ۱۵۱$ ، $۱۵۰ = ۱۵۲$ ، $۱۵۱ = ۱۵۳$ ، $۱۵۲ = ۱۵۴$ ، $۱۵۳ = ۱۵۵$ ، $۱۵۴ = ۱۵۶$ ، $۱۵۵ = ۱۵۷$ ، $۱۵۶ = ۱۵۸$ ، $۱۵۷ = ۱۵۹$ ، $۱۵۸ = ۱۶۰$ ، $۱۵۹ = ۱۶۱$ ، $۱۶۰ = ۱۶۲$ ، $۱۶۱ = ۱۶۳$ ، $۱۶۲ = ۱۶۴$ ، $۱۶۳ = ۱۶۵$ ، $۱۶۴ = ۱۶۶$ ، $۱۶۵ = ۱۶۷$ ، $۱۶۶ = ۱۶۸$ ، $۱۶۷ = ۱۶۹$ ، $۱۶۸ = ۱۷۰$ ، $۱۶۹ = ۱۷۱$ ، $۱۷۰ = ۱۷۲$ ، $۱۷۱ = ۱۷۳$ ، $۱۷۲ = ۱۷۴$ ، $۱۷۳ = ۱۷۵$ ، $۱۷۴ = ۱۷۶$ ، $۱۷۵ = ۱۷۷$ ، $۱۷۶ = ۱۷۸$ ، $۱۷۷ = ۱۷۹$ ، $۱۷۸ = ۱۸۰$ ، $۱۷۹ = ۱۸۱$ ، $۱۸۰ = ۱۸۲$ ، $۱۸۱ = ۱۸۳$ ، $۱۸۲ = ۱۸۴$ ، $۱۸۳ = ۱۸۵$ ، $۱۸۴ = ۱۸۶$ ، $۱۸۵ = ۱۸۷$ ، $۱۸۶ = ۱۸۸$ ، $۱۸۷ = ۱۸۹$ ، $۱۸۸ = ۱۹۰$ ، $۱۸۹ = ۱۹۱$ ، $۱۹۰ = ۱۹۲$ ، $۱۹۱ = ۱۹۳$ ، $۱۹۲ = ۱۹۴$ ، $۱۹۳ = ۱۹۵$ ، $۱۹۴ = ۱۹۶$ ، $۱۹۵ = ۱۹۷$ ، $۱۹۶ = ۱۹۸$ ، $۱۹۷ = ۱۹۹$ ، $۱۹۸ = ۲۰۰$ ، $۱۹۹ = ۲۰۱$ ، $۲۰۰ = ۲۰۲$ ، $۲۰۱ = ۲۰۳$ ، $۲۰۲ = ۲۰۴$ ، $۲۰۳ = ۲۰۵$ ، $۲۰۴ = ۲۰۶$ ، $۲۰۵ = ۲۰۷$ ، $۲۰۶ = ۲۰۸$ ، $۲۰۷ = ۲۰۹$ ، $۲۰۸ = ۲۱۰$ ، $۲۰۹ = ۲۱۱$ ، $۲۱۰ = ۲۱۲$ ، $۲۱۱ = ۲۱۳$ ، $۲۱۲ = ۲۱۴$ ، $۲۱۳ = ۲۱۵$ ، $۲۱۴ = ۲۱۶$ ، $۲۱۵ = ۲۱۷$ ، $۲۱۶ = ۲۱۸$ ، $۲۱۷ = ۲۱۹$ ، $۲۱۸ = ۲۲۰$ ، $۲۱۹ = ۲۲۱$ ، $۲۲۰ = ۲۲۲$ ، $۲۲۱ = ۲۲۳$ ، $۲۲۲ = ۲۲۴$ ، $۲۲۳ = ۲۲۵$ ، $۲۲۴ = ۲۲۶$ ، $۲۲۵ = ۲۲۷$ ، $۲۲۶ = ۲۲۸$ ، $۲۲۷ = ۲۲۹$ ، $۲۲۸ = ۲۳۰$ ، $۲۲۹ = ۲۳۱$ ، $۲۳۰ = ۲۳۲$ ، $۲۳۱ = ۲۳۳$ ، $۲۳۲ = ۲۳۴$ ، $۲۳۳ = ۲۳۵$ ، $۲۳۴ = ۲۳۶$ ، $۲۳۵ = ۲۳۷$ ، $۲۳۶ = ۲۳۸$ ، $۲۳۷ = ۲۳۹$ ، $۲۳۸ = ۲۴۰$ ، $۲۳۹ = ۲۴۱$ ، $۲۴۰ = ۲۴۲$ ، $۲۴۱ = ۲۴۳$ ، $۲۴۲ = ۲۴۴$ ، $۲۴۳ = ۲۴۵$ ، $۲۴۴ = ۲۴۶$ ، $۲۴۵ = ۲۴۷$ ، $۲۴۶ = ۲۴۸$ ، $۲۴۷ = ۲۴۹$ ، $۲۴۸ = ۲۵۰$ ، $۲۴۹ = ۲۵۱$ ، $۲۵۰ = ۲۵۲$ ، $۲۵۱ = ۲۵۳$ ، $۲۵۲ = ۲۵۴$ ، $۲۵۳ = ۲۵۵$ ، $۲۵۴ = ۲۵۶$ ، $۲۵۵ = ۲۵۷$ ، $۲۵۶ = ۲۵۸$ ، $۲۵۷ = ۲۵۹$ ، $۲۵۸ = ۲۶۰$ ، $۲۵۹ = ۲۶۱$ ، $۲۶۰ = ۲۶۲$ ، $۲۶۱ = ۲۶۳$ ، $۲۶۲ = ۲۶۴$ ، $۲۶۳ = ۲۶۵$ ، $۲۶۴ = ۲۶۶$ ، $۲۶۵ = ۲۶۷$ ، $۲۶۶ = ۲۶۸$ ، $۲۶۷ = ۲۶۹$ ، $۲۶۸ = ۲۷۰$ ، $۲۶۹ = ۲۷۱$ ، $۲۷۰ = ۲۷۲$ ، $۲۷۱ = ۲۷۳$ ، $۲۷۲ = ۲۷۴$ ، $۲۷۳ = ۲۷۵$ ، $۲۷۴ = ۲۷۶$ ، $۲۷۵ = ۲۷۷$ ، $۲۷۶ = ۲۷۸$ ، $۲۷۷ = ۲۷۹$ ، $۲۷۸ = ۲۸۰$ ، $۲۷۹ = ۲۸۱$ ، $۲۸۰ = ۲۸۲$ ، $۲۸۱ = ۲۸۳$ ، $۲۸۲ = ۲۸۴$ ، $۲۸۳ = ۲۸۵$ ، $۲۸۴ = ۲۸۶$ ، $۲۸۵ = ۲۸۷$ ، $۲۸۶ = ۲۸۸$ ، $۲۸۷ = ۲۸۹$ ، $۲۸۸ = ۲۹۰$ ، $۲۸۹ = ۲۹۱$ ، $۲۹۰ = ۲۹۲$ ، $۲۹۱ = ۲۹۳$ ، $۲۹۲ = ۲۹۴$ ، $۲۹۳ = ۲۹۵$ ، $۲۹۴ = ۲۹۶$ ، $۲۹۵ = ۲۹۷$ ، $۲۹۶ = ۲۹۸$ ، $۲۹۷ = ۲۹۹$ ، $۲۹۸ = ۳۰۰$ ، $۲۹۹ = ۳۰۱$ ، $۳۰۰ = ۳۰۲$ ، $۳۰۱ = ۳۰۳$ ، $۳۰۲ = ۳۰۴$ ، $۳۰۳ = ۳۰۵$ ، $۳۰۴ = ۳۰۶$ ، $۳۰۵ = ۳۰۷$ ، $۳۰۶ = ۳۰۸$ ، $۳۰۷ = ۳۰۹$ ، $۳۰۸ = ۳۱۰$ ، $۳۰۹ = ۳۱۱$ ، $۳۱۰ = ۳۱۲$ ، $۳۱۱ = ۳۱۳$ ، $۳۱۲ = ۳۱۴$ ، $۳۱۳ = ۳۱۵$ ، $۳۱۴ = ۳۱۶$ ، $۳۱۵ = ۳۱۷$ ، $۳۱۶ = ۳۱۸$ ، $۳۱۷ = ۳۱۹$ ، $۳۱۸ = ۳۲۰$ ، $۳۱۹ = ۳۲۱$ ، $۳۲۰ = ۳۲۲$ ، $۳۲۱ = ۳۲۳$ ، $۳۲۲ = ۳۲۴$ ، $۳۲۳ = ۳۲۵$ ، $۳۲۴ = ۳۲۶$ ، $۳۲۵ = ۳۲۷$ ، $۳۲۶ = ۳۲۸$ ، $۳۲۷ = ۳۲۹$ ، $۳۲۸ = ۳۳۰$ ، $۳۲۹ = ۳۳۱$ ، $۳۳۰ = ۳۳۲$ ، $۳۳۱ = ۳۳۳$ ، $۳۳۲ = ۳۳۴$ ، $۳۳۳ = ۳۳۵$ ، $۳۳۴ = ۳۳۶$ ، $۳۳۵ = ۳۳۷$ ، $۳۳۶ = ۳۳۸$ ، $۳۳۷ = ۳۳۹$ ، $۳۳۸ = ۳۴۰$ ، $۳۳۹ = ۳۴۱$ ، $۳۴۰ = ۳۴۲$ ، $۳۴۱ = ۳۴۳$ ، $۳۴۲ = ۳۴۴$ ، $۳۴۳ = ۳۴۵$ ، $۳۴۴ = ۳۴۶$ ، $۳۴۵ = ۳۴۷$ ، $۳۴۶ = ۳۴۸$ ، $۳۴۷ = ۳۴۹$ ، $۳۴۸ = ۳۵۰$ ، $۳۴۹ = ۳۵۱$ ، $۳۵۰ = ۳۵۲$ ، $۳۵۱ = ۳۵۳$ ، $۳۵۲ = ۳۵۴$ ، $۳۵۳ = ۳۵۵$ ، $۳۵۴ = ۳۵۶$ ، $۳۵۵ = ۳۵۷$ ، $۳۵۶ = ۳۵۸$ ، $۳۵۷ = ۳۵۹$ ، $۳۵۸ = ۳۶۰$ ، $۳۵۹ = ۳۶۱$ ، $۳۶۰ = ۳۶۲$ ، $۳۶۱ = ۳۶۳$ ، $۳۶۲ = ۳۶۴$ ، $۳۶۳ = ۳۶۵$ ، $۳۶۴ = ۳۶۶$ ، $۳۶۵ = ۳۶۷$ ، $۳۶۶ = ۳۶۸$ ، $۳۶۷ = ۳۶۹$ ، $۳۶۸ = ۳۷۰$ ، $۳۶۹ = ۳۷۱$ ، $۳۷۰ = ۳۷۲$ ، $۳۷۱ = ۳۷۳$ ، $۳۷۲ = ۳۷۴$ ، $۳۷۳ = ۳۷۵$ ، $۳۷۴ = ۳۷۶$ ، $۳۷۵ = ۳۷۷$ ، $۳۷۶ = ۳۷۸$ ، $۳۷۷ = ۳۷۹$ ، $۳۷۸ = ۳۸۰$ ، $۳۷۹ = ۳۸۱$ ، $۳۸۰ = ۳۸۲$ ، $۳۸۱ = ۳۸۳$ ، $۳۸۲ = ۳۸۴$ ، $۳۸۳ = ۳۸۵$ ، $۳۸۴ = ۳۸۶$ ، $۳۸۵ = ۳۸۷$ ، $۳۸۶ = ۳۸۸$ ، $۳۸۷ = ۳۸۹$ ، $۳۸۸ = ۳۹۰$ ، $۳۸۹ = ۳۹۱$ ، $۳۹۰ = ۳۹۲$ ، $۳۹۱ = ۳۹۳$ ، $۳۹۲ = ۳۹۴$ ، $۳۹۳ = ۳۹۵$ ، $۳۹۴ = ۳۹۶$ ، $۳۹۵ = ۳۹۷$ ، $۳۹۶ = ۳۹۸$ ، $۳۹۷ = ۳۹۹$ ، $۳۹۸ = ۴۰۰$ ، $۳۹۹ = ۴۰۱$ ، $۴۰۰ = ۴۰۲$ ، $۴۰۱ = ۴۰۳$ ، $۴۰۲ = ۴۰۴$ ، $۴۰۳ = ۴۰۵$ ، $۴۰۴ = ۴۰۶$ ، $۴۰۵ = ۴۰۷$ ، $۴۰۶ = ۴۰۸$ ، $۴۰۷ = ۴۰۹$ ، $۴۰۸ = ۴۱۰$ ، $۴۰۹ = ۴۱۱$ ، $۴۱۰ = ۴۱۲$ ، $۴۱۱ = ۴۱۳$ ، $۴۱۲ = ۴۱۴$ ، $۴۱۳ = ۴۱۵$ ، $۴۱۴ = ۴۱۶$ ، $۴۱۵ = ۴۱۷$ ، $۴۱۶ = ۴۱۸$ ، $۴۱۷ = ۴۱۹$ ، $۴۱۸ = ۴۲۰$ ، $۴۱۹ = ۴۲۱$ ، $۴۲۰ = ۴۲۲$ ، $۴۲۱ = ۴۲۳$ ، $۴۲۲ = ۴۲۴$ ، $۴۲۳ = ۴۲۵$ ، $۴۲۴ = ۴۲۶$ ، $۴۲۵ = ۴۲۷$ ، $۴۲۶ = ۴۲۸$ ، $۴۲۷ = ۴۲۹$ ، $۴۲۸ = ۴۳۰$ ، $۴۲۹ = ۴۳۱$ ، $۴۳۰ = ۴۳۲$ ، $۴۳۱ = ۴۳۳$ ، $۴۳۲ = ۴۳۴$ ، $۴۳۳ = ۴۳۵$ ، $۴۳۴ = ۴۳۶$ ، $۴۳۵ = ۴۳۷$ ، $۴۳۶ = ۴۳۸$ ، $۴۳۷ = ۴۳۹$ ، $۴۳۸ = ۴۴۰$ ، $۴۳۹ = ۴۴۱$ ، $۴۴۰ = ۴۴۲$ ، $۴۴۱ = ۴۴۳$ ، $۴۴۲ = ۴۴۴$ ، $۴۴۳ = ۴۴۵$ ، $۴۴۴ = ۴۴۶$ ، $۴۴۵ = ۴۴۷$ ، $۴۴۶ = ۴۴۸$ ، $۴۴۷ = ۴۴۹$ ، $۴۴۸ = ۴۵۰$ ، $۴۴۹ = ۴۵۱$ ، $۴۵۰ = ۴۵۲$ ، $۴۵۱ = ۴۵۳$ ، $۴۵۲ = ۴۵۴$ ، $۴۵۳ = ۴۵۵$ ، $۴۵۴ = ۴۵۶$ ، $۴۵۵ = ۴۵۷$ ، $۴۵۶ = ۴۵۸$ ، $۴۵۷ = ۴۵۹$ ، $۴۵۸ = ۴۶۰$ ، $۴۵۹ = ۴۶۱$ ، $۴۶۰ = ۴۶۲$ ، $۴۶۱ = ۴۶۳$ ، $۴۶۲ = ۴۶۴$ ، $۴۶۳ = ۴۶۵$ ، $۴۶۴ = ۴۶۶$ ، $۴۶۵ = ۴۶۷$ ، $۴۶۶ = ۴۶۸$ ، $۴۶۷ = ۴۶۹$ ، $۴۶۸ = ۴۷۰$ ، $۴۶۹ = ۴۷۱$ ، $۴۷۰ = ۴۷۲$ ، $۴۷۱ = ۴۷۳$ ، $۴۷۲ = ۴۷۴$ ، $۴۷۳ = ۴۷۵$ ، $۴۷۴ = ۴۷۶$ ، $۴۷۵ = ۴۷۷$ ، $۴۷۶ = ۴۷۸$ ، $۴۷۷ = ۴۷۹$ ، $۴۷۸ = ۴۸۰$ ، $۴۷۹ = ۴۸۱$ ، $۴۸۰ = ۴۸۲$ ، $۴۸۱ = ۴۸۳$ ، $۴۸۲ = ۴۸۴$ ، $۴۸۳ = ۴۸۵$ ، $۴۸۴ = ۴۸۶$ ، $۴۸۵ = ۴۸۷$ ، $۴۸۶ = ۴۸۸$ ، $۴۸۷ = ۴۸۹$ ، $۴۸۸ = ۴۹۰$ ، $۴۸۹ = ۴۹۱$ ، $۴۹۰ = ۴۹۲$ ، $۴۹۱ = ۴۹۳$ ، $۴۹۲ = ۴۹۴$ ، $۴۹۳ = ۴۹۵$ ، $۴۹۴ = ۴۹۶$ ، $۴۹۵ = ۴۹۷$ ، $۴۹۶ = ۴۹۸$ ، $۴۹۷ = ۴۹۹$ ، $۴۹۸ = ۵۰۰$ ، $۴۹۹ = ۵۰۱$ ، $۵۰۰ = ۵۰۲$ ، $۵۰۱ = ۵۰۳$ ، $۵۰۲ = ۵۰۴$ ، $۵۰۳ = ۵۰۵$ ، $۵۰۴ = ۵۰۶$ ، $۵۰۵ = ۵۰۷$ ، $۵۰۶ = ۵۰۸$ ، $۵۰۷ = ۵۰۹$ ، $۵۰۸ = ۵۱۰$ ، $۵۰۹ = ۵۱۱$ ، $۵۱۰ = ۵۱۲$ ، $۵۱۱ = ۵۱۳$ ، $۵۱۲ = ۵۱۴$ ، $۵۱۳ = ۵۱۵$ ، $۵۱۴ = ۵۱۶$ ، $۵۱۵ = ۵۱۷$ ، $۵۱۶ = ۵۱۸$ ، $۵۱۷ = ۵۱۹$ ، $۵۱۸ = ۵۲۰$ ، $۵۱۹ = ۵۲۱$ ، $۵۲۰ = ۵۲۲$ ، $۵۲۱ = ۵۲۳$ ، $۵۲۲ = ۵۲۴$ ، $۵۲۳ = ۵۲۵$ ، $۵۲۴ = ۵۲۶$ ، $۵۲۵ = ۵۲۷$ ، $۵۲۶ = ۵۲۸$ ، $۵۲۷ = ۵۲۹$ ، $۵۲۸ = ۵۳۰$ ، $۵۲۹ = ۵۳۱$ ، $۵۳۰ = ۵۳۲$ ، $۵۳۱ = ۵۳۳$ ، $۵۳۲ = ۵۳۴$ ، $۵۳۳ = ۵۳۵$ ، $۵۳۴ = ۵۳۶$ ، $۵۳۵ = ۵۳۷$ ، $۵۳۶ = ۵۳۸$ ، $۵۳۷ = ۵۳۹$ ، $۵۳۸ = ۵۴۰$ ، $۵۳۹ = ۵۴۱$ ، $۵۴۰ = ۵۴۲$ ، $۵۴۱ = ۵۴۳$ ، $۵۴۲ = ۵۴۴$ ، $۵۴۳ = ۵۴۵$ ، $۵۴۴ = ۵۴۶$ ، $۵۴۵ = ۵۴۷$ ، $۵۴۶ = ۵۴۸$ ، $۵۴۷ = ۵۴۹$ ، $۵۴۸ = ۵۵۰$ ، $۵۴۹ = ۵۵۱$ ، $۵۵۰ = ۵۵۲$ ، $۵۵۱ = ۵۵۳$ ، $۵۵۲ = ۵۵۴$ ، $۵۵۳ = ۵۵۵$ ، $۵۵۴ = ۵۵۶$ ، $۵۵۵ = ۵۵۷$ ، $۵۵۶ = ۵۵۸$ ، $۵۵۷ = ۵۵۹$ ، $۵۵۸ = ۵۶۰$ ، $۵۵۹ = ۵۶۱$ ، $۵۶۰ = ۵۶۲$ ، $۵۶۱ = ۵۶۳$ ، $۵۶۲ = ۵۶۴$ ، $۵۶۳ = ۵۶۵$ ، $۵۶۴ = ۵۶۶$ ، $۵۶۵ = ۵۶۷$ ، $۵۶۶ = ۵۶۸$ ، $۵۶۷ = ۵۶۹$ ، $۵۶۸ = ۵۷۰$ ، $۵۶۹ = ۵۷۱$ ، $۵۷۰ = ۵۷۲$ ، $۵۷۱ = ۵۷۳$ ، $۵۷۲ = ۵۷۴$ ، ۵۷

$$۳ لا^۲ + لا ما^۲ + ما^۲ - (- \frac{۴}{۲۲}) + (- \frac{۱}{۱۱}) = ۰$$

$$یعنی ۳ لا^۲ + لا ما^۲ + ما^۲ - \frac{۴}{۱۱} = ۰$$

مشقیں

منحنيات ذیل کے مرکز معلوم کرو اور ان میں سے ہر ایک کی مساوات حاصل کرو جبکہ مبدأ منحنی کے مرکز پر ہو۔

$$۵ - ۳ لا^۲ + لا ما^۲ + ما^۲ - لا ۲ + لا ۱ - ۱ = ۰$$

$$۶ - ۴ لا^۲ + لا ما^۲ + ما^۲ + لا + لا ۱ + ۱ = ۰$$

$$۷ - لا ما^۲ + لا ۲ + ما^۲ + لا ۳ + لا ۱ = ۰$$

$$۸ - عام صورت میں یہ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم لا + لا ۱ + لا ۲ + لا ۳ + لا ۴ = ۰$$

$$اور لا + لا ۲ + لا ۳ + لا ۴ = ۰ منحنی کے قطر ہیں۔$$

$$۹۸ - نئی رقم مطلق اصلی سروں کی رقوم میں۔$$

عام صورت میں نئی رقم مطلق ہے گ لا + ف ما + ج
جسے ہم اس شکل ۲ گ (\frac{لا}{۱۱}) + ۲ ف (\frac{لا}{۱۱}) + ج میں لکھ سکتے ہیں
اور غالب علم عملی حسابات میں ہمیشہ اسے استعمال کرے، مگر نظریہ دیکھ سکی
کی غرض سے ہم اس رقم مطلق کی قیمت لا، ب، ج، ف، گ، ہ کی
رقوم میں معلوم کرتے ہیں۔

$$گ لا + ف ما + ج = \frac{گ (ہن - ب گ)}{اب - ہا} + \frac{ف (گ ہ - لا ف)}{اب - ہا} + ج$$

جہاں لا، ما کی قیمتیں دفعہ ۹۵ سے لی گئی ہیں۔

$$= \frac{ف گ ہ - ب گ^۲ + لا ف گ - لا ف^۲ + ج - ج ہا}{اب - ہا}$$

$$= \frac{اب ج + ف گ ہ - لا ف گ - ب گ^۲ - ج ہا}{اب - ہا}$$

$$اب - ہا$$

ہو سکتی ہیں اگر مرکز کو مبدأ مانا جائے اور اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$1 \text{ لا}^2 + 2 \text{ ہ} \text{ لا} + \text{ب} \text{ ما}^2 = \text{ج}$$

جہاں ج = $\frac{1 \text{ ب ج} + 2 \text{ ف گ ہ} - 1 \text{ ف}^2 - \text{ب گ}^2 - \text{ج ہ}^2}{1 \text{ ب} - 2 \text{ ہ}}$ (دفعہ ۹۸)

(نوٹ) جب تک ج صفر کے مساوی نہ ہو اس کی حقیقی قیمت اس دفعہ کے استدلال میں کچھ فرق پیدا نہیں کرتی

اسلئے طرفین کو ج پر تقسیم کرنے سے اور $\frac{1}{ج} = 1$ ، $\frac{2 \text{ ہ}}{ج} = 2 \text{ ہ}$ ، $\frac{1 \text{ ب}}{ج} = 1 \text{ ب}$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے،

$$1 \text{ لا}^2 + 2 \text{ ہ} \text{ لا} + \text{ب} \text{ ما}^2 = 1 \dots\dots\dots (۳)$$

۱۰۰۔ محاورہ کو ایک مناسب زاویہ طہ میں پھرانے سے ہم مساوات

$$1 \text{ لا}^2 + 2 \text{ ہ} \text{ لا} + \text{ب} \text{ ما}^2 = 1$$

کو شکل $\text{لا}^2 + \text{ب} \text{ ما}^2 = 1$ میں لاسکتے ہیں۔

محاورہ کو زاویہ طہ میں پھرانے کے لئے ہمیں (حصہ اول) دفعہ ۳۳ کی رو سے لا کی بجائے لاجم طہ - ماجب طہ اور ما کی بجائے $\text{لاجب طہ} + \text{ماجم طہ}$ رکھنا چاہیئے، اس طرح نئی مساوات ہو جاتی ہے

$$1 \text{ لاجم طہ} - \text{ماجب طہ} + 2 \text{ ہ} \text{ لاجم طہ} - \text{ماجب طہ} + \text{لاجب طہ} + \text{ماجم طہ} = 1$$

$$+ \text{ب} \text{ لاجب طہ} + \text{ماجم طہ} = 1$$

یعنی $\text{لا}^2 + 2 \text{ ہ} \text{ لاجب طہ} + \text{ب} \text{ لاجب طہ} + \text{ماجم طہ} = 1$

$$2 - \text{لا} \{ 1 - \text{ب} \} \text{ لاجب طہ} - \text{ہ} \{ \text{جم طہ} - \text{ب} \text{ لاجب طہ} \} = 1$$

$$+ \text{ماجم طہ} - \text{لاجب طہ} - 2 \text{ ہ} \text{ لاجب طہ} + \text{ب} \text{ لاجب طہ} = 1$$

اب اس مساوات میں لا کا سر صفر ہوگا اگر

$$(1 - \text{ب}) \text{ لاجب طہ} = \text{ہ} \{ \text{جم طہ} - \text{ب} \text{ لاجب طہ} \}$$

$$\text{یعنی اگر } \frac{2 \text{ جب } 2 \text{ جم } 2}{2 \text{ جم } 2 - \text{جب } 2} = \frac{2 \text{ جب } 2}{2 \text{ جم } 2 - \text{جب } 2}$$

$$\therefore \text{بس } 2 \text{ جم } 2 = \frac{2 \text{ جب } 2}{2 \text{ جم } 2 - \text{جب } 2} \dots (۴)$$

اب ہم ایسا زاویہ معلوم کر سکتے ہیں جو ۱۸۰ سے کم ہو اور جس کا ماس کوئی حقیقی مقدار ہو، پس اس مساوات سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ محوروں کو کس زاویہ میں سے گھمایا جائے کہ نئی مساوات سے لاما والی رقم خارج ہو جائے۔

پس معلوم ہوا کہ درجہ دوم کی مساوات $لا + 2 \text{ جب } 2 \text{ جم } 2 + 2 \text{ جب } 2 = 1$ شکل $لا + 2 \text{ جب } 2 = 1$ میں تحویل ہو سکتی ہے جہاں

$$ع = لا + 2 \text{ جب } 2 + 2 \text{ جب } 2 \text{ جم } 2 + 2 \text{ جب } 2$$

$$ب = لا + 2 \text{ جب } 2 - 2 \text{ جب } 2 \text{ جم } 2 + 2 \text{ جب } 2$$

مشقیں

۹۔ مشق ۵ تا ۷ کی مساواتوں کو شکل $لا + 2 \text{ جب } 2 + 2 \text{ جب } 2 = 1$ میں لائیں۔
۱۰۔ اگر $لا + 2 \text{ جب } 2 = 1$ کے مساوی نہ ہو تو درجہ دوم کی عام مساوات ایک ناقص یا زائد کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۰۱۔ عملی صورتوں میں مساوات کی تحویل۔

اگرچہ حسب ذیل ۱۰۰ محوروں کو گھمانے سے ہم مقدار پر عمل اور یہ معلوم کر سکتے ہیں لیکن یہ عمل طولانی اور تکلیف دہ ہے، اس لئے عملیات میں ایک اور طریقہ اختیار کیا جاتا ہے جسے ہم ابھی بیان کرینگے، اس نئے طریقہ میں ہم یہ مان لیتے ہیں کہ وہ متعین جو مساوات سے تعبیر ہوتا ہے ایک مخروطی تراش ہے، اس لئے یہ اس امر کے ثبوت میں دقت کے ثبوت کا قائم مقام نہیں ہو سکتا کہ عام مساوات شکل $لا + 2 \text{ جب } 2 = 1$ میں لائی جاسکتی ہے۔
یہ طریقہ ذیل کے ابتدائی مسئلہ پر منحصر ہے۔

۱۰۲۔ ایک مرکز دار مخروطی تراش سے ایک ہم مرکز دائرہ چار نقطوں پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ان میں سے دو دو نقطے مرکز میں سے گزرنے والے ایسے دو خطوط پر واقع ہوتے ہیں جو مخروطی کے محوروں کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔

یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ دونوں مرکز دار تراشیں اپنے محوروں کے گرد متشاکل ہیں تاہم اس کا ایک باقاعدہ ثبوت حسب ذیل ہے۔

فرض کرو کہ مرکز دار تراش $\text{عہ لا}^2 + \text{ہ ما}^2 = ۱$ سے اور دائرہ مذکورہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲$ ہے۔ ان خطوط کی مساوات جو مرکز کو نقاط مشترک کے ساتھ ملاتے ہیں $\text{عہ لا}^2 + \text{ہ ما}^2 = \frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}{۲}$ ہے کیونکہ یہ مساوات مساوی ہے

گزرنے والے خطوط کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے اور نقاط تقاطع کے محدودوں کے لئے طریق مساوات ایک کے مساوی ہو جاتے ہیں۔

$$\text{ترتیب برلنے سے لا}^2 (\text{عہ} - \frac{۱}{۲}) = \text{ما}^2 (\frac{۱}{۲} - \text{ہ})$$

یعنی مساوات ایسے دو خطوں کو تعبیر کرتی ہے جو محوروں کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ ہر دو خطوط صرف اُس صورت میں ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں جب مخروطی کے نصف محور کے مساوی ہو اور یہ انطباق متناظر محور پر وقوع پذیر ہوگا۔

۱۰۳۔ جس مخروطی تراش کی مساوات $\text{لا}^2 + ۲\text{ہ ما}^2 = ۱$ ہے اس کے نصف محوروں کے طول اور ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

[اقتضاہ غور سے دیکھا جائے کہ مساوات کے بائیں طرف کارکن ۱ ہے]

ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اس مخروطی تراش $\text{لا}^2 + ۲\text{ہ ما}^2 = ۱$ اور دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲$ کے دو مشترک درجہ ہیں جو تراش کے محوروں کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں اور جب رکسی ایک محور کے طول کے مساوی ہو تو

یہ دونوں وتر اس محور پر منطبق ہوتے ہیں۔
لیکن ان دو خطوط کی مساوات جو نقاط تقاطع کو مرکز کے ساتھ ملاتے ہیں
پہلی مساوات کو دوسری مساوات کے ذریعہ متجانس بنانے سے حاصل ہوتی
ہے اور اسلئے یہ حسب ذیل ہے۔

$$1. لا^2 + 2. ھ^2 + لا. ھ = 2. ما^2 = \frac{لا^2 + 2. ھ^2}{2}$$

رقموں کو ایک طرف لانے اور ترتیب دینے سے

$$لا^2 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) ھ^2 + 2. ھ (لا + ما) = 0$$

یہ خط ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اگر دائیں طرف کا رکن مربع کامل ہو

$$\text{یعنی اگر } ھ^2 = \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (لا + ما)^2 \dots (5)$$

پس مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$ھ^2 = 1. ھ (لا + ما) - \frac{1}{2} (لا + ما)^2$$

$$یا \frac{1}{2} (لا + ما)^2 - 1. ھ (لا + ما) + ھ^2 = 0 \dots (5)$$

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے $\frac{1}{2} (لا + ما)$ کی دو قیمتیں ملینگی جو نصف
محوروں کے متکافینوں کے مربعوں کے مساوی ہونگی، فرض کرو کہ اس مساوات
کی اصلیں $\frac{1}{2} (لا + ما)$ اور $\frac{1}{2} (لا - ما)$ ہیں، پس $1. ھ$ اور $1. ھ$ نصف محور ہیں اور

$$\left(\frac{1}{2} - 1 \right) (لا + ما)^2 + 2. ھ (لا + ما) = 0$$

ایک محور کی مساوات کا مربع ہے اور

$$\left(\frac{1}{2} - 1 \right) (لا + ما)^2 + 2. ھ (لا + ما) = 0$$

دوسرے محور کی مساوات کا مربع ہے۔

پہلی مساوات $(1 - \frac{1}{r})$ کے ساتھ ضرب دینے سے ہو جاتی ہے

$$(1 - \frac{1}{r})^2 (لا + ۲ ہم) (1 - \frac{1}{r}) (لا + ۱) + (ب - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r}) = ۰$$

$$یا (1 - \frac{1}{r})^2 (لا + ۲ ہم) (1 - \frac{1}{r}) (لا + ۱) + (ب - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r}) = ۰$$

$$کیونکہ (1 - \frac{1}{r}) (ب - \frac{1}{r}) = ۰$$

اس لئے اس نصف محور کی مساوات جس کا طول ہے

$$(1 - \frac{1}{r}) (لا + ۱) = ۰ \dots \dots \dots (۶)$$

ہے اور دوسرے کی مساوات اسی طرح ہے

$$(1 - \frac{1}{r}) (لا + ۱) = ۰$$

اقتباسی طالب علم کو یاد رکھنا چاہئے کہ دفعہ بالا کے استدلال سے قبل جو مسئلہ ابتدائی دفعہ ۲ میں دیا گیا ہے وہ کل ثبوت کا ایک حصہ ہے اس لئے اس مسئلہ کے ثبات کرنے میں اس کا دیا جانا ضروری ہے، نیز یہ بھی نہایت ضروری ہے کہ مساوات کے بائیں جانب رقم مطلق ایک ہو اس لئے ہر مثال کو شروع کرنے سے پہلے تمام رمتوں کو ایک ایسی مقدار پر تقسیم کر لینا چاہئے جس سے رقم مطلق بائیں جانب ایک ہو جائے اگر ایسا نہ کیا جاسکے تو ہمیں سوال زیر بحث کے نصف محور نہیں حاصل ہونگے بلکہ ایک ایسے منحنی کے نصف محور حاصل ہونگے جو شکل میں اصلی منحنی کے مشابہ ہوگا لیکن ناپ میں مختلف ہوگا۔ تمام عمل کے آخر میں طالب علم کو نتیجہ کی جانچ کرنے کے لئے اس امر کی تصدیق کر لینا چاہئے کہ محاورہ محصلہ ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں یا نہیں۔

متبادل ثبوت نصف محوروں کے طول معلوم کرنے کے لئے

محاورہ کے طول ہم غیر متغیروں (حصہ اول دفعہ ۳) کو استعمال کرنے سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی تراش

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

کے نصف محور عم، بہ ہیں۔

ان محوروں کے لحاظ سے مساوات ہوگی

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

اسلئے قائم محوروں کی کسی تبدیلی کی بنا پر

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ ہو جاتا ہے } \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\text{اسلئے } 1 + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\text{اور } 1 + b = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$$

اب مساوات درجہ دوم کے نظریہ کی رو سے $\frac{1}{a}$ اور $\frac{1}{b}$ ذیل کی مساوات

$$\text{درجہ دوم کی اصلیں ہیں ت-۲ ت (} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{) ت-۲ ت } = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$$

پس $\frac{1}{a}$ اور $\frac{1}{b}$ مساوات

$$\text{ت-۲ ت (} 1 + b \text{) ت-۲ ت } = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0 \text{ کی اصلیں ہیں۔}$$

جہاں ت مجہول مقدار ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ مساوات وہی ہے جو مساوات

(۵) دفعہ ۱۰۲ ب

یاد رہے کہ اس طریقہ سے محوروں کے صرف طول ہی معلوم ہوتے ہیں مساواتیں

نہیں معلوم ہوتیں، لیکن یہ طریقہ مائل محوروں پر بھی اسی خوبی سے خاند ہوتا ہے

اور دراصل اگر حوالہ کے محوروں کا درمیان فی زاویہ سمہ ہو تو

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \text{ جب } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

معلوم کرو۔

چونکہ محوروں کے طول ۱ اور $\frac{1}{2}$ ہیں اس لئے مساوات مطلوبہ ہوگی

$$\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{\frac{1}{2}} = ۱ \quad یا \quad لا + ۲ما = ۱$$

جہاں ولا محور اعظم ہے اور و ما محور اصغر۔

مثال ۳۔ منحنی $لا + ۶ لا ما - ما = ۳$ کے نصف محوروں کے طول اور ان کی مساواتیں دریافت کرو۔

۳ پر تقسیم کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{لا}{۳} + \frac{۶ لا ما}{۳} - \frac{ما}{۳} = ۱$$

محوروں کے طولوں کے لئے مساوات ہے

$$\left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۶} \right) (لا) + \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} \right) (ما) = \left(\frac{۳}{۳} \right)$$

$$\therefore \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۶} \times لا = ۱ - ۱ = ۰$$

$$\therefore \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۶} = ۰ \quad یا \quad \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

چونکہ ایک نصف محور خیالی ہے اس لئے منحنی زائد ہے۔

$$\text{محور کی مساوات ہے } \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۶} \right) لا + ۰ = ۰$$

$$\text{اگر } \frac{۱}{۳} = ۰ \text{ تو حاصل ہوتا ہے } \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۶} \right) لا + \frac{۳}{۳} = ۰ \quad یا \quad لا - ۳ = ۰$$

$$\text{اگر } \frac{۱}{۳} = - \frac{۱}{۶} \text{ تو } \left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} \right) لا + \frac{۳}{۳} = ۰ \quad یا \quad لا + ۳ = ۰$$

حسب معمول ہم دیکھتے ہیں کہ محور علی القواکم ہیں۔

مثال ۴۔ مثال بالا کے منحنی کی مساوات بحفاظ اسکے نصف محوروں کے

معلوم کرو۔

چونکہ $\frac{۱}{۲}$ کی قیمتیں $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۱}{۲}$ ہیں اس لئے مساوات مطلوبہ ہے

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \quad 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

یعنی ۲ = ۱ - ۱ جہاں قاطع محور لا کا محور ہے۔

مثال ۵۔ اس کی تصدیق کرو کہ عام طریقہ سے جو محور حاصل ہوتے ہیں وہ علی التوالم ہیں۔

$$\text{محور میں } (1 - \frac{1}{2}) \text{ لا + ہ = ۰} \quad \text{اور } (1 - \frac{1}{2}) \text{ لا + ہ = ۰}$$

جہاں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ مجہولات میں مساوات ذیل کی اصلیں ہیں۔

$$1 - \frac{1}{2} = (1 + \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2}) = ۰$$

یہ دو خط ایک دوسرے پر عمود وار ہونگے اگر

$$(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{2}) = ۰$$

$$1 - \frac{1}{2} = (1 - \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{2}) = ۰$$

$$1 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = ۰ \quad \text{اب } 1 + \frac{1}{2} = ۰ \quad \text{اور } 1 - \frac{1}{2} = ۰ \quad \text{اب حسب مسائل مساوات درجہ}$$

$$1 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = ۰ \quad \text{اس لئے شرط مطلوبہ ہے} \quad 1 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = ۰ \quad \text{جو درست ہے۔}$$

پس خطوط علی التوالم ہیں جیسا کہ ہونا چاہئے۔

مشقیں

ذیل کی مخروطی تراشوں میں نصف محوروں کی مساواتیں اور ان کے طول معلوم کرو نیز نصف محوروں کے لحاظ سے ان کی مساواتیں حاصل کرو۔

$$11 - 3 \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا} + 3 \text{ ما}^2 = 1 \quad 12 - 2 \text{ لا}^2 + 3 \text{ لا} + 3 \text{ ما}^2 = 1$$

$$13 - 1 \text{ لا}^2 + 3 \text{ لا} + 3 \text{ ما}^2 = 1 \quad 14 - 11 \text{ لا}^2 - 2 \text{ لا} - 3 \text{ ما}^2 = 1$$

$$15 - \text{جلہ ۱ ب - ہ}^2 \text{ کی علامت جا پچھنے سے یہ معلوم کرو کہ اوپر کے معنی}$$

ناقص ہیں یا زائد۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ مخروطی

$$(م^۲ + عم) لا^۲ + م^۲ ن لا + (ن^۲ + عم) ما^۲ = ۱$$

کے نصف محور $\frac{1}{2}م^۲ + \frac{1}{2}ن^۲ + عم$ اور $\frac{1}{2}عم$ ہیں، نیز ان کی مساواتیں

$$ن لا - م ما = ۰، م لا + ن ما = ۰ \text{ ہیں۔}$$

۱۷۔ مخروطی $لا^۲ + م^۲ + عم$ لا + م + ب = ۱ کے محور مساواتوں

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) لا + م = ۰، \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) لا + م = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ذیل کی مساوات درجہ دوم کی اصلیں ہیں

$$م^۲ - م (لا + ب) + (لا + ب) - م = ۰$$

ان کی مشترکہ مساوات حاصل کرو یعنی $م (لا - م) - (لا - ب) لا = ۰$

اور دکھاؤ کہ یہ مساوات اس امر کو استعمال کرنے سے کہ محور متقاربوں کے درمیانی زاویہ کو تضعیف کرتے ہیں باسانی حاصل ہوتی ہے۔

۱۰۵۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{2}$ میں مساوات زیر بحث کی اصلیں حقیقی ہیں۔

$$\text{مساوات } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (لا + ب) + (لا + ب) - م = ۰$$

کی اصلیں حقیقی ہوں گی اگر $(لا + ب) - م$ $(لا + ب) - م$ ہو۔

[نیوٹن کے الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۵۹]

یعنی اگر $(لا - ب) + م^۲ + م$ ہو۔

چونکہ دائیں طرف کا جملہ دوم درجہ کا مجموعہ ہے اس لئے منفی نہیں ہو سکتا اس لئے نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح - اگر نصف محور مساوی ہوں تو $\text{ب} = \text{ا}$ ، $\text{ا} = \text{ب}$ ، $\text{ا} = \text{ب}$ ۔

کیونکہ جملہ $(\text{ا} - \text{ب})$ $\text{ا} + \text{ب}$ لازماً صفر ہے۔

اس صورت میں مساوات ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ جب ناقص کے محور مساوی ہوں تو وہ ایک دائرہ بن جاتا ہے اور ہم پہلے سے جانتے ہیں کہ دائرہ کی مساوات اسی شکل کی ہے جو اسجکے ضمناً حاصل ہوئی۔

طالب علم صرف ایک شرط کی توقع کرتا ہوگا کیونکہ مساوات کی اصولوں کے باہم مساوی ہونے کے لئے ایک شرط ضروری ہے، مگر اس صورت میں دو شرطیں ہیں کیونکہ جس جملہ کا صفر ہونا مقصود ہے وہ دو حقیقی مقادیر کے مربعوں کا مجموعہ ہے۔

۱۰۶ - مساوات $\text{ا} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ا} = \text{ا}$ ایک ناقص کو تعبیر کرتی

ہے اگر $\text{ا} + \text{ب} < \text{ا}$ اور زائد کو اگر $\text{ا} + \text{ب} > \text{ا}$

$\frac{1}{2}$ کے لئے مساوات درجہ دوم ہے

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\text{ا} + \text{ب}) + \text{ا} + \text{ب} - \text{ا} = 0$ ۔

اور ہم نے دیکھا ہے کہ اس کی اصلیں حقیقی ہیں۔ اگر ان کی علامات مختلف ہوں تو محزوطی زائد ہے اور اگر یہ علامات موافق ہوں تو محزوطی ناقص ہے

[دیکھو مساواتوں کی شکلیں صفحات ۵۵ اور ۱۳ میں]

لیکن اس کی علامتیں ایک ہی ہونگی اگر $\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}$ مثبت ہو اور مختلف ہونگی اگر یہ منفی ہو۔

اسلئے اگر $\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}$ مثبت ہو تو مساوات ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے

[یہ ناقص حقیقی ہوگا اگر دونوں اصلیں مثبت ہوں اور خیالی ہوگا اگر دونوں منفی ہوں] لیکن اگر $\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}$ منفی ہو تو مساوات ایک زائد کو تعبیر کرے گی۔

نتیجہ صریح - اگر $\text{ا} + \text{ب} = \text{ا}$ تو مساوات متوازی خطوط مستقیم کے ایک

جزء کے کو تعبیر کرتی ہے۔ کیونکہ اس صورت میں دائیں جانب کا رکن ایک مربع

کامل ہے فرض کرو $(\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}) = 1$ اسلئے $\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} = 1$ متوازی

خطوط کا ایک جزا ہے۔

لیکن اس کا خیال رہے کہ عام مساوات کی بحث میں ہم نے صورت
 ۱ ب = ہذا کو آئندہ کے لئے بالکل الگ چھوڑ دیا ہے۔

۱۰۔ یہ مان کر کہ درجہ دوم کی مساوات ایک زائد کو تعبیر کرتی ہے اسکے
 متقاربوں کی مساواتیں معلوم کر دو۔

ہم جانتے ہیں کہ متقاربوں کی مشترکہ مساوات منحنی کی مساوات سے
 صرف بلحاظ مستقل رقم کے مختلف ہوتی ہے (دفعہ ۸۶) اس سے ذیل کا کلیہ
 حاصل ہوتا ہے۔

کلیہ۔ متقاربوں کی مساوات حاصل کرنے کے لئے منحنی کی مساوات
 معلومہ میں رقم مطلق کی بجائے ایک نامعلوم مقدار لے رکھو اور پھر لہ کی ایسی
 قیمت معلوم کر دو کہ نئی مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے۔

مثال۔ مخروطی $(۲-۳)۳ + (۳-۲)۲ = ۰$ کے
 متقاربوں کی مساواتیں معلوم کر دو۔

ہمیں لہ کی ایسی قیمت معلوم کرنا ہے کہ

$$(۲-۳)۳ + (۳-۲)۲ = لہ = ۰$$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے، اسکے لئے شرط ہے

$$۳-۲ + ۳-۲ = ۳-۳ = ۰ \quad [\text{حصہ اول، دفعہ ۳۲}]$$

یعنی لہ = ۱، پس متقارب ہیں

$$(۲-۳)۳ + (۳-۲)۲ = ۱ + ۳ = ۰$$

$$۰ = (۱-۳) (۱-۲)$$

الگ الگ ان کی مساواتیں ہیں

$$۱-۳ = ۰ \quad \text{اور} \quad ۱-۲ = ۰$$

مشقیں

منحنيات ذیل کے متقاربوں کی مساواتیں معلوم کر دو

$$۱۸ - (۲+۲)۲ - (۲+۲)۳ = ۰$$

$$۱۹ - ۳ لا + ۱۴ لا + ۷ ما + ۱۱ لا + ۹ ما + ۷ = ۰$$

$$۲۰ - ۳ لا + لا - ۷ ما + ۲ = ۰$$

۱۰۸۔ جن دو مخروطی تراشوں کی مساواتیں بجا نامستقل رقم کے ایک دوسرے سے مختلف ہوں ان کے متقارب وہی ہوتے ہیں۔

مقارَبوں کی مساوات حاصل کرنے میں ہم مساوات کے تمام سرسوائے مستقل رقم کے استعمال کرتے ہیں اسلئے مساوات محصلہ صرف پانچ سرسوائے موقوف ہوتی ہے اور رقم مطلق اس میں شامل نہیں ہوتی ہے۔

۱۰۹۔ ناقص کے مقارَب

ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی خواہ ناقص ہو یا زائد ہم اس کے مقارَبوں کی مساوات معلوم کر سکتے ہیں، ان دو صورتوں میں فرق صرف یہ ہے کہ زائد کے مقارَبوں کی مساوات ہمیشہ دو حقیقی اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتی ہے لیکن ناقص کے مقارَبوں کی مساوات کے اجزائے ضربی خیالی ہوتے ہیں پس معلوم ہوا کہ ناقص کے مقارَب خیالی ہوتے ہیں۔

۱۱۰۔ درجہ دوم کی عام مساوات سے جو مخروطی تبیین ہوتی ہے اس کے مقارَبوں کی مساوات معلوم کر۔

قاعدہ مندرجہ بالا کے مطابق ہمیں رقم مطلق کی بجائے ایک اور مقدار نکال کر اس کی وہ قیمت معلوم کرنا ہے کہ نیا جملہ دو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی ہو۔ فرض کرو کہ ہم ج کی بجائے ج + ج رکھتے ہیں جہاں ج کی قیمت مطلوب ہے۔

$$اب چونکہ ۱ لا + ۲ ہ لا + ۷ ما + ۱۱ لا + ۹ ما + ۷ ج + ج = ۰$$

دو خطوط کو تبیین کرتی ہے اسلئے

$$۱ اب (ج + ج) + ۲ ف گ ہ - ۷ ف - ۷ ب گ - (ج + ج) = ۰$$

$$اسلئے ج = - \frac{۱ اب ج + ۲ ف گ ہ - ۷ ف - ۷ ب گ}{۲ ج + ج}$$

$$۱ اب - ۷ ہ$$

اس لئے متقاربوں کی مساوات ہے

[illegible]

اواب - هر ۲

نتیجہ ضرب ۱۔ ج = ۰ اگر ا ب ج = ۲ ا ب گ = ۵ ا ب گ = ۲ ج = ۱۔

یعنی اگر اصلی مساوات دو خطہ طے مستقیم کو تقسیم کرے تو

۵۸ = ۱۰۰ و ۱۰۰ = ۱۰۰

یہی اثر مساوات ایک مکانی کو تشبیہ کرے اور اس صورت میں ہم نے دیکھا ہے کہ محدود فاصلہ پر متقارب نہیں ہوتے (صفحہ ۴۹)

نتیجہ صریح ۲۔ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ کے متقارب خطوط مستقیم $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ کے متوازی ہیں۔

کیونکہ متقاربوں کی مساوات

۱ لا ۲ ھ لا ما + ب ما ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج + ج = ۰ سہ اور
خطوط کا یہ جوڑا خطوط ۱ لا ۲ ھ لا ما + ب ما ۲ = ۰ کے متوازی ہے

[حصہ اول دفعہ سوم]

پس اگر ہم منحنی کے مرکز میں سے خطوط ۱ (۲+۲) ۲ (۱+۱) ۳ (۱+۱) ۴ (۱+۱) ۵ (۱+۱) ۶ (۱+۱) ۷ (۱+۱) ۸ (۱+۱) ۹ (۱+۱) ۱۰ (۱+۱) کے متوازی خط کھینچیں تو یہ منحنی کے متقارب ہو گئے۔

نتیجہ صریح ۳۔ مساوات ایک ناقص یا زائد کو تبصیر کرتی ہے اگر بالترتیب

کیونکہ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ کے اجزائے ضربی خیالی ہونگے یا حقیقی اگر بالترتیب $1 < 2 < 3 < \dots < n$

یعنی متقارب خیالی ہونگے یا حقیقی اگر بالترتیب $\langle \lambda \rangle$ یا $\langle \mu \rangle$ (مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۷ کے ساتھ)

۱۱۱۔ قطع نائد کے قائم ہونے کی شرط۔

اس صورت میں متقارب علی القوائم ہیں، اسلئے خطیہ

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

علیٰ اقوام ہیں، اس لئے شرط مطلوبہ ہے $1 + م = 0$ [حصہ اول دفعہ ۲۹]
پس درجہ دوم کی عام مساوات ایک قائم زاؤ کو تعبیر کرے گی اگر لا اور ما
کے سر تقاضا مساوی لیکن علامت میں مختلف ہوں۔
۱۱۲۔ فقط دیکھنے سے متقارب معلوم کرنا۔

بعض اوقات ہم محض دیکھنے سے معلوم کر سکتے ہیں کہ ایک محزوظی کے
مقارب کیا ہیں، مثلاً اگر مساوات مفروضہ ہو $(لا + ۳م) (لا + ۲م + ۱) = ۴$ تو
مقارب صریحاً $لا + ۳م = ۰$ اور $لا + ۲م + ۱ = ۰$ ہونگے کیونکہ انکی
مشترک مساوات اور معنی کی مساوات میں فرق صرف مستقل رقم کا ہے۔
نیز جب مساوات میں لا اور ما کی رفیں موجود نہ ہوں تو بھی یہ طریقہ
استعمال ہونگے گا، مثلاً

$لا + ۲م - ۱ = ۰$
کے مقارب معلوم کرنے کے لئے ہم اس مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں
 $(لا - ۱) (لا + ۲م + ۱) = ۱$
اور مقارب صریحاً $لا - ۱ = ۰$ اور $لا + ۲م + ۱ = ۰$ ہیں۔

مشقیں

محض دیکھنے سے معینات ذیل کے مقارب معلوم کرو

- ۲۱۔ $لا (لا + ۱) = ۱$ ۲۲۔ $م (لا - ۱) = ۱$
۲۳۔ $لا + ۲م + ۱ = ۰$ ۲۴۔ $لا + لا + م + ۱ = ۰$
۲۵۔ $لا + ۲م - ۱ = ۰$ ۲۶۔ $لا (لا + ۱) = ۱$
۲۷۔ $(لا - ۱) (لا + ۲م + ۱) = ۱$ ۲۸۔ $لا + م + ۱ = ۰$
۲۹۔ مثلاً ۲۱ کے نتائج سے ان معینات کے مرکز حاصل کرو۔

پیشہ ششم پر متفرق مشقیں

۲۹۔ جس محزوظی تلامش کی مساوات

$$۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} - ۲۵ - ۲۲ \text{ لا} + ۱۸ - ۷ = ۰$$

سے اس کے مرکز کے محدود معلوم کرو۔

$$۳۰ - \text{ایک مخروطی کی مساوات } ۲۵ \text{ لا} - ۳۶ \text{ لا} + ۳۱ \text{ لا} + ۲۰ \text{ لا} - ۲۸ - ۳۷ = ۰$$

کو مرکز میں سے گزرنیوالے متوازی محوروں کے لحاظ سے تبدیل کرو۔

$$۳۱ - \text{ایک مخروطی کی مساوات } ۵۷ \text{ لا} - ۱۵۰ \text{ لا} - ۲۳۱ = ۰$$

اس کے متوازی محوروں کے متحمل کرو۔

$$۳۲ - \text{منحنی } ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۱$$

کے اُن قطروں کی مساوات معلوم کرو جو اس منحنی اور ہم مرکز دائرہ

$$۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۲$$

کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔

$$۳۳ - \text{ثابت کرو کہ } ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۰$$

کے متقارب مساوات

$$۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں لا لا مرکز کے محدود ہیں۔

$$۳۴ - \text{اگر قائم محوروں کے دو مختلف نظاموں کے لحاظ سے مساواتیں}$$

$$۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۱ \text{ اور } ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۱$$

مخروطی کو تنسیر کریں تو ثابت کرو کہ

$$۱ + ۲ = ۱ + ۲ \text{ اور } ۱ + ۲ = ۱ + ۲$$

اُن زائدوں کی مساواتیں حاصل کرو جو نقطہ (۲، ۱) میں سے گزریں اور

جن کے متقارب بالترتیب ذیل کے خطوط ہوں۔

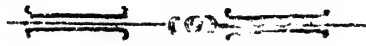
$$۳۵ - ۳ - لا - ۱ + ۱ = ۰$$

$$۳۶ - لا - ۱ = ۰$$

$$۳۷ - لا + ۱ = ۰$$

$$۳۸ - \text{ایک زائد کے متقارب } ۲ \text{ لا} - ۵ \text{ لا} - ۳۱ = ۰$$

ہیں، اس کے محوروں کی مساواتیں دریافت کرو۔
 ۳۔ اس زائد کے محوروں کی مشترک مساوات معلوم کرو جس کے
 متقاربوں کی مساوات $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۰$ ہے۔
 ۴۔ اس زائد کی مساوات معلوم کرو جو مبداء میں سے گزرے اور
 جس کے متقارب وہی ہوں جو منحنی $۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} - ۴ \text{ لا} = ۰$ کے ہیں۔



باب ہفتم

ناقصوں کا مرسم کرنا

۱۱۳۔ اب ہم ناقصوں کے مرسم کرنیکی چند توضیحی مثالیں حل کریں گے جبکہ ان کی مساواتیں عام شکل میں دی گئی ہوں۔

یہ نہایت ہی سادہ شکل کا منحنی ہے اس لحاظ سے اس کے محل کا آسانی سے حل مل سکتا ہے اگر اس کے نصف محور مقدار اور سمت میں معلوم ہوں اس لئے سب سے پہلے ہم اس کے نصف محور معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں اور اسکے بعد تصدیق کی خاطر منحنی پر چند اور نقطے حاصل کر کے مرسم کی صحت کی جانچ کر سکیں گے اس کے متعلق تمام ضروری عمل پچھلے باب میں بیان ہو چکے ہیں یعنی

(۱) سب سے پہلے ہم منحنی کا مرکز اور اسکی مسادات معلوم کرتے ہیں جبکہ مرکز مبداء ہو۔

(۲) اسکے بعد ہم نصف محوروں کے طول اور انکی مسادات میں معلوم کرتے ہیں۔

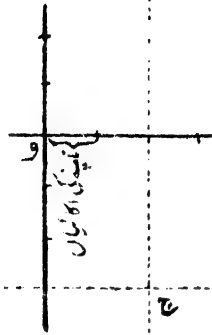
۱۱۴۔ مثال ۱۔ ذیل کے منحنی کو مرسم کرو۔

$$۳۶ لا + ۲۴ لا + ۱۶ لا - ۲۹ لا + ۱۲ لا + ۸۱ = ۰$$

[نوٹ ذیل کے حل کو بطور نمونہ کے نہ خیال کیا جائے کیونکہ مربع خطوط و دھڑانی کے اندر عمل کے جو حصے ہیں وہ ثبوت کی صحت جانچنے کے لئے مختص اشارے ہیں جنہیں کم از کم ذہن میں ملحوظ رکھنا چاہیے]

(۱) یہاں $ا ب = ۲۹ - ۱۲ = ۱۷$ ایک مثبت مقدار

[$ا ب - ۱۷$ کی حقیقی قیمت معلوم کرنا ضروری نہیں]



شکل ۳۱

اس لئے منحنی قطع ناقص ہے [دفعہ ۱۰۶]

(ب) جن مساداتوں سے مرکز کے

محد معلوم ہوتے ہیں وہ یہ ہیں

$$۳۶ لا + ۱۲ ما - ۳۶ = ۰$$

$$۱۲ لا + ۲۹ ما + ۶۳ = ۰$$

$$۳ - ۲ = ما$$

[لا، ما کی قیمتیں حاصل کرنے کے بعد

انہیں مساداتوں میں مندرج کرنے سے

اپنے حل کی تصدیق کر لو]

(ج) درجہ اول کی رقموں میں مرکز کے نصف محدود درج کرنے

سے مسادات بلحاظ مرکز کے حاصل ہوتی ہے (دفعہ ۹)

$$۳۶ لا + ۲۲ ما - ۲۹ ما - ۴۲ (۱) + ۱۲۶ (-\frac{۳}{۴}) + ۸۱ = ۰$$

$$۳۶ لا + ۲۲ ما - ۲۹ ما - ۱۸۰ = ۰$$

$$یا \frac{۱}{۱۵} لا + \frac{۲}{۱۵} ما - \frac{۲۹}{۱۸۰} ما = ۱ [دیکھو انتباہ دفعہ ۱۰۳]$$

(د) نصف محور مسادات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں

$$(دفعہ ۱۰۳) \quad \left(\frac{۱}{۱۵} - \frac{۱}{۱۵}\right) = \left(\frac{۱}{۱۵} - \frac{۱}{۱۵}\right)$$

$$یا \left(\frac{۱}{۱۵}\right) = \left(\frac{۱}{۱۵} - \frac{۲۹}{۱۸۰}\right) \left(\frac{۱}{۱۵} - \frac{۱}{۱۵}\right)$$

$$یا \frac{۱}{۱۵} = \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۵} \times \frac{۳۳}{۱۸۰} - \frac{۱}{۱۵}$$

$$جس سے ۲ = ۲ یا ۹ اور ۲ = ۲ یا ۳$$

اس لئے منحنی کی مسادات جبکہ اس کے اصلی محور حوالہ کے محور ہوں یہ ہوگی

$$۱ = \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۵}$$

(ع) محور اعظم یا اصغر کی مسادات یہ ہے

$$\left(\frac{۱}{۱۵} - \frac{۱}{۱۵}\right) لا + ۳ ما = ۰$$

$$جب ۲ = ۹ (محور اعظم) تو یہ مسادات ہوگی \left(\frac{۱}{۱۵} - \frac{۱}{۱۵}\right) لا + \frac{۱}{۱۵} ما = ۰$$

$$یعنی ۲ لا + ۳ ما = ۰$$

جب $m = ۳$ (محور اصغر تو مساوات ہوگی $(\frac{1}{۳} - \frac{1}{۵})$ لا $+\frac{1}{۵} = ۰$ ۔
یعنی $۳ - لا = ۳ = ۰$ ۔

[اس مقام پر دیکھ لینا چاہئے کہ دونوں محور باہم علی القوائم ہیں یا نہیں
(حصہ اول دفعہ ۱۹)]

[اب محور کھینچنے کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے، محور اعظم حاصل کر نیچے لئے
موجودہ صورت میں رکھو لا = ۳ (کیونکہ ما کا سر ۳ ہے) جس سے لا = ۳۔
اس نقطہ ن کا بلحا خانے محوروں کے غل میں نشان دو اور اس کو مرکز ج
سے لانے والا خط ج ن کھینچو، محور اصغر کے لئے رکھو لا = ۳ (کیونکہ
ما کا سر ۳ ہے) جس سے لا = ۳، اس نقطہ (ق) کا تعین کرو اور حسب
سابقہ خط ج ق کھینچو]

(ف) خطوط $m = لا + ۳ = ۰$ اور $m = لا - ۳ = ۰$ پر بالترتیب
دونوں طرف طول ۳ اور ۲ کا ٹکڑا اس طرح ہیں محور اعظم اور اصغر کے
سرے حاصل ہوتے ہیں اور منحنی کھینچا جاسکتا ہے۔

[لیکن اس سے قبل کہ ہم منحنی کھینچیں یہ بہتر ہوگا کہ اُن نقاط کو معلوم کر کے
جہاں منحنی ابتدائی محوروں کو کاٹتا ہے (بشرطیکہ یہ کاٹتا ہو) ہم اپنے
کام کی جانچ کر لیں، لیکن اگر یہ نہ کاٹتا ہو تو ہمیں کوئی اور نقطہ معلوم
کرنے چاہئیں جہاں یہ کسی اور مزدوں خطوط کو قطع کرتا ہو اس کے متعلق
ہم کچھ اور ذکر (گ) کے ماتحت کریں گے]

(گ) منحنی ابتدائی محور ما (یعنی لا = ۰) کو کاٹتا ہے جہاں

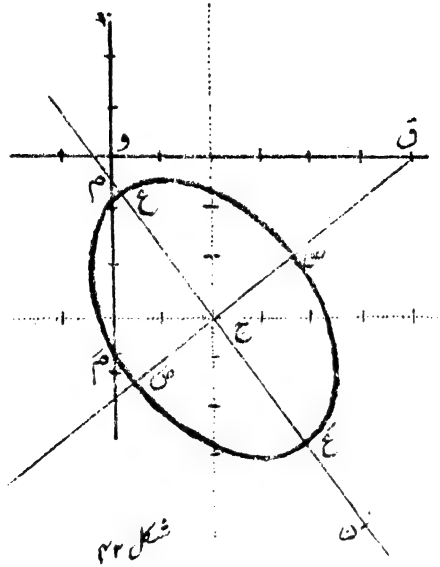
$$۰ = ۸۱ + ۲۶ - ۲۹$$

$$یا \quad ۰ = \frac{۸۱ \times ۲۹ - ۲۶ \pm ۶۳}{۲۹} = \frac{۲۰ \pm ۶۳}{۲۹} \quad \text{تقریباً}$$

دیکھو کہ اس جگہ تقریبی قیمت لینے سے غل میں کس قدر اختصار ہوتا ہے [

$$۰ = ۸۱ - ۲۶ = ۵۵ \quad \text{تقریباً، غل میں یہ نقطہ}$$

م اور م ہیں، اسی طرح منحنی ابتدائی محور لا سے ملتا ہے جہاں



۳۶ لا - ۲ لا + ۸۱ = ۰ جس سے خیالی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی منحنی محور لا کو نہیں کاٹتا۔
 [اگر ناقص محوروں کے طولوں کی مدد سے بتایا گیا ہو تو ان قیمتوں سے اس کی ترسیم کی تصدیق ہو سکتی ہے لیکن بہتر یہ ہے کہ منحنی کھینچنے سے پہلے محوروں پر ان نقطوں کے نشان دیدئے جائیں جہاں منحنی محوروں کو کاٹتا ہے اور پھر اس مرکز کی جانچ کی جائے کہ محوروں کے طول ان مقامات کے منافی تو نہیں ہیں]

مثال ۲۔ منحنی $۱۱ لا + ۴ لا + ۴ ما + ۱۴ ما - ۲۶ لا - ۲۲ ما + ۲۳ = ۰$ کو مرکز کرو
 [ذیل کامل بطور نمونہ کے خیال کیا جاسکتا ہے لیکن مثال اول کی سب ترکیبیں اس میں اختیار کی جانی چاہئیں]

(۱) یہاں $ج - ب = ۱۵۴ = ۲ - ۱۵۰$

اس لئے منحنی ایک ناقص ہے

(ب) مساواتیں جن سے مرکز حاصل ہوتا ہے یہ ہیں

$۱۱ لا + ۲ ما - ۱۳ = ۰$ اور $۲ لا + ۱۴ ما - ۱۶ = ۰$

جس سے $لا = ۱$ ، $ما = ۱$

(ج) مساوات بلحاظ مرکز کے ہے

$$۱۱ \quad لا^۲ + ما^۲ = ۱۲ + ما^۲ - ۲۱ - ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ = ۱۲$$

$$۱۱ \quad لا^۲ + ما^۲ = ۱۲ + ما^۲ = ۶ \quad یا \quad لا^۲ + ما^۲ = ۶ \quad لا = ۲ + ۲۴ = ۱۲$$

(د) نصف محور ایں مساوات سے حاصل ہوتے ہیں

$$۱۱ \quad لا = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right)$$

$$۱۱ \quad لا = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right)$$

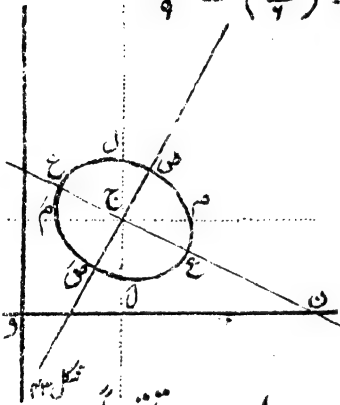
$$۱۱ \quad لا = \frac{۲۵}{۴} + \frac{۲۵}{۴} \times \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۲۵}{۴}$$

$$۱۱ \quad لا = \frac{۲۵}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$$

[یعنی کی مساوات بلحاظ اصلی محوروں کے ہے

$$۱ = \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲}$$

$$[۱ = \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲}]$$



$$\therefore R = \sqrt{۱.۵۶} \quad یا \quad R = \sqrt{۱.۵۶} \quad یعنی \quad R = ۱.۲۵ \quad یا \quad R = ۱.۲۵ \quad تقریباً$$

(ع) محور اعظم یا اصغر کی مساوات ہے

$$۱۱ \quad لا = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right)$$

جب $R = \frac{۲۵}{۴}$ (محور اعظم) تو یہ ہوتی ہے

$$۱۱ \quad لا = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right)$$

جب $R = \frac{۲۵}{۴}$ (محور اصغر) تو یہ ہوتی ہے

$$۱۱ \quad لا = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right)$$

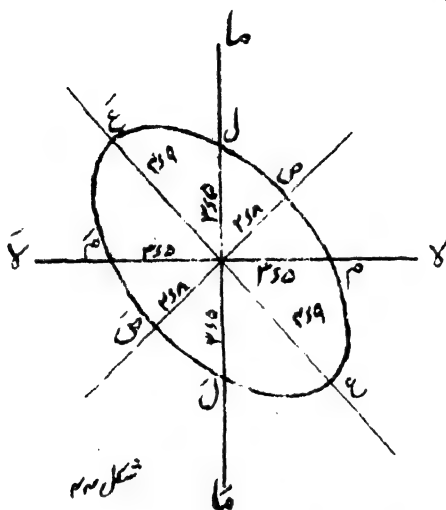
اور یہ دونوں محور علی التوائم ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے۔

(ف) ان دو خطوط کو شکل (۴۳) میں ترسیم کرنے اور ان پر ہر دو جانب

نصف محوروں کے مساوی طول کاٹنے سے ہیں نقاط 'ع'، 'غ'، 'ص'، 'ض'

حاصل ہوتے ہیں دیکھو شکل۔

نیز دیکھو کہ خطوط $\lambda = \mu$ اور $\mu = \pm \mu$ منحنی کو مس کرتے ہیں



منفی ۱ = کو کاٹتا ہے جہاں لا = ۱۲ یا لا = ۳۶۲ ± = ۵ ± تقریباً
 اور اسی طرح لا = کو کاٹتا ہے جہاں ما = ۵ ± = ۳ تقریباً
 یہ نقطے م م ل ل شکل میں دکھائے گئے ہیں۔
 پس ناقص کی شکل ہے جیسے اوپر دکھائی گئی ہے۔

باب ہفتم پر متفرق مشقیں

ذیل کے منحیات کو مرسم کرو

- [illegible]

۸۔ اوپر کی مشقوں ۱، ۳، ۵ میں جو منحنی دئے گئے ہیں ان کے محوروں کی مساواتیں بلحاظ ابتدائی محوروں کے معلوم کرو۔

۹۔ منحنی $لا + لا + لا = ۱$ کو کھینچو اور اس کا مقابلہ مشق ۷ کے منحنی کے ساتھ کرو اس طرح انتباہات دفعہ ۱۰۳ کی ضرورت کی توثیق کرو۔



باب ہشتم

زائدوں کا مرسم کرنا

۱۱۵۔ اب ہم باب ششم کے قاعدوں کو زائدوں کے مرسم کرنے میں استعمال کرینگے جبکہ ان کی مساواتیں دی ہوئی ہوں، چونکہ منحنی دونوں جانب لا انتہا فاصلے تک پھیلتا ہے، اس لئے اس کا مرسم کرنا ناقص کی نسبت ذرا مشکل ہے لیکن تاہم بہت سادہ دو صورتوں میں ایک ہی ہے۔ زائد کی صورت میں ہر ایک نصف محور کا طول اور سمت معلوم کرینگے علاوہ یہ نہایت ضروری ہے کہ اس کے متقارب بھی معلوم کئے جائیں اور مرسم کئے جائیں ورنہ یہ یقینی طور پر معلوم نہیں ہو سکتا کہ لا انتہا فاصلے پر دونوں شاخوں کی انتہائی سمتیں کیا ہیں۔

طریقہ عمل حسب ذیل ہے

۱۔ منحنی کا مرکز اور منحنی کی مساوات معلوم کر دو جبکہ مرکز مبداء ہو۔

۲۔ محوروں کے طول اور ان کی مساواتیں معلوم کر دو۔

۳۔ متقارب معلوم کر دو اور انہیں مرسم کر دو۔

امور بالا کے علاوہ مناسب ہے کہ تصدیق کی خاطر منحنی پر اور نقطے معلوم کیے جائیں جن نقطوں پر ابتدائی محور منحنی کو کاٹتے ہیں ان کو معلوم اور مرسم کرنا کافی ہوگا لیکن اگر یہ محور منحنی کو حقیقی نقطوں پر کاٹتے ہوں تو ایسے اور خطا آسانی معلوم ہو سکتے ہیں جو اسے حقیقی نقطوں پر کاٹتے ہوں۔

مثال ۱۔ جس منحنی کی مساوات

$$y^2 = 10x - x^2$$

ہے اسے تقسیم کرو۔

(جنوٹ مثال (۱) صفحہ ۳۹ پر درج کیا گیا ہے اس کا اطلاق مثال ہذا پر بھی ہوتا ہے)

(۱) یہاں $ل$ ب $-$ $ھ$ $=$ $۱ - ۵ =$ ایک منفی مقدار

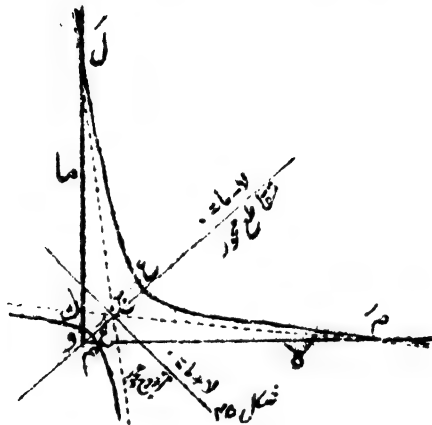
پس منفی قلع زائد ہے (دفعہ ۱۰۶)

(ب) مساواتیں جن سے مرکز کے محدو حاصل ہوتے ہیں یہ ہیں

$$۰ = ۶ - ۱۰ + ۵ \quad \text{اور} \quad ۰ = ۶ - ۱۰ + ۵$$

جن سے $۱ = ۱$ اور $۱ = ۱$

[ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے اپنے عمل کی تصدیق کرو]



درج اول کی رقموں میں مرکز کے نصف محدو درج کرنے سے ہیں بلحاظ مرکز کے مساوات ذیل حاصل ہوتی ہے

$$۰ = ۶ - ۱۰ + ۵ - \frac{۱}{۴} \times ۱۲ - \frac{۱}{۴} \times ۱۲$$

$$۶ = ۱۰ - ۱ + ۱$$

یعنی $\frac{۱}{۴} - ۱ + ۱ = ۱$ (دفعہ ۱۰۳ کی ابتداء ملاحظہ ہو)

(۲) نصف محور این مساواتوں سے حاصل ہوئے ہیں

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)$$

$$\text{یعنی } \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$$

$$\text{لہذا } \frac{1}{4} = \frac{7}{32}$$

(قطع زائد میں ر کی ایک قیمت منفی ہوتی ہے)

اس لئے ظاہر ہے کہ کبھی قطع زائد ہے جس کا متقاطع نصف محور ۱ ہے اور مزدوج نصف محور ۱ ہے۔

(پس جب منفی کے اصلی محوروں کو متحدہ دوں کے محور مانا جائے تو منفی کی مساوات یہ ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

(ع) متقاطع اور مزدوج محوروں کی مساواتیں اس مساوات سے حاصل ہوتی ہے

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

جب $\frac{1}{4} = 1$ (متقاطع محور) تو مساوات بالا حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$\left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

جب $\frac{1}{4} = 1$ (مزدوج محور) تو مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(اس نتیجہ کے صحیح ہونے کی تصدیق اس امر سے ہوتی ہے کہ یہ خط صریحاً ایک

دوسرے پر عمود ہیں)

مرکز ج میں سے یہ محور کھینچو اور متقاطع محور $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 1$ پر اس کے

سروں $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ کے نشان اسطرح لگاؤ کہ ج ج اور ج ج میں سے ہر ایک ایک

سادہ ہو۔

(قطع زائد کی صورت میں مزدوج نصف محور کا جو طول ہے اسکے جواب میں

نقطوں کے نشان لگانے کی ضرورت نہیں کیونکہ ان سے منفی برد کا کوئی نقطہ

مائل نہیں ہوگا۔ یہ کمی منفی مذکور کے متقارب کھینچنے سے بخوبی پوری ہو سکتی ہے

جیسا ذیل میں بتایا گیا ہے)

(ف) مرکز کو مبدأ مان کر متقاربوں کی مساوات یہ ہے
 $لا + ۱۰ لا + ۱۰ لا + ۱۰ لا = ۰$ (دیکھو دفعہ ۱۱۰ نتیجہ صیغہ ۲)

یعنی $لا = ۰$ (۶۷۲ ± ۵) لا

یا تقریباً $لا = ۰$ اور $لا = ۰$ اور $لا = ۰$ دو متقارب ہیں۔

اب ہم متقاربوں کو مرتسم کر سکتے ہیں اور متقاطع محور کے مقام سے معلوم ہو جاتا ہے کہ منحنی متقاربوں کے درمیان کے زاویہ منفرجہ میں واقع ہوتا ہے (اس منسل پر اپنے عمل کی تصدیق یہ دیکھنے سے کرو کہ منحنی کے محور متقاربوں

کے درمیانی زاویہ کی تعریف کرتے معلوم ہوتے ہیں یہ بہت ضروری ہے)

(گ) جہاں خط دلا منحنی سے ملتا ہے وہاں $لا = ۰$ یا $لا = ۰$

(ان نتائج سے نقاط م اور م حاصل ہوتے ہیں) اور جہاں و ما منحنی سے ملتا ہے وہاں

$لا = ۰$ یا $لا = ۰$ (ان سے ل اور ل حاصل ہوتے ہیں) ان نقطوں کو مرتسم

کرینے کے بعد منحنی کی شکل کے متعلق خاصہ اندازہ ہو سکتا ہے۔

[طالب علم کو چاہئے کہ ایسی صورتوں میں متقاربوں کے مرتسم کرنے میں بڑی

احتیاط سے کام لے ورنہ مرکز سے دور کے حصوں میں منحنی کے مرتسم کرنے میں

اسے بڑی دقت پیش آئیگی]

مثال ۲۔ جس منحنی کی مساوات

$$۳ لا + ۲ لا + ۱ لا = ۰$$

ہے اسے مرتسم کرو۔

(۱) چونکہ (۱ ب - ۱) = - ۱ یعنی منفی ہے اس لئے منحنی قطع زائد

ہوگا۔

(ب) منحنی کا مرکز مبدأ پر منطبق ہوتا ہے کیونکہ مساوات میں درجہ اول کی

کوئی رقم نہیں ہے۔ اس لئے ہم فوراً محاور کے طول معلوم کرنے کی طرف

متوجہ ہوتے ہیں۔

(ج) ۱ پر تقسیم کرنے سے مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$۳ لا + ۲ لا + ۱ لا = ۰$$

نصف محوروں کے لئے مساوات ہے

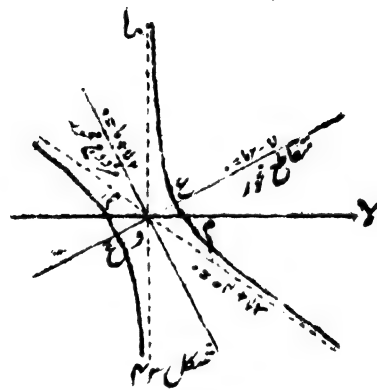
$$\frac{x^2}{a^2} = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

جو قیمتیں مندرجہ کرنے سے حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$\left(\frac{1}{a^2}\right) = \left(\frac{1}{a^2} - 0\right) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$0 = \frac{1}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

جس سے $2 = 6$ یا 3



پس منحنی قطع زاہد ہے جس کا نصف متقاطع محور ہے:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$$

$$2525 = 96 = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$$

[اس لئے اصلی محوروں کے لحاظ سے منحنی کی مساوات یہ ہو جاتی ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(2) چونکہ محور کی مساوات

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = 0 \quad \text{ہے اس لئے}$$

$$2 = \frac{y^2}{b^2} \quad \text{سے متقاطع محور کی مساوات}$$

یعنی $2 = 6$ حاصل ہوئی ہے۔

۵ = ۶ سے مزدوج محور کی مسادات $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$ لا + $\frac{1}{4} = ۰$
یعنی ۲ لا + ۱ = ۰ حاصل ہوتی ہے۔
تصدیق کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دو علی القوائم خطوط کی
مسادات ہیں۔

ان خطوں کو مرتبہ کرو جیسا کہ شکل بالائیں کیا گیا ہے اور خط لا - ۲ = ۱ = ۰ پر
و ع = و ح = ۱۲۲ تقریباً قطع کرو۔

(ع) متقارب ۳ لا + ۲ لا = ۰ ہیں

یعنی لا = ۰ اور ۳ لا + ۲ لا = ۰

ان خطوں کو یکجہ (۱) بات قابل غور ہے کہ منحنی کے محور متقاربوں کے
درمیان زاویوں کی تصنیف کرتے معلوم ہوتے ہیں اور درحقیقت ہونا بھی یہی چاہئے
(گ) ۱ = ۰ منحنی سے ملتا ہے جہاں

۳ لا = ۶ یا لا = ۲۷ ± ان سے نقاط م اور م حاصل ہوتے ہیں۔
لا = ۰ سے عجیب و غریب نتیجہ ۰ = ۶ حاصل ہوتا ہے لیکن مسادات کو

۱ = ۰ = $\frac{۳-۶}{۲}$ = $\frac{۶}{۲}$ - $\frac{۳}{۲}$ کی شکل میں لکھنے سے ہم

دیکھتے ہیں کہ لا = ۰ سے ۱ = ۰ حاصل ہوتا ہے یعنی منحنی محور ۱ سے

لا متساوی فاصلہ پر ملتا ہے اس سے اس بات کی تصدیق ہوتی ہے کہ لا = ۰

ایک متقارب ہے اور یہ امر ہم پہلے بھی معلوم کر چکے ہیں۔

باب ششم پر متفرق مشقیں

ذیل کے زائدوں کو مرتبہ کرو

$$۱- ۷ لا - ۶ لا + ۱۰ لا - ۱۲ لا + ۱۶ لا - ۱۸ لا + ۲۰ لا = ۰$$

$$۲- ۲ لا + ۸ لا + ۱۲ لا - ۲۰ لا - ۲۲ لا - ۲۴ لا = ۰$$

$$۳- ۶ لا - ۱۰ لا - ۱۲ لا + ۱۴ لا + ۱۸ لا + ۲۰ لا - ۲۲ لا - ۲۴ لا = ۰$$

$$۴- ۳ لا - ۸ لا - ۱۲ لا - ۱۴ لا - ۱۶ لا + ۲۲ لا + ۲۴ لا = ۰$$

$$\begin{aligned}
 5 - 3\lambda - 2\lambda' + \lambda'' - \lambda''' &= 5 - 6\lambda - 4\lambda' + 2\lambda'' - \lambda''' \\
 6 - 4\lambda - 3\lambda' + 2\lambda'' - \lambda''' &= 10 - 6\lambda - 4\lambda' + 2\lambda'' - \lambda''' \\
 7 - 5\lambda - 4\lambda' + 3\lambda'' - \lambda''' &= 15 - 6\lambda - 4\lambda' + 2\lambda'' - \lambda''' \\
 8 - 6\lambda - 5\lambda' + 4\lambda'' - \lambda''' &= 20 - 6\lambda - 4\lambda' + 2\lambda'' - \lambda''' \\
 9 - 7\lambda - 6\lambda' + 5\lambda'' - \lambda''' &= 25 - 6\lambda - 4\lambda' + 2\lambda'' - \lambda'''
 \end{aligned}$$



باب

عام مساوات کی تحویل جبکہ اب = ۵۰

۱۱۶۔ عام مساوات جبکہ $\Delta b = \Delta a$ ۔ باب ششم میں ہم نے عام مساوات کی ایک خاص صورت کو مشتق کر دیا تھا، اس جگہ ہم اس نغنی پر بحث کریں گے جو اس خاص صورت سے تعبیر ہوتا ہے۔ ہم وہاں دیکھ چکے ہیں کہ جب $\Delta b = \Delta a$ تو ہم کسی نئے نقطہ کو مبداء ماننے سے درجہ اول کی رقم کو خارج نہیں کر سکتے، اس لئے جس طریقہ کا ہم نے اوپر ذکر کیا ہے اس کا اطلاق اس صورت پر نہیں ہوتا۔

جب $\Delta b = 0$ تو دوسرے درجہ کی رقمیں

والأول هو لا ما + دب ما

مربع کامل بناتی ہیں، فرض کرو کہ یہ مربع

(عہ لا + بہ ما) ہے۔

تیب = عہد، عہد = عہد بہ اور لب = بہ

اور مساوات حسب ذیل ہو جاتی ہے

(عہ لا + بہ ما) + ۲ گ لا + ۲ ف با + ج = .

قبل ازیں ہم دفعہ ۵۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ اس قسم کی مساوات قطع مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۱۔ اگر عام مساوات قطع مکانی کو تعبیر کرے تو (۱) مکانی کے محور اور رأس پر کے محاس کی مساواتیں معلوم کروائیں (ب) اس کے وتر

تب (۴-لا-۳+ما+لہ) = ۰۰۰۰

ایسا کرنے سے مساوات (۱) کے دائیں طرف

مقدار ۸ لہ-لا-۶ لہ+ما+لہ کا اضافہ ہو جاتا ہے اس لیے ہمیں مساوات کے بائیں طرف بھی یہی مقدار جمع کرنی چاہیے تاکہ مساوات قائم رہے اس طرح ہمیں لہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$(۴-لا-۳+ما+لہ) = ۰ \quad لا \quad (۴+۳۲+۸ لہ) + ما (۴۲-۶ لہ)$$

$$+ لہ - ۴۹$$

اب لہ کی وہ قیمت معلوم کرو جس سے خطوط ۴-لا-۳+ما+لہ = ۰ اور لا (۴+۳۲+۸ لہ) + ما (۴۲-۶ لہ) + لہ - ۴۹ = ۰؛ عمود وار ہو جائے اس لئے لازماً

$$۴ (۴+۳۲+۸ لہ) - ۳ (۴۲-۶ لہ) = ۰ \quad یا \quad ۵۰+۵۰ لہ = ۰ \quad (دیکھو حصہ اول)$$

دفعہ ۱۹) لہ = ۱

پس مساوات زیر بحث ذیل کی شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے

$$(۴-لا-۳+ما-۱) = ۰ \quad ۳۶+لا+۴۸-ما-۴۸ = ۱۲ \quad (۳+لا+۴-ما) \dots (ب)$$

خطوط ۴-لا-۳+ما-۱ = ۰ اور ۳+لا+۴-ما-۴۸ = ۰ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں، پس مساوات (ب) اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ اگر منحنی پر کے کسی نقطہ سے خط ۴-لا-۳+ما-۱ = ۰ پر عمود کھینچا جائے تو اس عمود کا مربع اس عمود کے طول کے متناسب ہوتا ہے جو نقطہ مذکورہ سے خط ۳+لا+۴-ما-۴۸ = ۰ پر (جو اول الذکر خط پر عمود وار ہے) کھینچا جائے۔ پس (دفعہ ۳۱) ۴-لا-۳+ما-۱ = ۰ منحنی کا محور ہے اور ۳+لا+۴-ما-۴۸ = ۰ اس پر کا مناس ہے۔

انتباہ۔ بالعموم طاب علم کے لئے یہ تمیز کرنا مشکل ہوتا ہے کہ ان دونوں مساواتوں میں سے کونسی مساوات محور کو تعبیر کرتی ہے اور کونسی اس پر کے مناس کو۔ یہ وقت مساوات زیر بحث کا مساوات ما = ۰ لہ کے ساتھ مقابلہ کرنے سے رفع ہو سکتی ہے جس میں صریحاً ما = (یعنی لا کا محور)

منحنی کا محور ہوتا ہے، پس مربع والی رقم منحنی کے محور کو تعبیر کرتی ہے۔
(ب) $۲ - لا - ۳ - ما - ۱ = ۰$ پر کے عمود کا مربع

$$(۲ - لا - ۳ - ما - ۱)^۲$$

۲۵

ہے اور $۳ - لا + ۲ - ما - ۲ = ۰$ پر کے عمود کا طول

$$\frac{۳ - لا + ۲ - ما - ۲}{۵} \text{ ہے۔}$$

پس وتر خاص ۲ یا ۴ مساوات

$$(ج) \dots \dots \dots \frac{۳ - لا + ۲ - ما - ۲}{۵} \times ۲ = \frac{(۲ - لا - ۳ - ما - ۱)^۲}{۲۵}$$

سے حاصل ہوتا ہے، لیکن چونکہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہے اس لئے

$$(ب) \dots \dots \dots (۲ - لا - ۳ - ما - ۱)^۲ = ۱۲ (۳ - لا + ۲ - ما - ۲)$$

(ج) اور (ب) سے بہ عمل تقسیم

$$\frac{۱۲}{۲۵} = \frac{۱}{۵} \times ۲$$

$$\frac{۱۲}{۲۵} = \text{وتر خاص}$$

چونکہ $(۲ - لا - ۳ - ما - ۱)$ مثبت ہے اس لئے منحنی پر کے سب نقطوں کے
مقدار $۳ - لا + ۲ - ما - ۲$ مثبت ہوگی، پس منحنی پر کے سب
 $۳ - لا + ۲ - ما - ۲ = ۰$ کے اس طرف واقع ہے جس طرف کے سب نقطوں
کے لئے مقدار $۳ - لا + ۲ - ما - ۲$ مثبت ہوتی ہے۔

لیکن مبداء $۳ - لا + ۲ - ما - ۲ = ۰$ کے اس طرف واقع ہے جس طرف کے لئے

مقدار $۳ - لا + ۲ - ما - ۲$ منحنی ہے (دیکھو حصہ اول دفعہ ۱۳)

پس مبداء اور منحنی خط $۳ - لا + ۲ - ما - ۲ = ۰$ کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں،

یہ آخری نتیجہ بہت مفید ثابت ہوگا جب ہم قطع مکانی کو مرسم کریں گے۔

انتباہ۔ اگر منحنی کی مساوات (ب)

اس شکل (۲ لا - ۳ ما - ۱) = ۱۲ (۳ لا + ۲ ما - ۴) میں نکلتی تو منحنی پر کے سب نقطوں کے لئے مقدار ۱۲ (۳ لا + ۲ ما - ۴) لازماً مثبت ہوتی یعنی مقدار ۲ لا + ۴ ما - ۴ منفی ہوتی اس صورت میں منحنی اور بیض دونوں خط ۳ لا + ۲ ما - ۴ = ۰ کے ایک ہی طرف واقع ہوتے۔

اس امر کے متعلق مزید مثالیں باب آئندہ میں دی جائیں گی۔
اس مندرجہ طالب علم کو باب ہذا کے اختتام کی پہلی سات مثالیں حل کرنی چاہئیں۔
۱۱۸۔ عام صورت۔ عام مساوات کو اس شکل

$$(عہ لا + ب ما) = ۲ (-گ لا - ۲ ف ما - ج$$

میں لکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر منحنی کے کسی نقطہ سے خط عہ لا + ب ما = ۰ پر عمود کھینچا جائے تو اس عمود کا مربع اس عمود کے طول کے متناسب ہوتا ہے جو نقطہ مذکورہ سے خط ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ پر کھینچا جائے (دیکھو دفات ۵۱، ۵۲)

اگر یہ دونوں خط ایک دوسرے پر عمود دار ہوتے تو یہ مطلوبہ خطوں کو تعبیر کرتے، لیکن بالعموم یہ علی القواگم نہیں ہوتے، اس لئے ہم مساوات ذیل کو اس شکل میں لکھتے ہیں

$$(عہ لا + ب ما + لہ) = ۲ (-گ لا - ۲ ف ما - ج)$$

$$+ (۲ عہ لہ لا + ۲ ب لہ ما + لہ)$$

$$= ۲ (-لا گ - عہ لہ) - ۲ ما (ف - ب لہ) - ج + لہ$$

اور دیکھتے ہیں کہ خواہ لہ کی قیمت کچھ ہی ہو عہ لا + ب ما + لہ = ۰ پر کے عمود

کا مربع ۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ف - ب لہ) + ج - لہ = ۰ پر کے عمود کے متناسب ہوتا ہے۔ اس لئے اب ہم لہ کی وہ قیمت معلوم کرتے ہیں جس سے یہ خط ایک دوسرے پر عمود دار ہو جائیں اس کے لئے یہ شرط پوری ہونی چاہئے

$$\frac{عہ گ + ب ف}{عہ + ب} = ۰$$

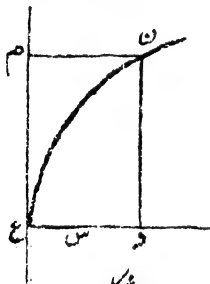
جب لہ کی قیمت یہ ہو تو عہ لا + بہ ما + لہ =۔ پر کے عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے

$$۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ن - بہ لہ) + ج - لہ =۔$$

پر کے عمود کا طول =

اور یہ دو خط ایک دوسرے پر عمود وار ہیں، اس لئے مساوات زیر بحث قطع مکانی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور پہلے خط سے تعبیر ہوتا ہے اور اس پر کا ماس دوسرے خط سے =

انتباہ = جب طالب علم مذکورہ بالا طریقہ کا اطلاق کسی خاص مثال پر کرنے لگے تو اس کو چاہئے کہ محض ضابطے استعمال کرنے کی بجائے عام سلک استدلال سے کام لے۔



شکل ۲۴

۱۹۔ مذکورہ بالا منحنی کا وتر خاص معلوم کرنا۔

منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس

میں سے گزرنے والے ماس پر عمود

ن م کھینچا گیا ہے، نیز ن میں سے

محور پر عمود ن د نکالا گیا ہے تو

ہم جانتے ہیں کہ

$$ن د = ل ۲ \times ن م \text{ جہاں } ل ۲ \text{ وتر خاص کو تعبیر کرتا ہے}$$

اوپر کی مساواتوں کو استعمال کرنے سے

$$ن د = \frac{عہ لا + بہ ما + لہ}{ما عہ لہ + بہ ۲}$$

$$ن م = \frac{۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ن - بہ لہ) + ج - لہ}{۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ن - بہ لہ)}$$

$$\text{اور لہ} = \frac{عہ گ + بہ ن}{عہ لہ + بہ ۲}$$

$$\therefore \frac{(عہ لا + بہ ما + لہ) ۲}{عہ + بہ} = ۲ \quad \frac{۲(لا گ - عہ لہ) + ۲(ما ف - بہ لہ) + ج - لہ}{۲(ما گ - عہ لہ) + (ف - بہ لہ)}$$

لیکن چونکہ لا، ما مخفی پر ہے، اسلئے

$$(عہ لا + بہ ما + لہ) ۲ = ۲(لا گ - عہ لہ) + ۲(ما ف - بہ لہ) + ج + لہ$$

لہذا تقسیم کرنے سے

$$۲ = \frac{۲(لا گ - عہ لہ) + (ف - بہ لہ) ۲}{عہ + بہ}$$

$$\text{جہاں لہ} = \frac{\text{عہ گ} + بہ ف}{عہ + بہ}$$

(علامت کی تشخیص ضروری نہیں کیونکہ ہمیں محض وتر خاص کے طول سے سروکار ہے۔)

$$\begin{aligned} \text{اب (گ - عہ لہ) ۲} &+ (ف - بہ لہ) ۲ \\ &= \text{گ} ۲ + ف ۲ - لہ (عہ گ + بہ ف) + لہ (عہ + بہ) ۲ \\ &- (عہ گ + بہ ف) \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{گ} ۲ + ف ۲ - (عہ + بہ) لہ (عہ گ + بہ ف)}{عہ + بہ}$$

$$\begin{aligned} &[\text{کیونکہ لہ (عہ + بہ) - (عہ گ + بہ ف) =}] \\ &= \frac{\text{عہ ف} - بہ گ ۲}{عہ + بہ} \\ \therefore ۲ &= \frac{۲(عہ ف - بہ گ)}{(عہ + بہ) ۲} \end{aligned}$$

$$۲ (عہ - بہ گ) = \frac{(عہ + بہ) ۲}{۳}$$

لیکن عہ = ۱۸ اور بہ = ۱۲

$$۲ (۱۸ - ۱۲ گ) = \frac{(۱۸ + ۱۲) ۲}{۳}$$

ایک حد تک پورے عمل کا اعادہ کرنے کے لئے اوپر ہم نے ضرورت سے زیادہ وضاحت سے کام لیا ہے، ورنہ یہ از خود عیاں ہے کہ جو تفاعل پہلے لکھے گئے ہیں ان کے شمار کنندے مساوی ہیں لہذا ان کو لکھنے کے بغیر ہی کاٹ دیا جاسکتا ہے۔

۱۲۰۔ مستثنیٰ صورت

قطع مکانی کی عام مساوات پر بحث کرتے وقت ہم نے دیکھا کہ منحنی پر کے کسی نقطہ کے لئے

$$(عہ لا + بہ ما + لہ) = ۲ (لا گ - عہ لہ) - ۲ (ا ف - بہ لہ) - ج + لہ$$

اور دو خطوط مستقیم

عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ اور ۲ لا گ - عہ لہ + ۲ ا ف - بہ لہ + ج - لہ = ۰
ایک دوسرے سے زادیہ قائمہ بناتے ہیں اگر

$$لہ = \frac{عہ گ + بہ ف}{عہ + بہ}$$

$$اب اگر \frac{گ}{عہ} = \frac{ف}{بہ} \text{ تو ان میں سے ہر ایک } = \frac{عہ گ + بہ ف}{عہ + بہ} = لہ$$

۱۲۱۔ عہ لہ = ۰ اور ف - بہ لہ = ۰

اس لئے بائیں طرف کا رکن مستقل ہو جاتا ہے اور ثبوت کا باقی حصہ درست نہیں رہتا۔ اس لئے اس صورت میں

$$(عہ لا + بہ ما + لہ) = لہ - ج$$

$$یا عہ لا + بہ ما + لہ = لہ \pm ما - ج$$

جس سے صریحاً دو متوازی خط تعبیر ہوتے ہیں۔

پس مساوات $لا + ۲ھ لا + ما + ب + ۲گ لا + ۲ف + ما + ج =$

سے دو متوازی خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں اگر

(ب = ھ اور گ بہ = ف عہ

یعنی اگر (ب = ھ اور گ ما + ب = ف ما +

یعنی اگر (ب = ھ اور ف + ب = گ

یہ صورت محض دیکھنے سے ہی پہچانی جاسکتی ہے کیونکہ

$$ف = عہ \quad اس لئے ظاہر ہے کہ عہ لا + بہ ما + گ لا + ف ما کو محض$$

کسی عددی جز و ضربی سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے اور مساوات کی شکل یہ ہوتی ہے

$$(عہ لا + بہ ما) + ف (عہ لا + بہ ما) + ج =$$

اوپر کی مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے عہ لا + بہ ما کی دو قیمتیں ملتی ہیں

جن سے دو متوازی خطوط مستقیم حاصل ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر علاوہ ان میں $لہ = ج$ تو دونوں خطوط مستقیم ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔

مثال۔ معلوم کرو کہ مساوات

$$۹ لا + ۲ ما + ۱۶ ما - ۹ لا - ۱۲ ما + ۲ = ۰$$

سے کیا تعبیر ہوتا ہے۔

یہ مساوات یوں بھی لکھی جاسکتی ہے۔

$$(۳ لا + ۱۴ ما) - ۹ لا - ۱۲ ما + ۲ = ۰$$

اور اسلئے باب ہذا کے مضمون کے تحت میں آتی ہے۔

چونکہ $9 لا + ۱۲ ما = ۳ (۳ لا + ۴ ما)$
 اس لئے اس مساوات کو اور بھی مختصر کیا جاسکتا ہے اور یہ ہو جاتی ہے
 $(۳ لا + ۴ ما) - ۳ (۳ لا + ۴ ما) = ۲ = ۰$
 یا $(۳ لا + ۴ ما - ۳ لا - ۱۲ ما) = ۰$
 پس مساوات بالا سے دو متوازی خطوط مستقیم تعمیر ہوتے ہیں
 $۳ لا + ۴ ما - ۲ = ۰$ اور $۳ لا + ۴ ما - ۱ = ۰$

اگر ہم ایسے عمل کرتے جیسے قطع مکانی کی صورت میں کرتے ہیں تو بھی بالآخر
 اسی نتیجہ پر پہنچتے لیکن ربط مذکور کو مشاہدہ کر لینے سے ہمارے عمل میں بہت
 اختصار ہو جاتا ہے۔

باب نہم پر متفرق مثالیں

ذیل کے مکافیوں میں سے ہر ایک افکار اور رائے پر کام اس معلوم کرو

$$۱- ما = ۳ لا + ۲ \quad ۲- ما = لا + ۱$$

$$۳- لا = ۱ + ما + ۱ \quad ۴- (لا + ما) = ۳ (لا - ما + ۱)$$

$$۵- (لا + ما) - ۵ = ۴ + ما + ۵$$

$$۶- ۹ لا + ۲ ما - ۱۶ ما - ۹۸ لا + ۱۱ ما - ۹۴ = ۰$$

۷- اوپر کے مکافیوں کے دیگر خاص بھی معلوم کرو
 ذیل کی مساواتوں سے جو نسخی تعمیر ہوتے ہیں ان پر بحث کرو۔

$$۸- لا + ۲ لا + ما = ۴$$

$$۹- لا - ۲ لا + ما + ۷ لا - ۷ ما + ۶ = ۰$$

$$۱۰- (۲ لا + ۱ ما) + (۲ لا + ۱ ما) + ۲ = ۰ \quad \text{جہاں } \frac{۲}{۱} = \frac{۲}{۱}$$

$$۱۱- ۲ لا + ۲ لا + ما + ۲ لا + ۲ ما + ۱ = ۰$$

۱۲- ثابت کرو کہ مساوات (۷ لا + ۲ ما) + (۲ لا + ۲ ما) + ج = ۰
 دو متوازی خطوط مستقیم کو تعمیر کرتی ہے اگر عہد ف - بہ گ = ۰

اس امر کی تصدیق کرو کہ اس صورت میں شرط

۱۳ ج + ۲ ف گ = ۰ - ۱ ف - ۲ گ - ج = ۰ پوری ہوتی ہے۔

نوٹ - اشلہ آما کے نتائج باب دہم کی مشقوں کے حل کرنے میں کارآمد ہوتے

باب دہم

مکافیوں کی ترسیم

۱۲۱۔ اب ہم باب گذشتہ کے طریقوں کو مکافیوں کے ترسیم کرنے میں استعمال کریں گے جبکہ ان کی مساواتیں معلوم ہوں۔ اگر عام مساوات
 $۱۰ + ۲ = ۲ + ۱۰$ یا $۲ + ۱۰ = ۱۰ + ۲$ گ $۲ + ۱۰$ ف $۲ + ۱۰$ ج = -

قطع مکانی کو تعبیر کرے تو $۱۰ + ۲ = ۲ + ۱۰$ اس امر کا اطمینان کر لینے کے بعد ہم باب گذشتہ کے طریقوں کی مدد سے
 اس پر کام لیں، محور اور وتر خاص معلوم کر لیتے ہیں، اس کے بعد منحنی کی ترسیم میں کوئی دقت
 باقی نہیں رہتی لیکن تصدیق کے طور پر ہمیں ہمیشہ منحنی پر کے چند نقطے معلوم
 کر لینے چاہئیں مثلاً وہ نقطے جہاں مکانی حوالہ کے محوروں کو قطع کرتا ہے۔
 اگر یہ نقطے خیالی ہوں تو یا سانی کوئی اور خط معلوم ہو سکتا ہے جس کے
 مکانی مذکور حقیقی نقطوں پر ملتا ہو۔

مثال ۱۔ جس منحنی کی مساوات حسب ذیل ہے اسے ترسیم کرو

$$۱۰ + ۲ = ۲ + ۱۰ \text{ یا } ۲ + ۱۰ = ۱۰ + ۲$$

دراں یہاں $۱۰ + ۲ = ۲ + ۱۰$ لہذا منحنی مکانی ہے۔

(ب) اگر منحنی پر کے کسی نقطے سے ایک سرعہ دو خط $۱۰ + ۲ = ۲ + ۱۰$ پر کھینچا جائے اور
 دوسرا عمود خط $۲ + ۱۰ = ۱۰ + ۲$ پر کھینچا جائے تو پہلے عمود کا مرتبہ ایسے بدلتا ہے
 جیسے دوسرے عمود کا طول کیونکہ

$$(۱۰ + ۲) = ۲ + ۱۰$$

یہ دو خط ایک دوسرے پر عمود دار نہیں ہیں، لیکن مساوات حسب ذیل شکل میں بھی

لکھی جاسکتی ہے

$$(لا + ما + لہ) = (لا + ۲ + لہ) + (ما + ۲ + لہ) - ۲ + لہ$$

اور خط لا + ما + لہ = ۰ اور لا (۲ + لہ) + (ما + ۲ + لہ) - ۲ + لہ = ۰ ایک دوسرے پر عمود وار ہوں گے اگر

$$۲ + لہ + ۲ + لہ = ۲ + لہ$$

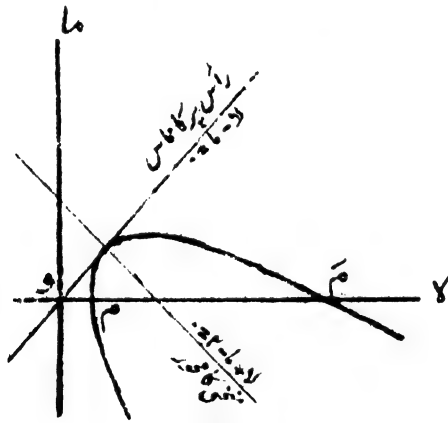
یعنی اگر لہ = ۲

(ج) پس (لا + ما - ۲) = ۲ (لا - ما) (۱)

اور خط لا + ما - ۲ = ۰ اور لا - ما = ۰ ایک دوسرے پر عمود وار ہیں

ما = ۲ اور لا کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

لا + ما - ۲ = ۰ محور ہے اور لا - ما = ۰ رأس پر کا محاس ہے۔



شکل ۴

(د) دیر خاص م و سادات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

(لا + ما - ۲ = ۰ پر کا عمود) = ۲ اور (لا - ما = ۰ پر کا عمود)

$$یا \quad م = \left(\frac{۲ - ما + لا}{۲ + ۱} \right) \quad م = \frac{ما - لا}{۲ + ۱}$$

۲ = م اور ۲ = م کیونکہ (لا + ما - ۲) = ۲ (لا - ما)

(ع) مساوات (۱) کے دائیں جانب کا رکن مربع ہونے کی وجہ سے مثبت ہے پس منحنی بالتمام ماس لا۔ ما۔ کے آس طرف واقع ہے جس طرف لا۔ ما۔ مثبت ہے یعنی جس طرف کہ لا۔ ما۔ اور صر بجایہ ماس کے نیچے کی جانب ہے۔
(ف) یہ منحنی لا۔ سے جن نقطوں پر ملتا ہے ان کے لئے مساوات

$$۰ = ۲ + ما + ۰$$

پوری ہوتی ہے، جس سے ظاہر ہے کہ ما خیالی ہے، پس منحنی ما کے محور سے نہیں ملتا۔

یہ ما۔ سے ملتا ہے جہاں

$$لا۔ ۶ + لا + ۰ = ۰ \text{ یا } لا = ۰ \pm ۳ = ۵, ۲, ۵, ۶ \text{ تقریباً}$$

شکل میں ان طولوں کے جواب میں نقاط صم، صم حاصل ہوتے ہیں۔
انتباہ۔ نظری طور پر جب ہمیں وتر خاص کا طول معلوم ہو جائے اور محور اور اس پر کے ماس کی مساواتیں بھی حاصل ہو جائیں تو ہمارے پاس منحنی مرتسم کرنے کے لئے کافی مواد موجود ہو جاتا ہے، لیکن عملی طور پر یہ زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ وتر خاص کے طول سے قطع نظر کر کے منحنی پر چند اور رموزوں نقاط معلوم کر لئے جائیں جیسا کہ اوپر (ف) میں کیا گیا ہے۔

یہ امر کہ منحنی اپنے محور کے لحاظ سے متشاکل ہے بہت ضروری اور مفید ہے لیکن منحنی کے ناپ کا اچھا اندازہ لگانے کے لئے ترسیم بنانے سے پہلے اس پر بہت سے نقطوں کے نشان لگائے چاہئیں۔

مثال ۲۔ منحنی لا۔ ۲ لا + ما + لا۔ ۲ لا۔ ۲ + ما + ۰ = ۰ کو مرتسم کرو

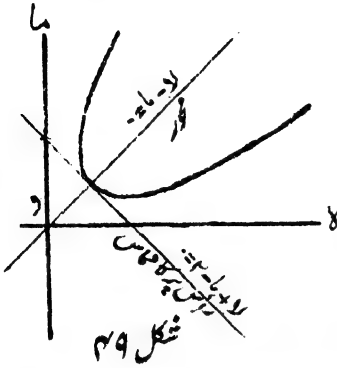
(۱) یہاں اب۔ صم = ۱ × ۱ = ۱ (۱) = ۰ پس منحنی قطع مکانی ہے۔

مساوات بالا حسب ذیل شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے

$$(لا۔ ما) ۲ = ۲ (لا + ما - ۲)$$

جس سے ظاہر ہے کہ لا۔ ما = ۰ پر کے عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے

$$لا + ما + ۲ = ۰ \text{ پر کا عمود}$$



یہ خط پہلے ہی ایک دوسرے پر عمود وار ہیں اس لئے ہم فوراً یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ منحنی کا محور لا-ما = ہے اور اس پر کا محاس لا+ما-۲ = ہے۔

(ج) مزید برآں منحنی موخر الذکر خط کے اُس طرف واقع ہے جس طرف کے لئے

لا+ما-۲ مثبت ہے اور مبداء اُس طرف واقع ہے جس طرف کے لئے لا+ما-۲ منفی ہے۔ بالفاظ دیگر مبداء اور منحنی خط لا+ما-۲ کی مقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

(د) وتر خاص ۴ کا طول معلوم کرنے کے لئے مساوات ذیل ہے
(لا-ما = ۰ پر کا عمود) = ۴ لا (لا+ما-۲ = ۰ پر کا عمود)

$$\text{یعنی } \left(\frac{\text{لا}-\text{ما}}{\sqrt{2}} \right)^2 = ۴ \text{ لا } \frac{\text{لا}+\text{ما}-۲}{\sqrt{2}}$$

لیکن منحنی کی مساوات کی رو سے (لا-ما) = ۲ (لا+ما-۲) اس لئے ۴ = لا اور یہ وتر خاص کا طول ہے

(ع) یہ بھی آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ حوالہ کے محور منحنی سے خیالی نقطوں پر ملتے ہیں۔

پس ہمیں منحنی پر کے وہ نقطے معلوم کرنے چاہئیں جہاں کوئی اور معزوں خط منحنی سے حقیقی نقاط پر ملتے ہوں۔ چونکہ رأس نقطہ (۱، ۱) پر ہے (جو خط لا-ما = ۰ اور لا+ما-۲ = ۰ کا نقطہ تقاطع ہے)

اس لئے ظاہر ہے کہ جب لا < ۱ تو حقیقی ہوگا۔ پس ہم منحنی پر جتنے نقطے چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً لا = ۱، ما = ۱ یا ۳

اسی طرح لا = ۲ سے ما = ۳ ± وغیرہ وغیرہ اور منحنی کو مرسم کرنے سے قبل ہمیں شکل میں ان نقطوں کا مقام معلوم کر لینا چاہئے۔

باب دہم پر متفرق مثالیں

۱۔ باب نہم کی تمام مشقوں کے مکانی مرتبہ کر دو
ذیل کے سب مکانیوں کو مرتبہ کر دو اور ان کے محور، ماس پر کے ماس اور وتر کا
معلوم کرو

$$۲۔ ۴ لا - ۴ لا + ۴ لا + ۴ لا + ۲ لا - ۶۲۶ + ۹ = ۰$$

$$۳۔ لا + لا + ۶ لا + ۴ لا + ۴ لا + ۱۵ لا - ۵۶ + ۱۲۵ = ۰$$

$$۴۔ ۴ لا + لا + ۱۲ لا + ۴ لا - ۶۹ + ۲ لا + ۱۰ لا + ۲۱ = ۰$$

$$۵۔ ۲۵ لا - ۴ لا + ۴ لا + ۱۶ لا + ۵۲ لا - ۱۴ + ۱۶ = ۰$$

$$۶۔ (۴ لا + ۶۹) + ۲۳ لا + ۱۱ لا + ۱۲ = ۰$$



باب یازدہم

مخروطی تراشوں کا ان کی مساواتوں سے مرسم کرنا

۱۲۲۔ اس باب میں ہم ان اصولوں کی مدد سے جو باب ششم اور باب ہفتم میں بیان ہو چکے ہیں درجہ دوم کے مخنیات کو مرسم کرنے کے متعلق چند استغراقی مثالیں حل کرینگے۔

اگرچہ ہر ایک مخنی جس کی مساوات دی ہوئی ہو ہمیشہ مرسم ہو سکتا ہے کیونکہ اس پر جتنے نقطے ہم چاہیں معلوم کر سکتے ہیں لیکن محض اسی بنا پر عمل کرنا نہایت مشکل اور وقت طلب ہوتا ہے مثلاً ظاہر ہے کہ اگر قطع زائد کو ہم صحیح طور پر مرسم کرنا چاہیں تو اس کے لئے ہمیں بہت سے نقطے مرسم کرنے کی ضرورت ہوگی پس عملی طور پر مخنی کی شکل اور ناپ کا ہیئت مجموعی اندازہ لگانے کے لئے ابواب گذشتہ کے اصولوں کا استعمال کرنا زیادہ مناسب ہوتا ہے۔

۱۲۳۔ شروع میں ہم چند عام اشارات درج کرینگے جن کو ابواب ششم و ہفتم کا خلاصہ تصور کیا جاسکتا ہے اور بعد میں ہم کسی حد تک ابواب ہفتم و ہشتم و دہم کا بھی اعادہ کرینگے۔

فرض کرو کہ مساوات حسب معمول

$$لا + ۲ = لا + ما + ب + ۲ + گ + لا + ۲ + ف + ما + ج = ۰$$

ہے تب مخنی کو مرسم کرنے کے لئے ذیل کا طریقہ اختیار کیا جاسکتا ہے

(۱) اب۔ حصہ کی قیمت سے مخنی کی نوعیت معلوم کرو، ہم جانتے ہیں کہ اب۔ حصہ کی قیمت ناقص کے لئے مثبت، مکانی کے لئے صفر اور

زائد کے لئے منفی ہوتی ہے۔

(۲) اگر α = ہا تو محور α اس پر کا ماس اور وتر خاص حسب باب نہم معلوم کرنے چاہئیں۔ اور منحنی کو α اس پر کے ماس کے دائیں یا بائیں جانب رکھنے کے لئے احتیاط سے کام لینا چاہئے۔

(۳) اگر α = جہا تو ناقص شام مرکز، نیم محوروں کی سمتیں اور ان کے طول معلوم کرو۔ اس کے بعد منحنی کی شکل کے نہایت سادہ ہونے کی وجہ سے اس کا مرسم کرنا کچھ مشکل نہیں ہوتا لیکن حسب دفعہ ۱۰۳ اس امر کی احتیاط رکھنی چاہئے کہ کونسی سمت کس محور سے متعلق ہے۔

(۴) اگر α = ہا تو حسب سے پہلے منحنی کا مرکز معلوم کر کے متقاربوں کو مرسم کر لینا نہایت ضروری ہے، پھر مرکز کو مبدأ مان کر منحنی کی مساوات بھی معلوم کر لینی چاہئے اور نصف محوروں کے طول اور سمتیں قطع ناقص کی طرح معلوم کر لینی چاہئیں۔ (یہ امر واقعہ کہ منحنی کے محاورہ ہمیشہ متقاربوں کے درمیانی زاویوں کی نصف کرتے ہیں عددی حسابات کی صحت جانچنے کے لئے جن میں تبدیلی کے غلطی کر جانے کا بہت احتمال ہے بخوبی استعمال کیا جاسکتا ہے)

اگر جملہ $1, 2, 3, \dots, n$ لا $\alpha + \beta$ یا $\alpha - \beta$ یا α دو ناطق اجزاء کے ضربی رکھتا ہو اور عام طور پر ایسا نہیں ہوتا) تو متقاربوں کی مساواتیں الگ الگ ان دونوں کی مشترکہ مساوات کو مابین درجہ دوم کی مساوات سمجھ کر حل کرنے سے یا کسی اور طرح اس کے اجزاء کے ضربی معلوم کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں اب چونکہ مرکز پہلے معلوم کر لیا گیا ہے لہذا متقاربوں کو مرسم کرنے کے لئے $1, 2, 3, \dots, n$ لا $\alpha + \beta$ یا $\alpha - \beta$ یا α کے متوازی مرکز میں سے خطوط مستقیم کھینچنے چاہئیں۔

اگر اجزاء کے ضربی ناطق نہ ہوں تو متقاربوں کو ان کی مشترکہ مساوات سے باسانی مرسم کر سکتے ہیں کیونکہ اس صورت میں ہمیں صرف ان نقطوں کو جن پر یہ متقارب کسی ایک محور سے ملتے ہیں مرکز کے ساتھ وصل کر دینا چاہئے۔

چونکہ پہلے طریقہ کے موافق متقاربوں کو مرسم کرنے کی مثالیں ہم اوپر درج کر چکے ہیں اس لئے باب ہذا میں ہم دوسرے طریقہ کے متعلق کچھ

اگر متقارب ن و ن اور ق و ق ہوں تو منحنی یا تو زاویہ خائون ن و ق اور ن و ق میں واقع ہو گا یا ن و ق اور ن و ق میں۔ چونکہ یہ معلوم ہو سکتا ہے کہ متقاطع محور کن خانوں میں گذرتا ہے اس لئے ہم مذکورہ بالا امر کا فیصلہ فوراً کر سکتے ہیں، ایک نقطہ مرسم کر لینے سے بھی اس امر کا تصدیق ہو سکتا ہے۔ یہ معلوم کر لینے کے بعد ہمیں منحنی کے اور بہت سے نقطے مرسم کرنے چاہئیں مثلاً وہ نقطے جہاں محور سے ملتا ہے۔ دیگر نقطوں کے لئے ہم لاکو بال ترتیب ۱، ۲، ۳، ... قیٹیں دیکر مساوات محصلہ کو ما کے لئے حل کر سکتے ہیں۔

یہ بات قابل غور ہے کہ ہم نے یہاں اس امر کی تحقیق نہیں کی کہ عام مساوات خطوط مستقیم کے زوج کو کب تعبیر کرتی ہے، اس کے لئے جداگانہ تحقیق کی ضرورت نہیں کیونکہ جب ہم مبدأ کو مرکز پر منتقل کریں گے تو متحول شدہ مساوات میں منتقل رقم لازماً صفر ہوگی جس سے معلوم ہو جائے گا کہ مساوات سے دو خطوط مستقیم ہی تعبیر ہوتے ہیں، پس معنی کی نوعیت جانچنے کے (اب۔ ہ) طریقہ میں ہی حقیقی خطوط کا زوج قطع زائد کے تحت میں، خیالی خطوط کا زوج قطع ناقص کے تحت میں اور متوازی خطوط کا زوج قطع مکانی کے تحت میں آجاتا ہے۔

اب ہم چند مثالیں درج کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ جس مخروطی کی مساوات حسب ذیل ہے اسے مرتسم کرو

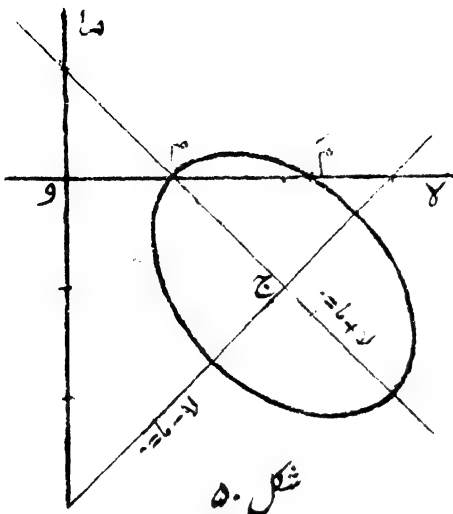
$$= 1r + 6r + 9r - 6r + 6r + 9r$$

یہاں $1 = 6$ ، $2 = 7$ ، $3 = 8$ ، $4 = 9$ ، $5 = 10$ ، $6 = 11$ ، $7 = 12$ ، $8 = 13$ ، $9 = 14$ ، $10 = 15$ ، $11 = 16$ ، $12 = 17$ ، $13 = 18$ ، $14 = 19$ ، $15 = 20$ ، $16 = 21$ ، $17 = 22$ ، $18 = 23$ ، $19 = 24$ ، $20 = 25$ ، $21 = 26$ ، $22 = 27$ ، $23 = 28$ ، $24 = 29$ ، $25 = 30$ ، $26 = 31$ ، $27 = 32$ ، $28 = 33$ ، $29 = 34$ ، $30 = 35$ ، $31 = 36$ ، $32 = 37$ ، $33 = 38$ ، $34 = 39$ ، $35 = 40$ ، $36 = 41$ ، $37 = 42$ ، $38 = 43$ ، $39 = 44$ ، $40 = 45$ ، $41 = 46$ ، $42 = 47$ ، $43 = 48$ ، $44 = 49$ ، $45 = 50$ ، $46 = 51$ ، $47 = 52$ ، $48 = 53$ ، $49 = 54$ ، $50 = 55$ ، $51 = 56$ ، $52 = 57$ ، $53 = 58$ ، $54 = 59$ ، $55 = 60$ ، $56 = 61$ ، $57 = 62$ ، $58 = 63$ ، $59 = 64$ ، $60 = 65$ ، $61 = 66$ ، $62 = 67$ ، $63 = 68$ ، $64 = 69$ ، $65 = 70$ ، $66 = 71$ ، $67 = 72$ ، $68 = 73$ ، $69 = 74$ ، $70 = 75$ ، $71 = 76$ ، $72 = 77$ ، $73 = 78$ ، $74 = 79$ ، $75 = 80$ ، $76 = 81$ ، $77 = 82$ ، $78 = 83$ ، $79 = 84$ ، $80 = 85$ ، $81 = 86$ ، $82 = 87$ ، $83 = 88$ ، $84 = 89$ ، $85 = 90$ ، $86 = 91$ ، $87 = 92$ ، $88 = 93$ ، $89 = 94$ ، $90 = 95$ ، $91 = 96$ ، $92 = 97$ ، $93 = 98$ ، $94 = 99$ ، $95 = 100$ ، $96 = 101$ ، $97 = 102$ ، $98 = 103$ ، $99 = 104$ ، $100 = 105$ ، $101 = 106$ ، $102 = 107$ ، $103 = 108$ ، $104 = 109$ ، $105 = 110$ ، $106 = 111$ ، $107 = 112$ ، $108 = 113$ ، $109 = 114$ ، $110 = 115$ ، $111 = 116$ ، $112 = 117$ ، $113 = 118$ ، $114 = 119$ ، $115 = 120$ ، $116 = 121$ ، $117 = 122$ ، $118 = 123$ ، $119 = 124$ ، $120 = 125$ ، $121 = 126$ ، $122 = 127$ ، $123 = 128$ ، $124 = 129$ ، $125 = 130$ ، $126 = 131$ ، $127 = 132$ ، $128 = 133$ ، $129 = 134$ ، $130 = 135$ ، $131 = 136$ ، $132 = 137$ ، $133 = 138$ ، $134 = 139$ ، $135 = 140$ ، $136 = 141$ ، $137 = 142$ ، $138 = 143$ ، $139 = 144$ ، $140 = 145$ ، $141 = 146$ ، $142 = 147$ ، $143 = 148$ ، $144 = 149$ ، $145 = 150$ ، $146 = 151$ ، $147 = 152$ ، $148 = 153$ ، $149 = 154$ ، $150 = 155$ ، $151 = 156$ ، $152 = 157$ ، $153 = 158$ ، $154 = 159$ ، $155 = 160$ ، $156 = 161$ ، $157 = 162$ ، $158 = 163$ ، $159 = 164$ ، $160 = 165$ ، $161 = 166$ ، $162 = 167$ ، $163 = 168$ ، $164 = 169$ ، $165 = 170$ ، $166 = 171$ ، $167 = 172$ ، $168 = 173$ ، $169 = 174$ ، $170 = 175$ ، $171 = 176$ ، $172 = 177$ ، $173 = 178$ ، $174 = 179$ ، $175 = 180$ ، $176 = 181$ ، $177 = 182$ ، $178 = 183$ ، $179 = 184$ ، $180 = 185$ ، $181 = 186$ ، $182 = 187$ ، $183 = 188$ ، $184 = 189$ ، $185 = 190$ ، $186 = 191$ ، $187 = 192$ ، $188 = 193$ ، $189 = 194$ ، $190 = 195$ ، $191 = 196$ ، $192 = 197$ ، $193 = 198$ ، $194 = 199$ ، $195 = 200$ ، $196 = 201$ ، $197 = 202$ ، $198 = 203$ ، $199 = 204$ ، $200 = 205$ ، $201 = 206$ ، $202 = 207$ ، $203 = 208$ ، $204 = 209$ ، $205 = 210$ ، $206 = 211$ ، $207 = 212$ ، $208 = 213$ ، $209 = 214$ ، $210 = 215$ ، $211 = 216$ ، $212 = 217$ ، $213 = 218$ ، $214 = 219$ ، $215 = 220$ ، $216 = 221$ ، $217 = 222$ ، $218 = 223$ ، $219 = 224$ ، $220 = 225$ ، $221 = 226$ ، $222 = 227$ ، $223 = 228$ ، $224 = 229$ ، $225 = 230$ ، $226 = 231$ ، $227 = 232$ ، $228 = 233$ ، $229 = 234$ ، $230 = 235$ ، $231 = 236$ ، $232 = 237$ ، $233 = 238$ ، $234 = 239$ ، $235 = 240$ ، $236 = 241$ ، $237 = 242$ ، $238 = 243$ ، $239 = 244$ ، $240 = 245$ ، $241 = 246$ ، $242 = 247$ ، $243 = 248$ ، $244 = 249$ ، $245 = 250$ ، $246 = 251$ ، $247 = 252$ ، $248 = 253$ ، $249 = 254$ ، $250 = 255$ ، $251 = 256$ ، $252 = 257$ ، $253 = 258$ ، $254 = 259$ ، $255 = 260$ ، $256 = 261$ ، $257 = 262$ ، $258 = 263$ ، $259 = 264$ ، $260 = 265$ ، $261 = 266$ ، $262 = 267$ ، $263 = 268$ ، $264 = 269$ ، $265 = 270$ ، $266 = 271$ ، $267 = 272$ ، $268 = 273$ ، $269 = 274$ ، $270 = 275$ ، $271 = 276$ ، $272 = 277$ ، $273 = 278$ ، $274 = 279$ ، $275 = 280$ ، $276 = 281$ ، $277 = 282$ ، $278 = 283$ ، $279 = 284$ ، $280 = 285$ ، $281 = 286$ ، $282 = 287$ ، $283 = 288$ ، $284 = 289$ ، $285 = 290$ ، $286 = 291$ ، 287

مرکز کے لئے مساواتیں یہ ہیں

• 210-6 2 + 5 4

• 22 + 64 + 94



جن سے لا = ۲، ما = ۱
مرکز کے لحاظ سے
شغلی کی مساوات
حاصل کرنے کے لئے
ہم درجہ اول کی رقتوں
میں مرکز کے نصف
محدہ مندرج کرتے ہیں
اس طرح سے مساوات
ہو جاتی ہے

۲ لا + ۳ لا + ما + ما - ۲۰ + ۱ × ۲ - ۱۲ + (۱/۲) = ۰
یا ۲ لا + ۳ لا + ما + ما = ۸ یعنی ۲ لا + ۳ لا + ما + ما = ۸
اب نصف محور مساوات ذیل سے حاصل ہوئے ہیں

$$(۱ - \frac{1}{2}) (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

جس سے $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{2}$ یعنی $۲ = ۲$

محور اصغر کی مساوات (جبکہ مرکز کو مبداء مانا جائے) یہ ہے

$$(۱ - \frac{1}{2}) (۱ - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} یعنی لا = ما = ۰$$

اور محور اعظم کی مساوات

$$(۱ - \frac{1}{2}) (۱ - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} یعنی لا + ما = ۰ ہے$$

ولا کے ساتھ نقاط تقاطع ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتے ہیں

$$۲ لا + ۳ لا + ۲۰ = ۱۲ یعنی لا = ۱ یا ۳$$

(یہ نقاط شکل میں م، م سے دکھائے گئے ہیں)

یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ ومانحنی سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔

ابن مرکز کا نشان اگائینہ کے بعد نصف محوروں کو کھینچنے اور دولا کے ساتھ جو نقاط قطع ہوں انکو مخروط کرنے سے خفی مطلوبہ آسانی سے کھینچ سکتا ہے۔
طالب علم دیکھے کہ محور اعظم کا ایک سرا دولا پر ہے۔

مثال ۲۔ جو انحنی مساوات

$$9 - 2a = 2a + 12 + 32 - 4a = 16 + a$$

سے تعبیر ہوتا ہے اس کو مرسم کرو۔

چونکہ یہاں ارب - ۹ = ۱۶ (۱۲) = اس لئے مساوات سے قطع مکانی تعبیر ہوتا ہے۔ مساوات بالا کو شکل

$$(3 - 2a) = 2a + 32 - 4a = 16 + a$$

میں لکھنے سے اور سب معمول لہ داخل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(3 - 2a + 4a) = 2a + 32 - 4a + 16 = 16 + a$$

اور دو خطوط ۳ - ۲ا + ۴ا = ۱۶ اور ۲ - ۳ا + ۴ا = ۱۶ + ۱۲ =

علی القوانم ہوں گے اگر

$$3 - 2a + 4a = 16 + a \quad \text{یعنی اگر لہ} = 8$$

پس محور کی مساوات ۳ - ۲ا + ۴ا = ۱۶ ہے اور رأس پر کا محاس

$$2a + 32 - 4a = 16 + a \quad \text{یعنی} \quad 2a + 32 - 4a = 16 + a$$

پس مساوات کی آخری شکل یہ ہے (۳ - ۲ا + ۴ا) = ۱۶ + ۱۲

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ انحنی بالتمام رأس پر کے محاس ۳ - ۲ا + ۴ا = ۱۶ کی مثبت

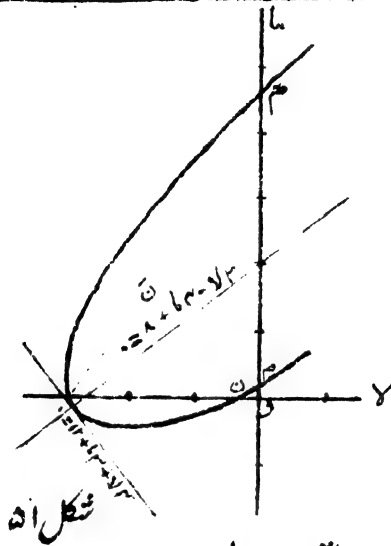
جانب (یعنی مبدأ والی جانب) واقع ہے۔ اس امر کی تصدیق ان نقاط

کو دیکھنے سے بھی ہو سکتی ہے جہاں انحنی محوروں سے ملتا ہے۔

وتر خاص حاصل کرنے کی مساوات (۳ - ۲ا + ۴ا) = ۱۶ + ۱۲

$$\text{لیکن } (3 - 2a + 4a) = 16 + a \quad \text{۱۲ + ۳ - ۲ا + ۴ا}$$

$$= 12 + 3 - 2a + 4a$$



جہاں یہ منحنی محور x سے ملتا ہے وہاں

$$0 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 9 \times 16}}{18}$$

$= -\frac{2}{3}$ یا $-\frac{4}{3}$ تقریباً (شکل میں نقاط n اور m)

جہاں یہ محور y سے ملتا ہے وہاں

$$0 = 4y^2 - 12y + 9$$

$$y = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 36}}{8}$$

$= \frac{3}{2}$ یا $\frac{3}{2}$ (شکل میں نقاط m اور n)

فاس اور محور سمجھنیے اور ان نقاط کو معلوم کر لینے کے بعد جہاں یہ محوروں سے ملتا ہے ہم منحنی کی خاصی درست ترسیم حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال ۳۔ جو منحنی مساوات

$$x^2 - 2x - 6y - 4 = 0$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$= 5.38 - 5 \text{ تقریباً (نقاط ص اور م)}$$

جہاں یہ محور و ما سے ملتا ہے وہاں

$$= 2 + 6 + 2 = 10$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 5.38 - 5 \text{ تقریباً (شکل میں نقاط ن، ن)}$$

پس مساوات زیر بحث دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو ایک دوسرے کو نقطہ (۱-۲) پر قطع کرتے ہیں۔ پس اس نقطہ کو ہر دو محاورہ منحنی کے تقاطع نقطہ کے ساتھ ملانے سے منحنی مطلوبہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۴۔ جو منحنی مساوات

$$35 = (2 - 6 + 2) + (2 - 6 + 2)$$

سے تعبیر ہوتا ہے اسے مرسم کرو

ہم دیکھتے ہیں کہ دو خطوط مستقیم

$$1 + 6 - 2 = 5 \text{ اور } 2 - 6 + 2 = 1$$

ایک دوسرے پر عمود ہیں اور خطوط و حدانی کے اندر کے جملات ان عمودوں کے متناسب ہیں جو منحنی کے کسی نقطہ (۱، ۲) سے ان دو خطوط مستقیم پر جو جملوں سے تعبیر ہوتے ہیں نکالے جائیں۔

خطوط و حدانی کے اندر کے جملوں کو عمودوں کے فی الحقیقت

$$\text{ساوی بنانے سے } \left(\frac{2 - 6 + 2}{5} \right) + \left(\frac{1 + 6 - 2}{5} \right)$$

$$9 = \frac{35}{5} =$$

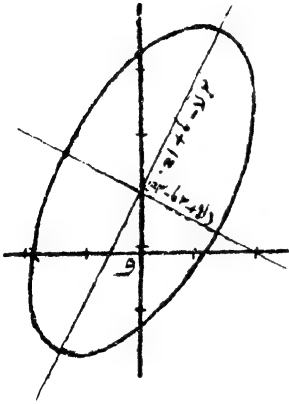
$$= 2 - 6 + 2$$

(۱)

$$= 1 + 6 - 2$$

} پس اگر ہم

کو بالترتیب لا اور ما کا محور فرض کریں تو مساوات بالا کے یہ سنی ہیں کہ
(ن سے لا کے محور پر کا عمود) (ن سے ما کے محور پر کا عمود) $\frac{1}{2}$



یہ صریحاً قطع ناقص ہے جس کے
محور خطوط (۱) سے تعبیر ہوتے ہیں
اور جس کے نصف محوروں کے طول
بالترتیب ۳ اور $\frac{3}{2}$ ہیں۔

$$\text{انتباہ} - \frac{لا^2}{2} + \frac{ما^2}{2} = 1$$

کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ظاہر
ہے کہ ۳ اس نصف محور کا طول ہے
جو خط ۲ لا - ما = ۱ + ما = ۰ پر بنا پا جائے
کیونکہ یہ خط معیاری مساوات میں

ما = ۰ کے متناظر ہے۔ اس نکتہ کو اچھی طرح ذہن نشین کر لینا چاہئے۔
عمل کی تصدیق کر لینے کے لئے ہم ابتدائی محوروں پر نقطہ ثبات
کے طول دریافت کرتے ہیں۔

$$لا = ۰ \text{ سے } (۲ - ما) ۲ + (۱ - ما) ۲ = ۵ \text{ یعنی } ما = ۳ \text{ یا } -۳$$

$$ما = ۰ \text{ سے } (۲ - لا) ۲ + (۲ + لا) ۲ = ۵ \text{ یعنی } لا = ۱ \text{ یا } -۱$$

انتباہ - مندرجہ بالا طریقہ صرف اسی صورت میں کارآمد ہو سکتا ہے جبکہ
مساوات مفروضہ شکل لا + ب س = مستقل میں معلوم ہو جہاں لا = ۰
اور س = ۰ دو علی التوا اہم خطوط مستقیم کو تعبیر کرتے ہیں، طریق عمل ایک
حد تک ایسا ہی ہے جیسا قطع مکانی کی صورت میں۔

مثال ۵ - منحنی لا + ما + ۳ لا + ما + ما = ۰ کو مشتم کرو

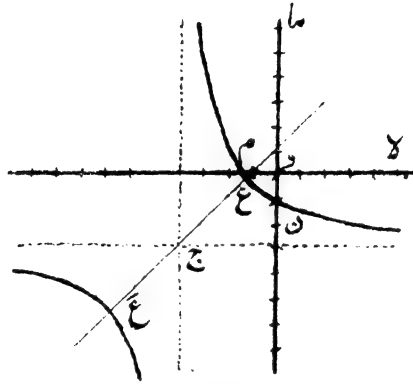
یہاں لا + ب = ۰ - (۱) یعنی منفی مقدار پس مساوات بالا

قطع زائد کو تعبیر کرتی ہے۔
یہاں عمل کو مختصر کیا جاسکتا ہے کیونکہ ہم مساوات کو شکل

$$۸ = (۳ + ما)(۴ + لا)$$

میں لکھ سکتے ہیں اس سے ظاہر ہے کہ مساوات مذکورہ سے قائم قطع زائد تعبیر ہوتا ہے جس کے متقارب $لا = ۴$ اور $ما = ۳$ ہیں اور مرکز $(۴, ۳)$ ہے (در اصل منحنی کے کسی نقطہ سے ان خطوط چمکے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہے) مبداء کو مرکز پر منتقل کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$۸ = لا ما$$



شکل ۵۴

[کیونکہ مبداء کو نقطہ $(۴, ۳)$ پر منتقل کرنے سے ہمیں مساوات میں لا کی بجائے $لا - ۴$ اور ما کی بجائے $ما - ۳$ لکھنا پڑے گا]۔ اب منحنی کو مرسم کر لینا کچھ مشکل نہیں ہے کیونکہ لا کو بالترتیب $(۴, ۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲, -۳, -۴, -۵, -۶, -۷, -۸, -۹, -۱۰, -۱۱, -۱۲, -۱۳, -۱۴, -۱۵, -۱۶, -۱۷, -۱۸, -۱۹, -۲۰, -۲۱, -۲۲, -۲۳, -۲۴, -۲۵, -۲۶, -۲۷, -۲۸, -۲۹, -۳۰, -۳۱, -۳۲, -۳۳, -۳۴, -۳۵, -۳۶, -۳۷, -۳۸, -۳۹, -۴۰, -۴۱, -۴۲, -۴۳, -۴۴, -۴۵, -۴۶, -۴۷, -۴۸, -۴۹, -۵۰, -۵۱, -۵۲, -۵۳, -۵۴, -۵۵, -۵۶, -۵۷, -۵۸, -۵۹, -۶۰, -۶۱, -۶۲, -۶۳, -۶۴, -۶۵, -۶۶, -۶۷, -۶۸, -۶۹, -۷۰, -۷۱, -۷۲, -۷۳, -۷۴, -۷۵, -۷۶, -۷۷, -۷۸, -۷۹, -۸۰, -۸۱, -۸۲, -۸۳, -۸۴, -۸۵, -۸۶, -۸۷, -۸۸, -۸۹, -۹۰, -۹۱, -۹۲, -۹۳, -۹۴, -۹۵, -۹۶, -۹۷, -۹۸, -۹۹, -۱۰۰)$ قیمتیں دینے سے ما کی متناظر قیمتیں فوراً معلوم ہو سکتی ہیں اور منحنی مرسم کیا جاسکتا ہے۔

نصف محوروں کے طول مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\frac{1}{r} - \left(\frac{1}{14}\right) = 0$$

کیونکہ $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} = 0$ اور $\frac{1}{m} = \frac{1}{14}$ $\therefore \frac{1}{r} = \frac{1}{14} = 0$ ہے اور مرکز کو اگر مبدأ مانا جائے تو اس کی سمت لا۔ ما۔ سے تعبیر ہوتی ہے، اس سے نقاط تقاطع ع، ع حاصل ہوتے ہیں، دوسرا محور خط لا + ما = 0 ہے۔

جن نقطوں پر منحنی ابتدائی محوروں سے ملتا ہے وہ یہ ہیں۔
ما = 0، لا = 0 (یہ نقطہ شکل میں م سے تعبیر کیا گیا ہے)

اور لا = 0، ما = 0 (یہ نقطہ شکل میں ن سے تعبیر کیا گیا ہے)
اس طرح مرسم کرنے سے جو منحنی حاصل ہوتا ہے اس کی شکل اوپر دکھائی گئی ہے۔

مثال ۶۔ جو منحنی مساوات

$$لا + ۴ لا + ما + ۴ ما + ۷ لا + ۱۴ ما + ۶ = 0$$

سے تعبیر ہوتا ہے اس کو مرسم کرو۔

ا ب۔ $\frac{1}{b} = \frac{1}{4} = 0$ اور $\frac{1}{m} = \frac{1}{14} = 0$ پس منحنی قطع مکانی ہے
مساوات کو شکل (لا + ۴ ما) + (۷ لا + ۱۴ ما) = 0 میں لکھنے کے بعد ہم اس میں حسب معمول لہ داخل کرتے ہیں، تب

(لا + ۴ ما + لہ) = 0، لا (۷ - ۷ لہ) - ما (۱۴ - ۱۴ لہ) - ۶ + ۶ لہ
دو خطوط مستقیم لا + ۴ ما + لہ = 0 اور لا (۷ - ۷ لہ) + ما (۱۴ - ۱۴ لہ) - ۶ + ۶ لہ = 0
ایک دوسرے پر عمود وار ہوں گے اگر ۷ - ۷ لہ + ۲۸ - ۲۸ لہ = 0 یعنی

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{4}$$

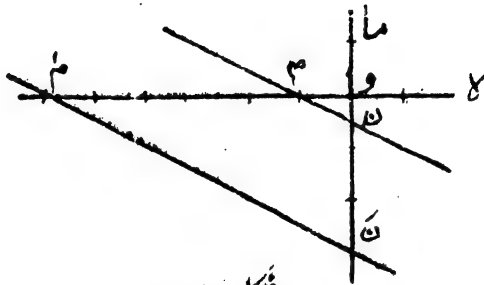
پس مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$(لا + ۴ ما + لہ) + (۷ لا + ۱۴ ما - ۶) = 0$$

ظاہر ہے کہ اس سے ذیل کو متوازی خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں

$$لا + ۲ + ۱ = ۳ + \frac{۱}{۲} + ۲$$

یعنی لا + ۲ + ۱ = ۳ + ۱/۲ + ۲ اور لا + ۲ + ۱ = ۶ + ۱/۲ + ۲
 اور جب ج + ۲ ف گ ہ - ف ن والے ضابطہ کی رو سے
 اوپر کے نتیجہ کی تصدیق کرو۔



شکل ۵۵

یہ منحنی ابتدائی محور و لا کو قطع کرتا ہے جہاں لا = ۱ یا - ۶ (دیکھو نقاط م اور م)
 اور ابتدائی محور و ما کو قطع کرتا ہے جہاں ما = ۱/۲ یا - ۳ (نقاط ن، ن)
 ان امور کو مد نظر رکھ کر مطلوبہ خطوط مستقیم نہایت آسانی سے کھینچے جاسکتے
 ہیں۔

یہ امر کہ مساوات زیر بحث سے دو متوازی خطوط مستقیم ہی تعبیر ہوتے ہیں
 از خود واضح ہے کیونکہ ہم مساوات کو شکل

$$= ۱ + (۲ + لا) + ۱ + (۲ + ما)$$

$$= (۱ + لا + ۲ + ۱) + (۲ + ما + ۱)$$

میں لکھ سکتے ہیں۔

امہم کی بحث سے ظاہر ہے کہ منحنی کی صحیح نوعیت حسب معمول
 طریقہ سے کافی آسانی کے ساتھ معلوم ہو سکتی ہے۔

$$\text{مثال ۷۔ مساوات } ۴ لا + ۱۳ ما - ۲۰ = ۲۴ + ۲۰ - ۲۰$$

سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے اس کو ورسم کرو۔
چونکہ اب $۳۶ = ۴(۱-۱) - ۳۶$ یعنی منفی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ
منحنی قطع زائد ہے۔

مرکز کے لئے مساواتیں یہ ہیں

$$۴ + لا + ما - ۲۰ = ۰ \text{ اور } ۶ - لا - ما - ۱۰ = ۰$$

جن سے $لا = ۲$ ، $ما = ۲$

مرکز کو مبداء ماننے سے منحنی کی مساوات ہو جاتی ہے

$$۴ + لا + ۱۲ - لا - ما - ۲۰ = ۰$$

$$یا \frac{۴}{۳۶} - لا + ۲ \times \frac{۱}{۶} - لا - ما = ۰$$

لہذا نصف محوروں کے لئے مساوات $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۰$ ہے

$$اس سے \frac{۳۶}{۵} - یا = \frac{۳۶}{۸}$$

پس نصف متقاطع محور کا طول ہے $\frac{۳۶}{۸} = \frac{۹}{۲}$ تقریباً

اور اس کی سمت $(\frac{۸}{۳۶} - \frac{۹}{۳۶})$ لا + $\frac{۱}{۱۲} = ۰$ یا $ما - ۳ = ۰$ سے معلوم ہوتی ہے

مقاربوں کی مساوات کی شکل

$$۴ + لا + ۱۲ - لا - ما - ۲۰ = ۰ \text{ یا } ما + ج = ۰$$

سے جہاں ج کی قیمت خطوط

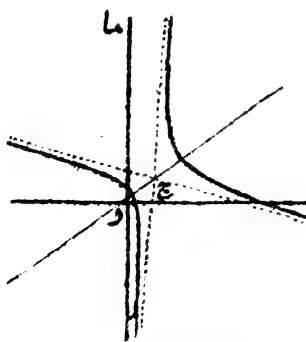
مستقیم کی شرط کی رو سے معلوم

کرنی چاہئے۔ ہم آسانی سے

معلوم کر سکتے ہیں کہ ج = ۰

پس مقاربوں کی مساوات

یہ ہے



شکل ۵۶

$$۳ لا + ۱۲ لا - ۱۰ ما - ۳۰ لا - ۲۰ ما + ۶۰ = ۰$$

جہاں متقارب ولا سے ملتے ہیں وہاں لا = ۱۶/۸ یا ۸/۴

اور جہاں یہ وما سے ملتے ہیں وہاں ما = ۶۴/۲۲ یا ۲۲/۶۴

ان نقاط کو مرسم کر لینے کے بعد اگر اس امر کو ملحوظ رکھا جائے کہ متقارب ایک دوسرے سے نقطہ (۲، ۲) پر ملتے ہیں تو متقاربوں کا مرسم کرنا کچھ مشکل نہیں ہے منحنی مذکور ولا سے جس مقام پر ملتا ہے وہاں

$$لا - ۱۰ لا + ۶ = ۰ \therefore لا = ۳/۹ یا ۷/۷ تقریباً$$

اسی طرح سے جہاں یہ وما سے ملتا ہے وہاں

$$ما + ۲۰ ما - ۲۴ = ۰ \therefore اس لئے ما = ۱۱/۱۱ یا ۲۲/۲۲$$

منحنی اوپر شکل ۵۶ میں دکھایا گیا ہے -

مثال ۸ - منحنی (لا - ۲ + ۱) (لا + ۲ - ۳) = ۵ کو مرسم کرو

منحنی میرے قطع زائد ہے جس کے متقارب لا - ۲ + ۱ = ۰

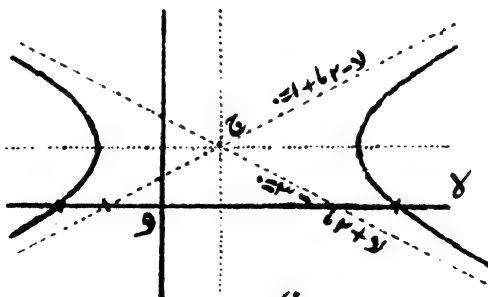
اور لا + ۲ - ۳ = ۰ ہیں -

لایا ما کو خاص قیمتیں دینے سے ہم اس امر کا آسانی سے فیصلہ کر سکتے

ہیں کہ منحنی متقابل زاویوں کے کون سے زوج میں واقع ہوتا ہے مثلاً

اگر لا = ۰ - تو ما خیالی ہوتا ہے اور اگر ما = ۰ - تو لا = ۴ یا - ۲ یا بطرز

دیگر ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی پر کسی نقطہ کے لئے لا - ۲ + ۱ اور لا + ۲ - ۳



شکل ۵۷

دونوں مثبت ہیں یا دونوں منفی لیکن مبداء کے لئے پہلا جملہ مثبت ہے اور دوسرا منفی۔ پس جس زاویہ میں مبداء واقع ہے اس زاویہ میں منحنی واقع نہیں ہوتا۔

محور متقاربوں کے درمیانی زاویہ کی تمصیف کرتے ہیں اس لئے انہیں ہم آسانی سے پہنچ سکتے ہیں۔ اس خاص صورت میں متقارب لا $2 + 1 = 0$ اور لا $2 + 3 = 0$ ۔ حوالہ کے محوروں سے مساوی زاوے بناتے ہیں لہذا انہی کے محور حوالہ کے محوروں کے متوازی ہیں۔

منحصر مرسوم ہو سکتا ہے۔

اس طریقہ میں صرف یہ نقص ہے کہ اس کے ذریعہ خروج المکرز، متقاطع اور مزدوج محوروں کے طول باسانی معلوم نہیں ہو سکتے۔

باب یازدهم پرستش فرق مشقیں

ذیل کے منحنیات کو مرتسم کرو

$$= 14 - 6 + 9 + 5 - 12 - 6 - 5 = 1$$

$$r_n = l_1 n + l_2 n - l_3 n - r$$

$$= 5 + 6x + 9x^2 + 6xy + 6y^2 - 9z - 3$$

$$A = (1-b+br)q + (r+br-b)r - r$$

$$= 6 - 618 + 522 - 65 - 694 + 50 - 5$$

$$\Delta = (3 - 6r + 9)(1 + 6r - 9) = -4$$

$$32 = 623 - 6510 - 504 - 6$$

$$= 4 - 6 + 10 - 12 + 16 - 20 + 24 - 28 + 32 - 36 + 40 - 44 + 48 - 52 + 56 - 60 + 64 - 68 + 72 - 76 + 80 - 84 + 88 - 92 + 96 - 100$$

$$= 18 + 6x + 9z - 6 + 6y - 9 - 9x$$

$$r\delta = (1+b-y)r - (r-b+r+y) = -1.$$

$$\begin{aligned}
 ۴۰ &= (۹+۶۳-۷)(۱۲+۶-۷۴)-۱۱ \\
 ۱۲ &= ۳۵-۶۴۶+۷۶+۶۱۵-۶۲۷-۶۱۵ \\
 ۱۳ &= ۳+۶۲+۷۲+۷۲ \\
 ۱۴ &= ۱+۶۶-۷۸+۶۹+۶۷۱۲+۶۷۱۲ \\
 ۱۵ &= ۶۲+۶۷۱۲+۷۲ \\
 ۱۶ &= ۲(۱-۶+۷۲)۹-(۲+۶۲-۷)۴ \\
 ۱۷ &= ۳+۷۶+۶۴+۶۴ \\
 ۱۸ &= (۹+۶۳-۷)(۱۲+۶-۷۴)-۱۸ \\
 ۱۹ &= ۲(۳-۶+۷)۲+۲(۱+۶-۷) \\
 ۲۰ &= ۶۲۶-۷۱۳+۶۹+۶۷۱۲+۶۷۱۲ \\
 ۲۱ &= ۲-۶۶+۷۱-۶+۷ \\
 ۲۲ &= ۲+۶۵+۶۲-۶۷۱۳-۷۲ \\
 ۲۳ &= ۵-۶۶+۷۴-۶۹+۶۷۱۲+۶۷۱۲ \\
 ۲۴ &= (۳+۶۶-۷۸)+۲(۳-۶۴+۷۲) \\
 ۲۵ &= ۴-۶۲۹+۷+۶۴۸-۶۷۱۳-۷۲ \\
 ۲۶ &= ۱۲+۶۱۵+۷۵+۶۹+۶۷۱۲+۶۷۱۲ \\
 ۲۷ &= ۴۷-۶۲۸-۷۱۰+۶۴۰+۶۷۱۳+۶۷۱۳ \\
 ۲۸ &= ۲۰+(۴+۶-۷)(۲-۶+۷) \\
 ۲۹ &= ۱۲+۶۱۱+۷۲۳+۶۸۱+۶۷۱۲+۶۷۱۲ \\
 ۳۰ &= ۲+(۶۲+۷)۳+۲(۶۲+۷) \\
 ۳۱ &= ۲۸۹+۶۱۶۱-۶۷۱۴+۶۷۱۴ \\
 ۳۲ &= ۳۷-۶۶۸+۷۱۰-۶۳۲+۶۷۱۶-۷۲ \\
 ۳۳ &= ۱۲۴+۶(۳۷۷۵+۳۶)+۷(۳۷۶۶-۷۵)+۶۷۱۱+۳۷۶۷+۷۲ \\
 ۳۴ &= (۳۷+۲)۲-۶(۳۷-۱۱)۲-۷(۳۷-۹)۲-۶۷۱۱+۶۷۱۲+۶۷۱۲ \\
 ۳۵ &= ۱۹۶+۶۵۶-۷۲۸-۶۴+۶۷۱۳+۶۷۱۳
 \end{aligned}$$

$$۳۶ - ۳ لا^۲ + ۲ لا + ۶ ما^۲ - ۱۰ لا - ۱۴ ما + ۱۹ = ۰$$

$$۳۷ - (۳ لا + ۶ ما^۲) + (۲ لا + ۶ ما + ۱۰ لا^۲) = ۰$$

آزمائشی پرچہ ۳

۱۔ بتاؤ کہ منحنی $۱ لا^۲ + ۲ لا + ۶ ما + ۱۰ لا - ۱۴ ما + ۱۹ = ۰$ کے مرکز کے محدد (لا، ما) کیسے معلوم ہو سکتے ہیں اور ثابت کرو کہ متقاربوں کی مساوات

$$۱ لا^۲ + ۲ لا + ۶ ما + ۱۰ لا - ۱۴ ما + ۱۹ = ۰$$

$$۱ لا^۲ + ۲ لا + ۶ ما + ۱۰ لا - ۱۴ ما + ۱۹ = ۰$$

۲۔ ایک قطع زائد کے متقاربوں کی مساواتیں

$$۱ لا - ۶ ما - ۳ = ۰ \text{ اور } ۳ لا + ۶ ما - ۷ = ۰$$

ہیں اور قطع زائد نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ

نقطہ (۴، ۱۹) میں سے بھی گزرتا ہے اور اس کا خروج مرکز ما + ۳ لا + ۲۱ = ۰ ہے۔

۳۔ مجمل طور پر بیان کرو کہ درجہ دوم کی عام مساوات سے جو طریق تعبیر ہوتا ہے اسکی نوعیت کیسے معلوم کرنی چاہئے جبکہ حوالہ سے محور علی القوائم ہوں۔

۴۔ ذیل کی مساواتوں کی تعبیریں بیان کرو۔

$$(۱) ۱ لا^۲ + ۲ لا + ۶ ما + ۱۰ لا - ۱۴ ما + ۱۹ = ۰$$

$$(۲) ۱ لا - ۶ ما - ۳ = ۰$$

ذیل کے منحنیات کو مرتسم کرو۔

$$۵ - (۲ لا - ۶ ما) = ۵ (۲ لا - ۶ ما)$$

$$۶ - (۲ لا + ۶ ما + ۱۰ لا) = (۲ لا + ۶ ما + ۱۰ لا)$$

$$۷ - ۱۸ لا + ۱۰ لا + ۶ ما + ۱۵ ما - ۸ لا - ۱۶ ما - ۲۳ = ۰$$

$$۸ - ۲۵ لا + ۱۲۰ لا۲ + ۱۴۴ لا۳ - ۴۶ لا۴ - ۹ لا۵ - ۱۱ = -$$

۹ - دو ناقصوں کی مساواتیں معلوم کرو جن کے اصلی محور

$$۳ لا + ۱ = ۰ اور لا - ۳ لا + ۲ = -$$

ہوں اور جن کے محور اعظم اور

محور اصغر کے طول بالترتیب ۶ اور ۴ ہوں۔

۱۰ - کن شرائط کے ماتحت

$$۲ لا + ۲ لا۲ + ۲ لا۳ + ۲ لا۴ + ۲ لا۵ + ۲ لا۶ + ۲ لا۷ + ۲ لا۸ + ۲ لا۹ + ۲ لا۱۰ = -$$

دو متوازی خطوط مستقیم کو تعبیر کریں۔



باب دوازدہم

وتر اور ماس

۱۲۴۔ اس باب میں ہم و تروں اور ماسوں کی بعض خاصیتوں پر بحث کریں گے۔ آئندہ ہر صورت میں ماس کو ہم ایک ایسا خط خیال کریں گے جو منحنی سے دو منطبق ہونے والے نقاط پر ملتا ہو یا بالفاظ دیگر منحنی کو دو ایسے نقاط پر قطع کرتا ہو جو ایک دوسرے کے لا انتہا قریب ہوں۔

۱۲۵۔ نقطہ معلومہ میں سے ایک خط سمت معلومہ میں کھینچا گیا ہے جس نقاط پر یہ مخروطی تراش

لا + ۲ ھ لا + ما + ب + ۲ گ لا + ۲ ف + ما + ج =

سے ملتا ہے ان کے فاصلے نقطہ مذکورہ سے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ معلومہ و (لا + ۲) ہے اور خط کی سمت محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔ ایک ایسے نقطہ ن کے محدد جس کا فاصلہ و سے لا ہو

لا + رجم طہ + ما + رجب طہ ہیں

(مقابلہ کرو حصہ اول دفعہ اب نتیجہ صریح)

اگر یہ نقطہ ن منحنی پر واقع ہو تو لازماً

لا + رجم طہ + ۲ ھ لا + رجم طہ + (لا + رجم طہ) + ب + رجب طہ

۲ گ لا + رجم طہ + ۲ ف + رجب طہ + ج =

اس مساوات میں ر کی بڑی سے بڑی قوت ۲ ہے اس لئے اسے ہم لا میں مساوات درجہ دوم خیال کر سکتے ہیں جس سے مطلوبہ فاصلے حاصل ہوتے

(۲) سے (لا، ما) پر کے ماس کی سمت حاصل ہوتی ہے یعنی

$$\text{مس ط} = \frac{\text{لا} + \text{ہ} + \text{ما} + \text{گ}}{\text{ہ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف}} \dots (۳)$$

۱۲۸ - (لا، ما) پر کے ماس کی مساوات معلوم کرو

[انتباہ - ماس کی مساوات کی باضابطہ تحقیق دفعات ۱۲۴، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸ پر مشتمل ہونی چاہیئے]

مساوات مطلوبہ ہے

(ما - ما) = (لا - لا) مس ط [حصہ اول دفعہ ۱۰ کب]
جہاں ط میلان ہے ولا کے ساتھ -
دفعہ ۱۲۷ کی رو سے یہ ہوگی

$$(ما - ما) = (لا - لا) \left(\frac{\text{لا} + \text{ہ} + \text{ما} + \text{گ}}{\text{ہ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف}} \right)$$

یا (لا - لا) (لا + ہ + ما + گ) + (ما - ما) (ہ + لا + ب + ما + ف) = ۰
ضرب دئے جانے پر یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{لا} (\text{لا} + \text{ہ} + \text{ما} + \text{گ}) + \text{ما} (\text{ہ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف}) - (\text{لا} + \text{ہ} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف}) \text{گ} = ۰$$

لیکن چونکہ (لا، ما) معنی پر واقع ہے اس لئے

$$\text{لا} + \text{ہ} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ما} + \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج} = ۰$$

$$\therefore \text{لا} + \text{ہ} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ما} + \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} = - (\text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج})$$

اس لئے ماس کی مساوات ہے بالآخر

$$\text{لا} (\text{لا} + \text{ہ} + \text{ما} + \text{گ}) + \text{ما} (\text{ہ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف}) + \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج} = ۰ \dots (۴)$$

اسے ہم شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں -

$$\frac{\text{لا} (\text{لا} + \text{ہ} + \text{ما} + \text{گ}) + \text{ما} (\text{ہ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف}) + \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ہ} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ما} + \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج}} = ۰$$

۱ لا + لا + ہ (لا + لا + لا) + ب مام + گ (لا + لا) + ف (لا + لا) + ج =
 جو منحنی کی مساوات میں لا کی بجائے لا + لا، مام کی بجائے مام + لا، ۲ لا مام
 کی بجائے لا + لا + لا، ۲ لا کی بجائے لا + لا اور ۲ مام کی بجائے مام + لا
 رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اس شکل کو یاد رکھنا چاہیے۔

ماسات کی مساواتیں چند سادہ صورتوں میں

صابطہ ۴ کی رو سے مکافی مام = لا = کی صورت میں ماس ہے

$$مام = لا = (۱۲) - ۱۲ = ۰$$

$$مام = لا = (۱۲) - (۱۲) = ۰ \quad \text{یعنی} \quad (۵)$$

$$\text{ناقص} \quad ۱ = \frac{۲}{ب} + \frac{۲}{لا} \quad \text{کی صورت میں ماس ہے}$$

$$۱ = \frac{۲}{ب} + \frac{۲}{لا} \quad (۶)$$

$$\text{زائد کی} \quad ۱ = \frac{۲}{ب} - \frac{۲}{لا} \quad \text{کی صورت میں ماس ہے}$$

$$۱ = \frac{۲}{ب} - \frac{۲}{لا} \quad (۷)$$

۱۶۹۔ عام طریقہ کا استعمال چند سادہ صورتوں میں

اس طریقہ کو تو ضیعاً ہم چند خاص صورتوں میں استعمال کریں گے اور مکافی

$$مام = لا اور ناقص \quad ۱ = \frac{۲}{ب} + \frac{۲}{لا} \quad \text{کے لئے مساوات درج دوم اور ماس}$$

کی مساوات معلوم کریں گے، سب عمل ابتدائی اصولوں کی بنا پر ہوگا۔

۱۔ مکافی مام = لا کے لئے، مساوات درج دوم معلوم کرو اور اس سے

منحنی کے نقطہ (لا، مام) پر ماس کی مساوات حاصل کرو۔

اگر خط نقطہ (لا، مام) میں سے کھینچا جائے اور (۱) ایک مطلوبہ قیمت ہو تو

(حصہ اول، دفعہ ۱۰، ب، نتیجہ صریح کی رو سے)
نقطہ (لا + رجم طہ، ما + رجب طہ) منحنی پر واقع ہوگا یعنی

$$(ما + رجب طہ)^2 = ۱۴ (لا + رجم طہ)$$

یعنی رجب طہ + ۲ ر ما جب طہ - ۱۴ رجم طہ + ما - ۱۴ لا = ۰
جو مساوات مطلوبہ ہے

اس کی ایک اصل صفر ہوگی اگر ما - ۱۴ لا = ۰
یعنی اگر (لا، ما) منحنی پر واقع ہو، دوسری اصل صفر اسی صورت میں صفر
ہوگی جبکہ خط نقطہ (لا، ما) پر تماس ہو، اس کے لیے شرط ہے
ما جب طہ - ۱۴ رجم طہ = ۰

اس لیے تماس کی مساوات ہے

$$\frac{ما - ۱۴ لا}{لا - لا} = \frac{۱۴}{۱۴}$$

$$\therefore ما - ۱۴ لا = ۱۴ لا - ۱۴ لا$$

$$ما = ۱۴ لا$$

لیکن اس لیے مساوات مطلوبہ ہے $ما + ۱۴ لا = ۱۴ لا + ۱۴ لا$

$$۲ - ناقص = \frac{لا^2}{۱۴} + \frac{ما^2}{۱۴} = ۱ \text{ کے لیے } ر، \text{ مساوات درجہ دوم معلوم کرو}$$

اور اس سے منحنی کے نقطہ (لا، ما) پر تماس کی مساوات حاصل کرو۔

نقطہ (لا + رجم طہ، ما + رجب طہ) لازماً منحنی پر واقع ہوتا ہے اس لیے

$$۱ = \frac{(لا + رجم طہ)^2}{۱۴} + \frac{(ما + رجب طہ)^2}{۱۴}$$

$$= \left(\frac{لا^2}{۱۴} + \frac{ما^2}{۱۴} \right) + \left(\frac{۲ لا رجم طہ}{۱۴} + \frac{۲ ما رجب طہ}{۱۴} \right) + \left(\frac{رجم طہ^2}{۱۴} + \frac{رجب طہ^2}{۱۴} \right)$$

جو مساوات مطلوبہ ہے

اس کی ایک اصل صفر ہوگی اگر

$$1 = \frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{لا^۲}{ب^۲}$$

یعنی اگر نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہو، اس مساوات کی دوسری اصل صرف اُسی صورت میں صفر ہوگی جبکہ یہ خط اس نقطہ پر ناقص کا ماس ہو، اس کے لئے شرط یہ ہے

$$0 = \frac{ما جب طہ}{ب^۲} + \frac{لا جم طہ}{ب^۲}$$

$$یا \quad مس طہ = - \frac{ب^۲ لا}{ب^۲ ما}$$

اس لئے ماس کی مساوات ہے

$$- \frac{ما - لا}{لا - لا} = مس طہ = - \frac{ب^۲ لا}{ب^۲ ما}$$

$$یا \quad \frac{لا - لا}{لا} = (لا - لا) + \frac{ما}{ب^۲} (ما - لا) = 0$$

$$اور چونکہ \quad 1 = \frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲}$$

$$اس لئے ماس کی مساوات ہو جاتی ہے \quad 1 = \frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲}$$

مشقیں

۱۔ مساوات $\frac{لا^۲}{ب^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = 1$ کی صورت میں ثابت کرو کہ ر، مساوات درجہ دوم ہے

$$۲۔ \left(\frac{جم طہ}{ب^۲} - \frac{جب طہ}{ب^۲} \right) ۲ + \left(\frac{لا جم طہ}{ب^۲} - \frac{ما جب طہ}{ب^۲} \right) + \frac{لا^۲}{ب^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = 1$$

۲۔ اوپر کی مساوات سے زائد $\frac{لا}{ب} - \frac{ما}{ب} = ۱$ کے کسی نقطہ پر حماس کی مساوات حاصل کرو۔

۳۔ منحنی لا + لا + ما = ۳ کے نقطہ (۱، ۱) پر حماس کی مساوات معلوم کرو۔
۴۔ منحنی ۳ لا + لا + لا + ما + ما = ۶ + لا + ما = ۲۵ کے ان نقاط پر حماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جہاں لا = ۱ منحنی سے ملتا ہے۔

۵۔ منحنی لا + لا + ما = ۳ پر وہ نقطے معلوم کرو جن پر کے حماس ما = لا کے متوازی ہیں۔

[اگر (لا، ما) ایک ایسا نقطہ ہو تو متوازی ہونے کی شرط سے ایک مساوات حاصل ہوگی، دوسری مساوات لا، ما کے لحاظ سے یہ ہے لا + لا + ما = ۳] ۶۔ ایک خط مستقیم نقطہ (۱، ۲) میں سے ولا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنانا ہوا کھینچا گیا ہے اور منحنی لا + لا + ما + ما + ا = ۰ سے ن اور ق پر ملتا ہے، وہ مساوات درجہ دوم معلوم کرو جسکی اصلیں ون اور وق ہوں اور ثابت کرو کہ

$$ون + وق = \frac{۲۷۱۱}{۳}، ون \times وق = \frac{۲۲}{۳}$$

۷۔ ثابت کرو کہ مثال ۶ میں نقطہ ون سے گزرنے والا خط مخروطی ہے حقیقی نقاط پر ملتا ہے۔

۸۔ نقطہ (۰، ۱) میں سے ایک خط محور لا کے ساتھ زاویہ ۴۵° بنانا ہوا کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ نقطہ (۰، ۱) سے ان نقطوں کے فاصلے جہاں یہ مخروطی لا + لا + ما = ۰ سے ملتا ہے مساوات لا + لا + ما + ا = ۰ کی اصلوں کے مساوی ہیں۔

اس مساوات کی ایک منفی اصل کی ہندسی تفسیر کیا ہوگی؟
۹۔ مثال ۸ میں مقطوعہ کے نقطہ تنصیف کے محدد معلوم کرو۔

[و سے نقطہ تنصیف کا فاصلہ = $\frac{۱}{۲} (ون + وق)$ اور استعمال کرو لا = لا + رجم طہ، ما = ما + رجب طہ]

۱۰۔ مکانی کے کسی نقطہ ن پر کاماس مرتب سے ق پر ملتا ہے، ثابت کرد کہ ن ق کے محاذی ماسکہ بہ زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۱۱۔ ایک خط مستقیم مکانی کے محور کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ مرتب سے ک پر، نغنی سے کو پر اور اُس ماسکی وتر سے جو و پر کے حماس کے متوازی ہو ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ $و = وق$

۱۲۔ مساوات درجہ دوم سے مزید نتائج۔ ایک اصل لامتناہی۔ مساوات کی ایک اصل لامتناہی ہوگی اگر (یو نو ریل الجبر دوم دفعہ ۱۶۶)

$$\begin{aligned} & \text{اجم طہ} + ۲ \text{ جب طہ} + \text{ب جب طہ} = ۰ \dots\dots (۸) \\ & \text{یا} \quad \text{ب مس طہ} + ۲ \text{ مس طہ} = ۱ = ۰ \end{aligned}$$

جو مس طہ میں ایک مساوات درجہ دوم ہے، اس سے معلوم ہوتا ہے کہ طہ کی دو قیمتیں ہیں جن کے لئے خط نغنی کو لاتناہی پر کاٹتا ہے، یا بالفاظ دیگر کسی نقطہ میں سے دو ایسے خط کھینچے جاسکتے ہیں جن میں سے ہر ایک کا ایک نقطہ تقاطع نغنی کے ساتھ لاتناہی پر ہو، نیز ظاہر ہے کہ یہ دو خطوط $۱ لا + ۲ ھ = ۰$ یا $۲ ھ + لا = ۰$

کے متوازی ہیں یعنی یہ مخروطی کے متقاربوں کے متوازی ہیں۔

یہ خط حقیقی اور غیر منطبق ہونگے اگر $۱ ب > ۲ ھ$ یعنی اگر نغنی قطع زائد ہو (دفعہ ۹۱) یہ منطبق ہونگے اگر $۱ ب = ۲ ھ$ یعنی اگر نغنی مکانی ہو (دفعہ ۵۲)

اور یہ خیالی ہونگے اگر $۱ ب < ۲ ھ$ یعنی نغنی قطع ناقص ہو
متذکرہ بالا سے ان سب امور کی تصدیق ہوتی ہے جو ہر سہ تراشہائے مخروطی کی صورت میں خطوط کے لاتناہی پر ملنے کے لئے بیان کئے گئے ہیں۔

۱۳۔ دونوں اصلیں لامتناہی۔ متقاربوں کی مساوات
اگر دونوں اصولوں میں سے ہر ایک لامتناہی ہو تو لا اور ر کے سر دونوں

لازمًا صفر ہونگے اسلئے [یونیورسل الجبرا، دوم دفعہ ۱۶۷ کی رو سے]

$$\text{اجم طہ} + ۲ \text{ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب طہ} =$$

اور $\text{اجم طہ} (\text{ا} + \text{لا} + \text{ہ} + \text{با} + \text{گ}) + \text{ب جب طہ} (\text{ہ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف}) =$
 دوسری مساوات سے مس طہ کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے اسے پہلی مساوات
 میں مندرج کرنے سے ہم طہ کو ساقط کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ (لا، ما، با، ا، گ)
 ایسا نقطہ نہیں ہے کہ اس کا مقام ہم جہاں چاہیں فرض کر سکیں بلکہ یہ لازماً
 مساوات ذیل کے طریق پر واقع ہے

$$\text{ب} (\text{ا} + \text{لا} + \text{ہ} + \text{با} + \text{گ}) - ۲ (\text{ا} + \text{لا} + \text{ہ} + \text{ما} + \text{گ}) (\text{ہ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف})$$

$$+ (\text{ا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف})^2 = ۰ \dots\dots (۱)$$

اب دونوں اصلیں لامتناہی اُسی صورت میں ہو سکتی ہیں جبکہ مخفی کو کاٹنے
 والا خط مستقیم متقارب ہو، اسلئے اگر شرط (۱) پوری ہو تو (لا، با، متقارب
 پر واقع ہوتا ہے، اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دونوں متقاربوں کی مساوات
 $\text{ب} (\text{ا} + \text{لا} + \text{ہ} + \text{با} + \text{گ}) - ۲ (\text{ا} + \text{لا} + \text{ہ} + \text{ما} + \text{گ}) (\text{ہ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف}) + (\text{ا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف})^2 =$
 مزید برآں ہم جانتے ہیں کہ مخروطی کا مرکز ذیل کی دو مساواتوں کے
 حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا} + \text{لا} + \text{ہ} + \text{با} + \text{گ} = ۰ \quad \text{اور} \quad \text{ہ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف} = ۰$$

اس لئے مساواتیں $\text{ا} + \text{لا} + \text{ہ} + \text{با} + \text{گ} = ۰$ اور $\text{ہ} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف} = ۰$
 ایسے دو خطوط کو تعبیر کرتی ہیں جو مرکز میں سے گزرتے ہیں، اس لئے مساوات
 (ب) جو درجہ دوم کی ایک متجانس مساوات ہے مرکز میں سے گزرنے والے
 دو خطوط کو تعبیر کرتی ہے، اور ہونا بھی یہی چاہیے کیونکہ متقارب مرکز
 میں سے گزرتے ہیں۔

مساوات (ب) میں ضرب دینے اور رقوم کو ترتیب دار لکھنے سے
 طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ متقاربوں کی مساوات کی اس شکل میں اور
 شکل دفعہ ۱۱۰ میں صرف اتنا فرق ہے کہ اس میں $\text{ا} + \text{ب} = \text{ہ}$ بطور ضارب

جزد ضربی کے ہر رقم کے ساتھ موجود ہے۔

۱۳۲۔ اگر نقطہ و میں سے دو وتر ثابت سمتوں میں کھینچے جائیں اور وہ ایک مخروطی سے ن، ق اور ن، ق پر ملیں تو ثابت کرو کہ سطوح ون × وق اور ون × وق کی باہمی نسبت و کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

فرض کرو کہ و کے محدود (لا، ما) ہیں اور وتروں کی سمتیں ولا کے ساتھ زاویے ط اور طہ بنتا رہیں، اگر مخروطی عام مساوات درجہ دوم سے تعبیر ہو تو ون، وق کے طول مساوات ذیل کی اصلیں ہیں

$$ر (اجم ط + ۲ھ جب ط جم ط + ب جب ط) (۱)$$

$$+ ۲ر {جم ط (لا + ھ + با + گ) + جب ط (ھ + لا + ب + با + ف)} (۲)$$

$$+ لا + ۲ھ + لا + با + ب + با + گ + لا + ۲ف + با + ج = ۰ [دفعہ ۱۲۵]$$

اسلئے مسائل مساوات درجہ دوم کی رو سے

$$\frac{لا + ۲ھ + لا + با + ب + با + گ + لا + ۲ف + با + ج}{اجم ط + ۲ھ جب ط جم ط + ب جب ط} = ون \times وق$$

اور اسی طرح سے

$$\frac{لا + ۲ھ + لا + با + ب + با + گ + لا + ۲ف + با + ج}{اجم ط + ۲ھ جب ط جم ط + ب جب ط} = ون \times وقی$$

$$\text{جس سے } \frac{ون \times وق}{ون \times وقی} = \frac{اجم ط + ۲ھ جب ط جم ط + ب جب ط}{اجم ط + ۲ھ جب ط جم ط + ب جب ط} \quad (۱۰)$$

چونکہ $\frac{ون \times وق}{ون \times وقی}$ کی قیمت میں جو اوپر معلوم ہوئی لا یا با میں سے کوئی

بھی شامل نہیں ہوتا اس لئے یہ و کے مقام پر منحصر نہیں ہے لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ یہ قیمت صرف ان سمتوں پر موقوف ہے جن میں کہ

وتر کھینچے گئے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ بالخصوص جب نقطہ ن اور ق ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں فرض کرو کہ نقطہ م پر اور ن ق منطبق ہو جائیں م پر تو یہ خط ماس ہو جائیں گے، اس صورت میں اوپر کی نسبت $\frac{وم}{وم}$ کے مساوی ہوگی۔

مشق

۱۲۔ اگر مخروطی دائرہ ہو تو مسئلہ بالا سے حاصل کرو کہ

$$ون \times وق = ون \times وق \quad [اقلیدس ۳ م ش ۳۵، ۳۶]$$

۱۳۔ کسی نقطہ سے ایک مرکز دار تراش کے جو ماس کھینچ سکتے ہیں ان کے طولوں کو آپس میں وہی نسبت ہے جو ان کے متوازی نیم قطروں کو آپس میں ہے۔

فرض کرو کہ ماسات وم، وم نقطہ و میں سے گزرتے ہیں اور محور لا کے ساتھ زاوے طہ اور طہ بناتے ہیں، نیز ل ج ل اور ن ج ن مخروطی کے دو قطر ہیں جو بالترتیب ان ماسوں کے متوازی ہیں تب اوپر کے عام نتیجہ کی رو سے

$$\frac{وم}{وم} = \frac{ل ج \times ج ل}{ن ج \times ج ن} = \frac{اجم ۲ + جب طہ جم طہ + ب جب ۲ طہ}{اجم ۲ + جب طہ جم طہ + ب جب ۲ طہ}$$

$$= \frac{ج ل}{ج ن} \quad \text{کیونکہ ج ل} = ج ل \text{ اور ج ن} = ج ن$$

$$\therefore \frac{وم}{وم} = \frac{ج ل}{ج ن}$$

دائرہ کی صورت میں یہ نتیجہ بالکل ظاہر ہے کیونکہ دائرہ کے ماس مساوی

ہوتے ہیں اور قطر بھی باہم مساوی ہوتے ہیں۔

مثال۔ نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرنے والے ان دو خطوط کی سمتیں معلوم کرو جو مستحقی لا^۱۔ ۳ لا^۲ + لا^۲ + لا^۲ = ۰ کو لاتنا ہی پر کے ایک

نقطہ پر کاٹیں۔ نیز جن محدود نقاط پر وہ منحنی سے ملے ہیں انہیں معلوم کرو۔

ر، مساوات اس صورت میں ہوگی

$$(1 + \text{رجم طہ})^2 - 3(1 + \text{رجم طہ})(1 + \text{رجب طہ}) + 2(1 + \text{رجب طہ})^2 + (1 + \text{رجم طہ}) = 0$$

$$\text{یا } 1^2 - 3(1 + \text{رجم طہ}) + 2(1 + \text{رجب طہ}) + (1 + \text{رجم طہ}) = 0$$

اگر ایک نقطہ تقاطع لاتناہی پر ہو تو

$$\text{رجم طہ} - 3(1 + \text{رجم طہ}) + 2(1 + \text{رجب طہ}) = 0 \text{ جس سے } 1 \text{ یا } 2$$

محدود اصل اس مساوات سے ملیگی

$$1 = 2 + (1 + \text{رجب طہ})$$

$$\text{اگر } 1 = 1 \text{ تو اس مساوات سے } 1 = 2 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \text{ یا } 1 = 2$$

$$\text{اگر } 2 = 2 \text{ تو } 2 = 2 + \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) \text{ یا } 2 = \frac{5}{2}$$

اب محدود نقاط تقاطع کے محدود (1 + رجم طہ) ، (1 + رجب طہ) ہیں۔

$$\text{جس صورت میں کہ } 1 = 1 \text{ ہوئے } 1 - \frac{1}{1} \times 1 = 1 - \frac{1}{1} \times 1 \text{ یعنی } (0, 0)$$

$$\text{کہ } 2 = 2 \text{ ہوئے } 2 - \frac{2}{2} \times \frac{5}{2} = 2 - \frac{5}{2} \text{ یعنی } \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

اس لئے خطوط دلا کے ساتھ زاوے ۴۵° اور مس الہ بناتے ہیں

اور محدود نقاط تقاطع (0, 0) ، (1/3 - 1/3) ہیں۔

مشقیں

۱۳۔ دو خط نقطہ (1, 1) میں سے گھنچے گئے ہیں ، ہر خط اور منحنی

$$1 - 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0 \text{ کے نقاط تقاطع میں سے ایک}$$

نقطہ لاتناہی پر ہے ، خطوط کی سمتیں اور ان محدود نقطوں کے محدود

معلوم کرو جن پر یہ خط منحنی سے ملتے ہیں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۳، ۲) میں سے صرف ایک خط کھینچا جاسکتا ہے جس کا ایک نقطہ تقاطع منحنی لا^۲ + ۲ لا ما + ۳ لا + ما + ۳ لا + ما = ۰ کے ساتھ لاتنا ہی پر ہو، اس کی کیا وجہ ہے؟ محدود نقطہ تقاطع کے محدود معلوم کرو۔

۱۵۔ ابتدائی اصولوں سے حسب دفعہ ۱۳۱ ذیل کے منحنیات کے مقارب معلوم کرو۔

$$\frac{لا}{ب} - \frac{لا^۲}{ب^۲} = ۱ \text{ اور } ۲ لا - لا^۲ - ۳ لا ما - ۳ لا + ۲ ما + ۳ لا + ما = ۰$$

۱۶۔ نتیجہ دفعہ ۱۳۲ سے ثابت کرو کہ اگر ایک محکمہ دار تراسش اور ایک دائرہ ایک دوسرے کو چار نقطوں پر قطع کریں تو ان کے مشترک وتر مخروطی کے محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

۱۷۔ اگر ایک دائرہ ایک ناقص کو ن پر مس کرے اور نقاط ق، ر پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ن ق، ن ر اور ناقص کے محور سے ایک مثلث متساوی الساقین بنتا ہے۔

۱۸۔ ایک متغیر نقطہ و میں ہے ایک خط ایک ثابت سمت میں کھینچا گیا ہے جو مخروطی سے ن اور ق پر ملتا ہے، و کا طریق معلوم کرو۔

(۱) جبکہ ون + وق مستقل ہو (۲) ون × وق مستقل ہو
دائرہ کی صورت میں نتیجہ (۳) کیا ہو جائیگا؟

[مخروطی کی مسادات عام شکل میں ہو اور استعمال کرو سمتی مسادات درجہ دوم بلحاظ ر کے]

۱۹۔ اب ہم ایک اور طریقہ بیان کریں گے جس کی مدد سے مخروطی کے کسی نقطہ پر کے حماس کی مسادات اور علاوہ اسکے کئی اور ضروری نتائج حاصل ہو سکتے ہیں، اس طریقہ کو ابتدا میں ہم ایک سادہ منحنی کی صورت میں استعمال کرتے ہیں۔

۳۔ اسے جس نسبت سے کہ مکانی $ما = ۴$ و $لا$ دو نقاط کو ملانے والے خط کی تقسیم کرتا ہے اسے معلوم کرو اور اس سے مکانی کے نقطہ (لا، ما) پر کے ماس کی مساوات حاصل کرو۔

چونکہ خط مستقیم مکانی کو دو نقطوں پر کاٹتا ہے اس لئے ابتدا میں ہی اسے ہم بجانب لیتے ہیں کہ اس نسبت کے لئے ہیں مساوات درجہ دوم حاصل ہوئی۔

فرض کرو کہ $لا، ما$ اور $ب، لا، ما$ دو مفروضہ نقطے ہیں۔ اگر ن خط $اب$ کو اس طرح تقسیم کرے کہ

$$ا : ن : ب = ک : ل$$

تو ن کے عدد ہونگے $\frac{ک(لا+ل+لا)}{ک+ل}$ ، $\frac{ک(ما+ل+لا)}{ک+ل}$ [حصہ اول دفعہ ۳]

اس لئے ہیں نسبت $ک : ل$ ایسی معلوم کرنا ہے کہ یہ نقطہ ن منحنی پر واقع ہو اس لئے $\frac{ک(ما+ل+لا)}{ک+ل} = \frac{ک(لا+ل+لا)}{ک+ل}$

$$یا (ک+ما+ل+لا) = ۴ (ک+لا+ل+لا) (ک+ل)$$

$$: ک (ما-۴-لا) + ۲ ک ل (ما-۲-لا-۲+لا) + ل (ما-۴-لا) = ۰$$

چونکہ نسبت $ک$ کے مساوات درجہ دوم ہے، اس سے ان نقاط کے لئے جہاں مکانی خط کو کاٹتا ہے $ک$ کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

نسبت $\frac{ک}{ل}$ کی ایک قیمت صفر ہوگی جب $ما = ۴$ و $لا = ۰$ یعنی جب

نقطہ $لا، ما$ منحنی پر واقع ہو۔ اس نسبت کی دوسری قیمت صرف اسی صورت میں صفر ہو سکتی ہے جبکہ $لا، ما$ نقطہ $لا، ما$ پر کے ماس پر واقع ہو، اسکے لئے شرط یہ ہے

$$ما-۴-۲-۲+لا-۲=۰$$

$$\begin{aligned} & \text{ک}^1 (\text{لا}^1 + ۲\text{ھ}^1 + \text{لا}^1 + \text{ب}^1 + \text{ما}^1 + ۲\text{گ}^1 + \text{لا}^1 + ۲\text{ف}^1 + \text{ما}^1 + \text{ج}^1) \\ & + ۲\text{ک}^1 (\text{ل}^1 + \text{لا}^1 + \text{لا}^1 + \text{ھ}^1 (\text{لا}^1 + \text{ما}^1 + \text{لا}^1 + \text{ما}^1) + \text{ب}^1 + \text{لا}^1 + \text{ب}^1 + \text{گ}^1 (\text{لا}^1 + \text{لا}^1) + \text{ف}^1 (\text{لا}^1 + \text{ما}^1) + \text{ج}^1) \\ & + \text{ل}^1 (\text{لا}^1 + \text{لا}^1 + ۲\text{ھ}^1 + \text{لا}^1 + \text{ب}^1 + \text{ما}^1 + ۲\text{گ}^1 + \text{لا}^1 + ۲\text{ف}^1 + \text{ما}^1 + \text{ج}^1) = ۰ \end{aligned}$$

یا مختصراً اسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$\text{ک}^۱ \text{س}^۱ + ۲\text{ک}^۱ \text{ل}^۱ \text{م}^۱ + \text{ل}^۱ \text{س}^۱ = ۰ \dots\dots\dots (۱۱)$$

جہاں سر $\text{م}^۱$ لمحاظ $\text{لا}^۱$ ، $\text{ما}^۱$ اور $\text{لا}^۱$ ، $\text{ما}^۱$ کے متشکل ہے (یعنی یہ نہیں بدلتا اگر $\text{لا}^۱$ کا تبادلہ $\text{لا}^۱$ سے اور $\text{ما}^۱$ کا $\text{ما}^۱$ سے کر دیا جائے)

مساوات (۱۱) نسبت $\text{ک}^۱ : \text{ل}^۱$ میں مساوات درجہ دوم ہے جس کو حل کرنے سے مطلوبہ نسبت حاصل ہوتی ہے، اسے یوں عامتہ سال کا نتیجہ کہتے ہیں۔

نوٹ درجہ دوم کی عام مساوات کو جب ہم آئندہ $\text{س}^۱ = ۰$ سے تعبیر کریں گے تو $\text{س}^۱ = ۰$ اس نتیجہ کو تعبیر کریں گے جو $\text{لا}^۱$ ، $\text{ما}^۱$ کی بجائے جملہ $\text{س}^۱$ میں $\text{لا}^۱$ ، $\text{ما}^۱$ مندرج کرنے سے حاصل ہو۔

$$\text{نتیجہ صریح} - \text{اگر مساوات } \left(\frac{\text{ک}^۱}{\text{ل}^۱}\right) \text{س}^۱ + ۲\left(\frac{\text{ک}^۱}{\text{ل}^۱}\right) \text{م}^۱ + \text{س}^۱ = ۰$$

کی اصلیں حقیقی ہوں تو خط مستقیم منحنی سے دو حقیقی نقاط $\text{ف}^۱$ ، $\text{ق}^۱$ پر ملے گا اور اگر نسبت کی قیمت $\frac{\text{ک}^۱}{\text{ل}^۱}$ کے جواب میں نقطہ $\text{ف}^۱$ ہو تو جب یہ قیمت مثبت ہوگی $\text{ف}^۱$ نقاط $\text{ا}^۱$ ، $\text{ب}^۱$ کے درمیان واقع ہوگا اور اگر یہ منفی ہوگی تو باہر واقع ہوگا۔

اگر اصلیں مساوی ہوں تو خط مخروطی سے دو منطبقہ نقاط پریں گے یعنی اسے $\text{س}^۱$ کریں گے۔

اگر اصلیں خیالی ہوں تو خط مخروطی سے خیالی نقاط پریں گے۔
اب ہم چند مثالیں اس غرض سے درج کریں گے کہ طالب علم اُس ضروری

اصول کی اہمیت سے جو اد پر بیان ہوا پورے طور پر واقف ہو جائے۔

مثال ۱۔ جس نسبت سے خط Δ (لا + ب + ما + ج = ۰) نقاط (لا، ما) اور (لا، ما) کے ملانے والے خط کو تقسیم کرتا ہے اسے معلوم کرو۔

اگر ک: ل مطلوبہ نسبت ہو تو نقطہ $\frac{\text{ک (لا، ما) ل}}{\text{ک + ل}}$ ، $\frac{\text{ک (ما، ل) ل}}{\text{ک + ل}}$

خط Δ (لا + ب + ما + ج = ۰) پر واقع ہے اور اس سے حاصل ہوتا ہے

Δ (ک لا، ل) + ب (ک ما، ل) + ج (ک ل) = ۰

$$\text{یا } \frac{\text{ک}}{\text{ل}} = \frac{\Delta \text{ (لا + ب + ما + ج)}}{\Delta \text{ (لا + ب + ما + ج)}}$$

جس سے مطلوبہ نسبت حاصل ہوتی ہے۔

اس ضابطہ سے ایک ضروری نتیجہ تشریح ہوتا ہے، فرض کرو کہ Δ (لا، ما)

ہے اور Δ (لا، ما) ، اب اگر Δ ، خط کی متقابل جانبوں میں واقع ہوں تو یہ خط Δ کو دا خلا تقسیم کریگا اور نسبت ک: ل نسبت ہوگی،

اس لئے اس صورت میں Δ (لا + ب + ما + ج) اور Δ (لا + ب + ما + ج) کی علامات مختلف ہونگی۔ اگر Δ اور Δ خط کے ایک ہی جانب واقع ہوں تو نسبت

ک: ل منفی ہوگی، اس صورت میں Δ (لا + ب + ما + ج) اور Δ (لا + ب + ما + ج) کی وہی علامت ہوگی۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ان تمام نقطوں کیلئے جو خط Δ (لا + ب + ما + ج = ۰)

کے ایک ہی جانب واقع ہوں جملہ Δ (لا + ب + ما + ج) کی علامت ایک ہی ہوگی اور ان نقطوں کے لئے جو خط کی متقابل جانبوں میں واقع ہوں جملہ کی علامتیں مختلف ہونگی اور خط پر کے تمام نقطوں کے لئے یہ جملہ صفر ہوگا

[دیکھو حصہ اول، دفعہ ۱۳]

مثال ۲۔ جس نسبت سے دائرہ لا + ما = ۶۵ نقاط $(\frac{۱۵}{۲}, \frac{۵}{۲})$

اور (۷۶) کے لانے والے خط کو تقسیم کرتا ہے اُسے معلوم کرو۔
اگر مطلوبہ نسبت ک:ل ہو تو نقطہ $\frac{۷۶}{۲} + \frac{۱۵}{۴} ل$ ، $\frac{۷۶}{۲} + \frac{۱۵}{۴} ل$ کے ملنے پر واقع ہوگا اور اسلئے

$$(۷۶ + \frac{۱۵}{۴} ل)^۲ = (۷۶ + \frac{۱۵}{۴} ل)^۲ + ۲(۷۶ + \frac{۱۵}{۴} ل) \times \frac{۱۵}{۴} ل + (\frac{۱۵}{۴} ل)^۲$$

جو تحویل کے بعد ہو جاتی ہے $۸ک - ۲ک ل - ل = ۲$ ۔

$$\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۸}$$

پس ایک نقطہ تقاطع اندرونی ہے اور دوسرا بیرونی اور پہلے نقطہ کے قریب تر ہے۔

نقاط تقاطع کے محدود معلوم کرنے کے لئے ہمیں اوپر کی نسبتیں استعمال کرنی چاہئیں۔ اندرونی نقطہ تقاطع کے محدود میں

$$\frac{\frac{۱۵}{۴} \times ۲ + ۷۶ \times ۱}{۲ + ۱} ، \frac{\frac{۱۵}{۴} \times ۲ + ۷۶ \times ۱}{۲ + ۱}$$

اور بیرونی نقطہ کے محدود میں

$$\frac{\frac{۱۵}{۴} \times ۲ - ۷۶ \times ۱}{۲ - ۱} ، \frac{\frac{۱۵}{۴} \times ۲ - ۷۶ \times ۱}{۲ - ۱}$$

اور اس کی آسانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ دونوں نقطے فی الحقیقت منحنی پر واقع ہیں۔

مشقیں

۱۹۔ جس نسبت سے خط مستقیم ۳ لا + ۵ = ۱ نقاط (۱، ۱) ، (۳، ۵) کے ملنے والے خط کو تقسیم کرتا ہے اُسے معلوم کرو۔

۲۰۔ خط مستقیم ۲ لا + ۵ = ۱ ایک متحرک نقطہ اور (۱، ۱) کے ملنے

والے خاکاں ہمیشہ تصنیف کرتا ہے، متحرک نقطہ کا طریق معلوم کرو
 ۲۱۔ جس نسبت سے مخروطی لا-لا-ما =۔ نقاط $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ ، $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ کے لانے والے خط کو تقسیم کرتی ہے اُسے معلوم کرو اور نقاط تقاطع کے محدود دریافت کرو۔

۲۲۔ دفعہ ۱۳۶ کے طریق کتابت کے بموجب ثابت کرو کہ (لا، ما) اور (لا، ما) کے لانے والا خط مخروطی سے ختیعی، مغربی یا خیالی نقاط پر ملتا ہے اگر بالترتیب

$$م^۱ < = > س، س$$

۲۳۔ ایک ثابت نقطہ ہے اور کوئی نقطہ ن ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہے، ثابت کرو (و کو مبدا ماننے کے بغیر) کہ اگر و ن کو ن پر نسبت معلومہ سے تقسیم کیا جائے تو ن کا طریق ایک ایسا خط ہے جو ن کے طریق کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ و (ا، ب) ہے اور ن (لا، ما) ت ن، و ن کو معلومہ نسبت سے تقسیم کرتا ہے، اسکے محدود، ب، لا، ما کی رقوم میں معلوم کرو اور اس شرط سے فائدہ اٹھاؤ کہ ن ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہے۔

۲۴۔ نسبتی مساوات درجہ دوم کو استعمال کرنے سے (لا، ما) پر کے ماس کی مساوات معلوم کرو۔
 نسبتی مساوات ہے

$$ک^۱ س + ۲ ک ل م + ل^۱ س = -$$

نسبت ک: ل کی ایک قیمت صفر ہوگی جب س = - یعنی جب نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہو اور ایسے ہی ہونا چاہیے، نسبت ک: ل کی دونوں قیمتیں صفر ہوئیں اگر ل منحنی پر واقع ہو اور نیز ل، ل پر کے

ماس پر واقع ہو۔

اسکے لئے شرط یہ ہے $m = 0$ یعنی

$$0 = \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{گ} + \text{لا} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج} = 0$$

$$0 = \text{یا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{گ} + \text{لا} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج} = 0$$

اب چونکہ یہ اس امر کی شرط ہے کہ (لا، ب، ف) نقطہ (لا، ب، ف) کے ماس پر واقع ہو اسلئے ماس کی مساوات ہے

$$\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{گ} + \text{لا} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج} = 0 \dots (۴)$$

جیسا ہم پہلے طریقہ سے معلوم کر چکے ہیں۔

یہ طریقہ قابل ترجیح ہے کیونکہ اس کا اطلاق دونوں صورتوں پر ہو سکتا ہے خواہ محور قائم ہوں یا مائل، چنانچہ مسئلہ بالا کو ثابت کرنے میں کوئی ایسی خاصیت تسلیم نہیں کر لی گئی جو قائم محوروں سے بالخصوص متعلق ہو۔

مشقیں

۲۴۔ مکانی لا = ۸ م کے اُن نقطوں پر کے مساوات کی مساواتیں معلوم کرو جہاں لا = ۲، ۳، ۵ بالترتیب۔

۲۵۔ زائد لا = ۹ - ۱۱ = ۱ کے اُن نقاط پر کے مساوات کی مساواتیں

معلوم کرو جہاں لا = ۲، ۳، ۵ بالترتیب۔

۲۶۔ منحنیات ذیل کے اوتار خاص کے سروں پر جو ماس کھینچ سکتے ہیں ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

$$(۱) \text{ لا} + \text{لا} = \text{لا} = ۱ (ب) \text{ لا} = ۸ \text{ ف لا (ج) لا} = ۹ - ۹ = ۹$$

۲۷۔ منحنیات (۱) لا = ۸ (ب) لا = ۹ + ۹ = ۱۸ میں سے

سادہ صورتوں میں یہ مساوات ذیل کی شکلیں اختیار کرتی ہے۔
مکانی ما - م والا = ۰ (لا، ما) سے حماس ہیں

$$\{ \text{ما، ما} - ۲ (لا + لا) \} = ۲ (ما - م والا) (ما - م والا)$$

$$\text{ناقص} \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱، \text{نقطہ} (لا، ما) \text{ سے حماس ہیں}$$

$$\left(\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - ۱ \right) = ۲ \left(۱ - \frac{ما}{۲} + \frac{لا}{۱} \right) \left(۱ - \frac{ما}{۲} + \frac{لا}{۱} \right)$$

$$\text{زائد} \frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲} = ۱، \text{نقطہ} (لا، ما) \text{ سے حماس ہیں}$$

$$\left(\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲} - ۱ \right) = ۲ \left(۱ - \frac{ما}{۲} - \frac{لا}{۱} \right) \left(۱ - \frac{ما}{۲} - \frac{لا}{۱} \right)$$

طالب علم کو ابتدائی اصولوں سے حسب بالا یہ سب مساواتیں حاصل کرنی
چاہئیں۔ رہنمائی کی غرض سے ہم ناقص کی صورت میں تفصیلی عمل ذیل
میں درج کرتے ہیں۔

مثال - نقطہ ن (لا، ما) سے ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کے جو

رواس کھینچ سکتے ہیں ان کی مساوات معلوم کرو۔

اگر کسی حماس پر قی (لا، ما) ایک نقطہ ہو تو ن اور ق کے ملانے
والا خط ناقص سے دو منطبقہ نقاط پر ملے گا، اب ہم اس نسبت کی قیمتیں
معلوم کریں گے جس نسبت سے یہ ناقص اس خط کو تقسیم کرتا ہے اور اس
امر کے لئے شرط دریافت کریں گے کہ یہ قیمتیں باہم مساوی ہیں۔ جو نقطہ ن ق
کو نسبت ک: ل سے تقسیم کرتا ہے اس کے محدد ہیں

$$\frac{\text{ک ل} + \text{ل لا}}{\text{ک} + \text{ل}}، \frac{\text{ک ما} + \text{ما ل}}{\text{ک} + \text{ل}}$$

اگر یہ نقطہ ناقص پر ہو تو

$$\frac{(ک ل + ل ل)^2}{(ک ل + ل ل)} \times \frac{1}{2} + \frac{(ک ل + ل ل)^2}{(ک ل + ل ل)} \times \frac{1}{2} = 1$$

(ک ل + ل ل) کے ساتھ ضرب دینے اور رقم کو ترتیب وار اکٹھا کرنے سے

$$ک^2 \left\{ \frac{لا}{2} + \frac{لا}{2} - \frac{لا}{2} \right\} + ۲ ک ل \left\{ \frac{لا}{2} + \frac{لا}{2} - \frac{لا}{2} \right\} + ل^2 \left\{ \frac{لا}{2} + \frac{لا}{2} - \frac{لا}{2} \right\} = ۰$$

اگر ک/ل میں اس مساوات کی اصلیں مساوی ہوں تو

$$\left(\frac{لا}{2} + \frac{لا}{2} - \frac{لا}{2} \right) = \left(\frac{لا}{2} + \frac{لا}{2} - \frac{لا}{2} \right) \left(\frac{لا}{2} + \frac{لا}{2} - \frac{لا}{2} \right)$$

پس معلوم ہوا کہ (لا، لا، لا) کے کسی ایک حماس پر واقع ہونے کے لئے ہی شرط ہو۔
پس حماسوں کی مساوات مطلوبہ ہے

$$\left(\frac{لا}{2} + \frac{لا}{2} - \frac{لا}{2} \right) = \left(\frac{لا}{2} + \frac{لا}{2} - \frac{لا}{2} \right) \left(\frac{لا}{2} + \frac{لا}{2} - \frac{لا}{2} \right)$$

مشقیں

۳۰۔ نقطہ (۱۱-۵) سے ۳ لا + ۴ ما = ۳۲ کے حماسوں کی مساوات معلوم کرو۔

۳۱۔ نقطہ (۰، ف) سے مکافی ما = ۴ ف لا کے حماسوں کی مساوات دریافت کرو۔

۳۲۔ مبدأ سے منحنی $\frac{(لا-۳)}{2}$ کے حماسوں کی مساوات معلوم کرو۔

۳۳۔ نقاط (۱) (۳، ۳) (ب) (۱، ۱) سے ناقص $\frac{لا}{9} + \frac{ما}{9} = ۱$ کے حماسوں کی مساوات معلوم کرو، دوسری صورت میں نتیجہ کی تبیین بیان کرو۔

اس میں ہم دراصل ایک ایسا جملہ مرتب کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو لا = لا اور ما = ما اور نیز لا = لا اور ما = ما کے لئے منتظاً بقاً صفر ہو اسکے لئے ضروری ہے کہ ہر رقم میں لا - لا یا ما - ما اور لا - لا یا ما - ما بطور جزو ضروری کے شریک ہو۔

معاوضہ انہیں یہ غمزدگی ہے کہ دونوں طرف درجہ دوم کی رقیبیں

مثلاً لیں۔ (۱) مکانی $\lambda = ۴$ اولا میں وتر کی مساوات ہے

$$y^2 - 7 = (y - 1)(y + 1)$$

(۳) ناقص $\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_2}{r_2} = 1$ میں وتر کی مساوات ہے

$$1 - \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} = \frac{(r_1 - 1)(r_1 - 1)}{r_2} + \frac{(r_1 - 1)(r_1 - 1)}{r_2}$$

مستقبل

منشیات ذیل پر نقاط (لا، با) اور (لا، با) فرض کر کے ان کو طے کرنے والے دتروں کی مساواتیں دریافت کرے اور ان سے پیروی میں (لا، با) پر کے عناصر کی مساوات حاصل کرے، محاس کی عام مساوات کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ایسے جواب کی تصدیق کرو۔

$$1 = \frac{r_1}{r_1} + \frac{r_2}{r_2} = 1 + 0$$

$$38 - 12 = 26 \quad 39 - 11 = 28$$

۳۰۔ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ہم اس ماس کی مساوات معلوم کرنے کے تین طریقے جو اوپر دئے گئے ہیں ان کا مقابلہ -

ہم بتا چکے ہیں کہ پہلا طریقہ صرف قائم محوروں کی صورت میں استعمال

ہو سکتا ہے لیکن دوسرے اور تیسرے طریقہ کے لئے یہ قید نہیں ہے یہ ہر دو قائم اور مائل محوروں کی صورت میں آسانی استعمال ہو سکتے ہیں مگر یاد رہے کہ پہلے طریقہ میں خاص خوبی یہ ہے کہ اس کی مدد سے چند فوری مسائل جو تروں کی سطوح سے متعلق ہیں آسانی حاصل ہوتے ہیں لیکن دوسرے طریقوں سے ان کا حاصل کرنا مقابلہ دشوار ہے۔

دوسرا طریقہ نسبتی مساوات درجہ دوم پر موقوف ہے، اس کی مدد سے کسی نقطہ سے ایک مخروطی کے دو محاوروں کی مساوات آسانی حاصل ہوتی ہے تیسرا طریقہ گواہیت کے لحاظ سے باقی دو سے کم درجہ پر مبنی ہے ہم اسکے ذریعہ ہم وتر کی مساوات کو سادہ اور کارآمد صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ یہ کہنا بیجا نہ ہوگا کہ یہ تینوں طریقے یاد رکھنے چاہئیں اور اگر ایک دفعہ طالب علم ان پر حاوی ہو جائے تو مخروطیوں کا باقی علم ہندسہ اس کے لئے آسان ہو جائے گا۔

۴۱۔ اس امر کی شرط کہ خط $ل + م + ن = ۱$ ایک مخروطی کو مس کرے۔

یہ شرط معادہ کرنے کے کئی طریقے ہیں جیسا دفعہ ۶ میں اوپر بیان ہو چکا ہے ماکو ساقط کرنے کے بعد ہم اس امر کی شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ اگر مساوات درجہ دوم کی اصلیں مساوی ہیں، سادہ صورتوں کے لئے یہی طریقہ مناسب ہے کیونکہ یہ ابتدائی اصولوں پر مبنی ہے لیکن بعض اوقات ذیل کا طریقہ بھی - وہ مندرجہ ثابت ہوتا ہے۔

فرض کر دو کہ مخروطی $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ ہے اور $ل + م + ن = ۱$ ۔

اس کو نقطہ $لا + ما$ پر مس کرتا ہے۔

چونکہ $(لا + ما)$ پر کا حماس $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ ہے اس لئے یہ

خط اور مفروضہ خط $ل + م + ن = ۱$ ایک ہی ہیں۔

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

جس سے لا = ۱، م = ۱، ما = ۱۔

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

لیکن لا + م = ۱، مطلوبہ شرط ہے

اسی طرح سے مخروطی لا = ۱، م = ۱ کی صورت میں شرط

مطلوبہ ہوگی لا + م = ۱

۱۴۲۔ مکافی ما = ۳ لا کی صورت میں (لا، ما) پر کا ماس ہے

$$ما = ۲ (لا + لا)$$

اور اگر یہ مساوات اور لا + م = ۱ ایک ہی خط کو تعبیر کریں تو

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

لیکن ما = ۳ لا = ۱

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

۱۴۳۔ اس امر کی شرط کہ خط مستقیم مخروطی کو مس کرتا ہے۔
متنب دل طریقہ۔

ایک خاص صورت میں یہی شرط معلوم کرنے کا ایک اور طریقہ ہم جگہ
مندرج کرینگے، یعنی ہم یہ معلوم کریں گے کہ کس شرط کے تحت خط
لاجم عہ + مابج عہ = ناقص لا + ما = ۱ کو مس کرتا ہے

نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوط کی مساوات یہ ہے

$$\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} - \left(\frac{لاجم + ما جب}{ع} \right) = ۰$$

$$یا لا \left(\frac{لا}{ب} - \frac{جم}{ع} \right) - ۲ لا ما جب جم + \frac{ما}{ب} \left(\frac{لا}{ب} - \frac{جم}{ع} \right) = ۰$$

اگر خط مستقیم ناقص کو مس کرے تو یہ دونوں خط ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے

$$یعنی \frac{لاجم جم}{ع} - \left(\frac{لا}{ب} - \frac{جم}{ع} \right) \left(\frac{لا}{ب} - \frac{جم}{ع} \right) = ۰$$

جس سے اختصار کے بعد

$$ع = ۲ لاجم جم + ب لا جب جم \dots (۱۵)$$

پس جس خط کی مساوات

$$\frac{لاجم جم}{ع} + ما جب جم = \pm \frac{لاجم جم}{ع} + ب لا جب جم$$

$$ہے وہ ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$ کو مس کرتا ہے۔$$

مشقیں

۴۱۔ اگر لا + ما = ج ناقص ۲ لا + ۳ ما = ۳ کو مس کرے تو
(۱) طریقہ دفعہ ۱۳۱ نیز (۲) طریقہ دفعہ ۱۳۳ سے ج کی قیمت معلوم کرو۔
۴۲۔ دفعہ ۱۳۳ کی طرح ثابت کرو کہ

$$\frac{لاجم جم}{ع} + ما جب جم = \pm \frac{لاجم جم}{ع} + ب لا جب جم$$

$$نہایت $\frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب} = ۱$ کا محاس ہے۔$$

$$۴۳۔ اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ خط $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$$$

ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کو مس کرے۔

۴۴۔ ناقص $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۱} = ۱$ کے اُن مساوات کی مساواتیں دریافت کر دینے محور ماس کے ساتھ ۳۰ کا زاویہ بنائیں۔

۴۵۔ مبدأ سے منحنی $ب' لا' + لا' ما' = لا' ب' ا'$ کے اُس ماس کا فاصلہ معلوم کر دو محور ماس کے ساتھ ۶۰ کا زاویہ بنائے۔

۴۶۔ ثابت کرو کہ اگر $ل + م + ن = ۱$ ۔ مخروطی $لا' + ۲ا' ھ + لا + ب' ما' + ۲گ لا + ۲ف + ج = ۰$ کو مس کرے تو اس کے لئے یہ شرط پوری ہونی چاہئے

$ل (بج - ف) + م (ج - ا - گ) + ن (اب - ھ) + ۲م ن (گ - ھ - اف)$

$+ ۲ن ل (ھف - بگ) + ۲ل م (فگ - جھ) = ۰$

۴۴۔ مخروطی کے دو علی القوائم ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریقہ لہذا ارد ہوگا اگر یہ مخروطی مرکز دار حراشس ہو اور خط مستقیم یہ ہوگا اگر یہ مکانی ہو۔

اس مسئلہ کو حل کرنے کے لئے ہم $(لا، ما)$ سے مخروطی کے دو ماسوں کی مساوات حاصل کرتے ہیں اور پھر اس امر کی شرط معلوم کرتے ہیں کہ یہ خطوں کا جوڑا علی القوائم ہے اس طرح سے ہمیں $لا، ما$ میں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جو مطلوبہ طریق کو تعبیر کرتی ہے۔

مثلاً ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کی صورت میں $(لا، ما)$ سے منحنی

کے مساوات ذیل کی مساوات سے تعبیر ہوتے ہیں

$$\left(\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - ۱ \right) = \left(۱ - \frac{لا}{۲} - \frac{ما}{۱} \right) \left(۱ - \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} \right)$$

اور اگر یہ خط علی القوائم ہوں تو $لا$ اور $ما$ کے سروں کا مجموعہ صفر ہوگا

(نعتہ اول دفعہ ۲۹) یعنی

$$-\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b} - \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b} + \left(1 - \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b} + \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b}\right) \frac{1}{\frac{1}{2}b} - \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b} = 0$$

یا مختصر کرنے پر

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b} + \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b} = \frac{1}{\frac{1}{2}b} + \frac{1}{\frac{1}{2}b}$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b$$

اس لئے مطلوبہ طریق دائرہ ہے۔

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b \dots\dots\dots (۱۷)$$

جو ناقص کے ساتھ ہم مرکز ہے اور جس کے نصف قطر کا مربع اضلاع محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اس دائرہ کو ناقص کا مرتبہ دائرہ کہتے ہیں

$$\text{اسی طرح زاویہ } \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \text{ کیلئے یہ طریق دائرہ ہے جس کی مساوات ہے}$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b \dots\dots\dots (۱۸)$$

مکانی کی صورت میں اگر مساوات $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$ لائی جائے تو $(\frac{1}{2}a)$ سے منحنی کے مساوی کی مساوات ہوگی

$$\{ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \} = \{ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \} \dots\dots\dots (۱۹)$$

اس میں $\frac{1}{2}a$ اور $\frac{1}{2}b$ کے سر میں بالترتیب $\frac{1}{2}a$ اور $\frac{1}{2}b$ - $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ اور $\frac{1}{2}b$

اس لئے مطلوبہ طریق ہے $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \dots\dots\dots (۲۰)$$

ظاہر ہے کہ یہ منحنی کے مرتب کی مساوات ہے (دفعہ ۱۸) بالکل یہی عمل تمام مساواتوں کے لئے استعمال ہو سکتا ہے۔

۵۔ دفعہ آخر کے مسئلہ کو حل کرنے کے کئی اور کارآمد طریقے ہیں۔

مثلاً ناقص کی صورت میں ہم نے دیکھا ہے (دفعہ ۶۸) کہ خط
 $ما = م لا \pm ما ب + م^۲$ کی تمام قیمتوں کے لئے ناقص کو مس
 کرتا ہے۔

اگر ماس (لا، ما) میں سے گزرے تو

$$ما - م لا = ما ب + م^۲$$

$$یا (ما - م لا) = ما ب + م^۲$$

$$یا م^۲ (لا - م) = م لا + ما ب + ما^۲ = ۰$$

م میں یہ مساوات درجہ دوم ہے اس لئے اس سے لا، ما میں سے
 گزرنے والے دو ماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں۔ اگر یہ ماس علی التواضع
 ہوں تو اسلوں م، م کا حاصل ضرب = -۱

$$\therefore \frac{ما - م^۲}{لا - م} = -۱$$

جس سے حسب سابق لا + ما = م + م^۲

طالب علم اس طرح کے نتائج مساوات ما = م لا + م^۲ سے نکالنے کے لئے

اور مساوات ما = م لا + م^۲ ما ب - م^۲ سے زائد کے لئے حاصل کرے۔
 ۱۴۶۔ متبادل طریقہ ناقص اور زائد کی صورت میں۔

لاجم (ع) + ما جب (ع) = ما لا جم (ع) + ما جب (ع)

ع کی تمام قیمتوں کے لئے $\frac{لا}{ما} + \frac{ما}{لا} = ۱$ کو مس کرتا ہے۔

جو ماس اس پر عموماً ہے اس کی مساوات ہوگی

$$لاجم (ع) + ما جب (ع) = ما لا جم (ع) + ما جب (ع)$$

کیونکہ اگر مبدأ سے اس پر عمود نکالا جائے تو وہ محوروں سے زاویہ (۹۰° + عم) بنائے گا۔

پس مذکورہ بالا مساوات ہے۔ لاجب $\text{عم} = \text{ما}$ لاجب $\text{عم} + \text{ب} = \text{جم}$ عم نقطہ تقاطع کا طریق عم کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا، ہر مساوات کا مربع اٹھانے اور جمع کرنے سے حسب سابق $\text{لا} + \text{ما} = \text{لا} + \text{ب}$ ب

۱۲۷۔ ظاہر ہے کہ جن سوالات میں ماسوں کی سمتوں سے بحف ہوائ میں اس طرح کی ماسی مساواتوں کو استعمال کرنا زیادہ سودمند ہوگا مثلاً

$$1 = \text{م} + \text{لا} + \text{ما} + \text{م} + \text{ب}$$

$$\text{ما} = \text{م} + \text{لا} + \frac{\text{لا}}{\text{م}}$$

طالب علم دیکھے کہ کس سہولت کسے ہم نے اوپر اس قسم کی مساواتوں کو علی القواکم ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنے میں استعمال کیا ہے تمام صورتوں میں ہم (لا، ما) کو ایک ایسا نقطہ خیال کر سکتے ہیں جس سے منحنی کے ماس پھینچے گئے ہیں اور مساوات ایک ایسی مساوات درجہ دوم متصور ہو سکتی ہے جس سے ماسوں کے "م" حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{مثال کے طور پر فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) سے جو ناقص} \quad 1 = \frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}$$

کے ماس پھینچے جا سکتے ہیں ہیں ان کا درمیانی زاویہ مطلوب ہے۔

$$\text{ہم جانتے ہیں کہ مسطہ} = \frac{\text{م} - \text{لا}}{\text{م} + \text{لا}}$$

جہاں م مساوات ذیل کی اصلیں ہیں

$$(\text{م} - \text{لا}) = \text{لا} + \text{ما} + \text{م} + \text{ب}$$

$$\text{یا} \quad \text{م}^2 (\text{لا} - \text{لا}) + \text{م}^2 \text{لا} + \text{م}^2 \text{ما} + \text{م}^2 \text{ب} = \text{لا}^2$$

$$\therefore \text{م} + \text{م} = \frac{\text{لا}^2 - \text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}} \quad \text{م} = \frac{\text{ب} - \text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}}$$

حاصل ہوگی جس کو تمام عمودوں کے پائے پورا کرینگے اور یہی طریق مطلوب ہے
دونوں مساواتوں کا مربع اٹھانے اور ان کو جمع کرنے سے

$$(لا + ما) (ما + ۱) = ب^۲ + م^۲ + لا^۲$$

$$= لا^۲ (ما + ۱) چونکہ ب = لا (۱ - لا)$$

$$\therefore لا + ما = لا^۲ \dots\dots\dots (۲۰)$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

تعریف۔ جو دائرہ محور اعظم کے قطر پر بنایا جائے اسے امدومی دائرہ کہتے ہیں
اسی طرح سے ہم دیکھتے ہیں کہ دوسرے ماسک (لا، ۰) سے اگر ماسوں
پر عمود کھینچے جائیں تو انکے پائے بھی اسی دائرہ پر واقع ہونگے اور یہ ظاہر ہے
کیونکہ علی بالائیں صرف عمود کی مساوات ہمیں بدلتی پڑیگی م + لا = ۰ اور
اور مربع اٹھانے پر یہ اختلاف بھی جاتا رہیگا۔

مشق

۴۷۔ اسی طریقہ سے لاند کی صورت میں ثابت کرو کہ یہ طریق لا + ما = لا ہے
یعنی ایک ایسا دائرہ ہے جو قاطع محور کے قطر پر بنایا جائے۔

۴۹۔ مکانی کی صورت میں ثابت کرو کہ اگر ماسیکہ سے کسی ماس پر عمود
نکالا جائے تو اس کے پائے کا طریق رأس پر کا ماس ہے۔

فرض کرو کہ مکانی ما = ۴ والا ہے اور ماسک (لا، ۰)

مکانی کے کسی ماس کی مساوات ہے

$$ما = لا + \frac{۱}{م}$$

نقطہ (لا، ۰) سے اس پر کے عمود کی مساوات ہے

$$(لا - ۱) + م = ۰$$

مطلوبہ طریق حاصل کرنے کے لئے ان دو مساواتوں سے م کو ساقط کرنا چاہیئے

پہلی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے $m - a = u = m' - a'$
 اور دوسری اس طرح $m - a = u = m' - a'$
 اسلئے $m - a = m' - a'$ اسلئے طریق مطلوب $a = a'$ ہے
 ۱۵۰۔ اگر ناقص کے ماسوں سے کسی ماس پر عمود نکالے جائیں تو ان کا
 حاصل ضرب نصف عمود اصغر کے مربع کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ناقص $\frac{a^2}{b} + \frac{a'^2}{b'} = 1$ ہے اور ماسکے (۱۵۰) اور
 (-۱۵۰) ہیں۔

اب ناقص کا کوئی ماس a لا جم $a' + b = c$ سے تعبیر ہوتا ہے جہاں

$$c = m - a' + b' + a'$$

ماسوں (-۱۵۰) اور (۱۵۰) سے اس ماس پر عمود ہیں بالترتیب

$$-a' + b' + a' = c \quad \text{اور} \quad a' + b' - a' = c$$

ان کا حاصل ضرب $c = c' - a' + b' + a'$

$$= a' + b' + a' - a' = b' + a'$$

$$= a' + b' + a' - a' = b' + a'$$

$$b' = a' - 1$$

اس لئے حاصل ضرب $b' = a' - 1$ (جم $a' + b'$)

$$b' =$$

مشقیں

۴۸۔ اسی طریقہ سے مسئلہ دفعہ ۱۵۰ کو زائد $\frac{a^2}{b} - \frac{a'^2}{b'} = 1$ کی صورت
 میں حاصل کرو۔

ناقص کے لئے مسئلہ دفعہ ۱۵۰ کو اُس صورت میں ثابت کرو جبکہ ماس کی
 مساوات $m - a + m' - a' + b' + a' = 1$ لی جائے۔

باب دوازدہم پر متفرق مشقیں

۴۹۔ اس کی شرط معلوم کرو کہ خط ل لا + م = م = ع مخروطی $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ لا} + \text{ب لا}$ کو مس کرے۔

۵۰۔ نقطہ (۱، ۱) میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محور لا کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{4}$ بناتا ہے، نقطہ (۱، ۱) سے اُن نقاط کے خالصے معلوم کرو جہاں یہ

$$(۱) \text{ ناقص } \frac{1}{2} \text{ لا} + \frac{1}{2} \text{ م} = ۱$$

$$(۲) \text{ قائم قطع زائد لا م} = ۲$$

$$(۳) \text{ مکانی م} = ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ م} + ۱$$

سے ملتا ہے۔

۵۱۔ نقطہ و (لا، م) میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محور لا سے زاویہ

طہ بناتا ہے، اگر یہ ناقص $\frac{1}{2} \text{ لا} + \frac{1}{2} \text{ م} = ۱$ سے ن اور ق پر ملے تو

$$\text{ثابت کرو کہ } \text{ون} \times \text{وق} = \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{\text{لا}}{\text{م}} + \frac{1}{2} \frac{\text{م}}{\text{لا}}}{\frac{\text{جم طہ}}{\frac{\text{ب طہ}}{۲} + \frac{۲}{۲}} - \frac{\text{ون} + \text{وق}}{\frac{\text{جم طہ}}{\frac{\text{ب طہ}}{۲} + \frac{۲}{۲}}}$$

$$\frac{(\frac{\text{لا جم طہ}}{۲} + \frac{\text{اجب طہ}}{۲})^2}{\frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲}} = \frac{۱}{\text{وق}} + \frac{۱}{\text{ون}}$$

۵۲۔ ثابت کرو کہ اُن دو خطوط مستقیم کے جوڑے کی مساوات جو محور لا کو خط مستقیم

لا-ج + لہ = م = . اور $\frac{۲}{۲} \text{ لا} + \frac{۲}{۲} \text{ م} - \frac{۲}{۲} = .$ کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں

$$\text{لا} (\frac{۲}{۲} - \frac{۱}{۲}) - (\frac{۲}{۲} \text{ لہ} + \frac{۲}{۲} \text{ م}) = .$$

۵۳۔ دائرہ لا^۱ + ما^۲ = لا^۲ کے نقطہ { (۱ + جم طہ) ، واجب طہ } پر جو حماس کھینچ سکتا ہے اس کی مساوات دریافت کرو۔

۵۴۔ اگر مکافی ما^۲ = ن لا کے نقاط (لا^۱ ، لم^۱) ، (لا^۲ ، لم^۲) سے حماس کھینچے جائیں تو ان کے نقطہ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

۵۵۔ نقطہ و (لا^۱ ، لم^۱) میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو ولا سے زاویہ طہ بناتا ہے ، اگر یہ عام مخروطی سے ن اور ق پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۱ + جم طہ + ۲ + ھ جب طہ جم طہ + ب جب طہ} = \frac{۱}{۱ + لا طہ + ۲ + ھ لا طہ + ب ما طہ + ۲ + گ لا طہ + ۲ + ن ما طہ + ج}$$

اس سے ثابت کرو کہ اگر د میں سے دو علی القیوم خط و ن ق اور درس کھینچے جائیں تو

$$\frac{۱}{۱ + جم طہ + ۲ + ھ جب طہ جم طہ + ب جب طہ} + \frac{۱}{۱ + لا طہ + ۲ + ھ لا طہ + ب ما طہ + ۲ + گ لا طہ + ۲ + ن ما طہ + ج}$$

صرف نقطہ و کے مقام پر موقوف ہے اور عمودی وتروں کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

۵۶۔ معلوم کرو کہ مکافی ما^۲ = م لا کا کونسا نقطہ خط ما = لا + ۲ کے قریب ترین ہے ، یہ کم سے کم فاصلہ معلوم کرو۔

۵۷۔ اگر مکافی کے دو حماس محور سے زاویے طہ اور طہ بنائیں تو ان کے تقاطع کا طریق معلوم کرو جبکہ مم طہ - مم طہ = ن

۵۸۔ مخروطی ۲ لا^۲ + ما^۲ + ۳ لا + ۵ + ۶۳ + ۱۲۶ = ۰ کے اس وتر کا طول اور میلان (محور کے ساتھ) معلوم کرو جس کی نصفیت نقطہ (۱ ، ۳) پر ہوتی ہے

۵۹۔ ثابت کرو کہ نقطہ (لا^۱ ، لم^۱) سے مخروطی لا^۲ + ۲ ھ لا + ما + ب ما + ۲ + گ لا + ۲ + ن ما + ج = ۰ کے حماس خطوط ذیل کے جوڑے کے متوازی ہیں

ایک مشترک اصل رکھتی ہیں۔
یہ حاصل کر دے کہ مشترک نقاط اور (لا، با) کے ملانے والے خطوط
کی سادات ہے

(اولاً ۲ ھ لا ما + ب ما ۲ + گ لا ۲ ف ما + ج) (ف لا ق ما + ر)

- ۲ (ف لا ق ما + ر) {لا (لا + ب ما + گ) + ما (ھ لا + ب ما + ف)}

+ گ لا + ف ما + ج {ف لا ق ما + ر}

+ {اولاً ۲ ھ لا ما + ب ما ۲ + گ لا ۲ ف ما + ج} {ف لا ق ما + ر}۔

دفعہ ۳۸ حصہ اول کی مد سے اس نتیجہ کی اس صورت میں تصدیق کرو جبکہ (لا، با)
مبدأ ہو۔



جس سے معلوم ہوتا ہے کہ مطلوبہ طریق کی مساوات ہے

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ م} + 3 \text{ گ} + 4 \text{ ب} + 5 \text{ ف} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

۱۵۲۔ متوازی وتروں کے نقاط نصف کے طریق معلوم کرنے کا وہ سہل طریقہ۔

باب با قبل کے پہلے طریقہ کو ہم اس جگہ استعمال کریں گے

فرض کرو کہ متوازی وتر محور لا سے فادیہ ط بنائے ہیں اور $1 \text{ م} = 1 \text{ لا}$ کے متوازی ہیں یعنی $1 \text{ م} = 1 \text{ مس ط}$ نیز فرض کرو کہ ان میں سے ایک وتر کا نقطہ نصف (لا، م) ہے تب (لا، م) سے ان نقاط کے فاصلے جہاں یہ وتر محوری سے ملتا ہے ذیل کی مساوات درجہ دوم سے حاصل ہوتے ہیں

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ م} + 3 \text{ گ} + 4 \text{ ب} + 5 \text{ ف} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$2 \text{ لا} + 3 \text{ م} + 4 \text{ گ} + 5 \text{ ب} + 6 \text{ ف} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$3 \text{ لا} + 4 \text{ م} + 5 \text{ گ} + 6 \text{ ب} + 7 \text{ ف} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

چونکہ وتر کی نصفیت (لا، م) پر ہوتی ہے اس لئے یہ فاصلے مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہیں یعنی ان کا مجموعہ صفر ہے۔

اس کے لئے یہ شرط ہے کہ $1 \text{ م} = 1 \text{ لا}$ کا سراپہ کی مساوات میں صفر ہو یعنی

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ م} + 3 \text{ گ} + 4 \text{ ب} + 5 \text{ ف} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

اس لئے چونکہ $1 \text{ م} = 1 \text{ لا}$

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ م} + 3 \text{ گ} + 4 \text{ ب} + 5 \text{ ف} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

یعنی (لا، م) کا طریق ایک خط مستقیم ہے جسکی مساوات ہے

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ م} + 3 \text{ گ} + 4 \text{ ب} + 5 \text{ ف} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

نتیجہ صریح۔ $1 \text{ م} = 1 \text{ لا}$ کی تمام قیمتوں کے لئے یہ خط خطوط

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ م} + 3 \text{ گ} + 4 \text{ ب} + 5 \text{ ف} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

اب ہم جانتے ہیں کہ مرکز دار تراش کی صورت میں یہ خط مرکز میں سے گزرتے ہیں کیونکہ مرکز ان دونوں خطوں پر واقع ہے پس معلوم ہوا کہ مرکز دار محوری میں متوازی وتروں کے نقاط نصف کا طریق ہمیشہ معنی کا قطر ہوتا ہے [دیکھو صفحہ ۹۶]

اگر مخروطی قطع مکانی ہو تو خط
 لا + جھ ما + گ = ۰ اور جھ لا + ب ما + ف = ۰
 باہم متوازی ہیں پس م کی مختلف قیمتوں کے لئے طریق متوازی
 خطوط مستقیم سے تعبیر ہوتے ہیں۔

مکانی ما - م لا = ۰ اور ناقص $\frac{لا}{لا} + \frac{ب}{ب} = ۱$
 کی صورت میں اس جگہ ہم اوپر کی تحقیق کا جداگانہ اضافہ کرینگے۔
 (۱) مکانی ما = م لا کے لئے ر مساوات درجہ دوم ہوگی

(لا + ر جب ط) = م لا (لا + ر جم ط)
 یا ر جب ط + م ر (باجب ط - ر جم ط) + م - م لا = ۰
 اگر (لا، ب) وتر کا نقطہ تنصیف ہو تو اہل سادی اور مختلف علامات ہونگی
 یعنی باجب ط - م ر جم ط = ۰

∴ م = م ر جم ط
 اسلئے اگر مکانی کے متوازی وتروں کا نظام ایسا ہو کہ اس کے وتر محور سے
 نزاد یہ ط بنائیں تو انکے نقاط تنصیف کا طریق ما = م ر جم ط ہوگا۔
 (۲) ناقص $\frac{لا}{لا} + \frac{ب}{ب} = ۱$ کے لئے ر مساوات ہوگی

$$۱ = \frac{(لا + ر جم ط)}{لا} + \frac{(ب + ر جب ط)}{ب}$$

یا ر (جم ط + جب ط) + م ر (لا جم ط + باجب ط) + م - م لا = ۰
 اگر (لا، ب) وتر کا نقطہ تنصیف ہو تو ر کا سرلازما مضرب ہوگا یعنی

$$\frac{لا جم ط}{لا} + \frac{باجب ط}{ب} = ۰$$

اسلئے ایسے وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو محور اعظم سے نزاد یہ ط بنائیں
 خط $\frac{لا جم ط}{لا} + \frac{باجب ط}{ب} = ۰$ ہے

اگر وتر $ما = م$ لا کے متواری ہوں تو مس ط = م

اور طریق مطلوب ہوگا $ما = م - \frac{ب}{ا} جم ط$ لا یعنی $ما = م - \frac{ب}{ا} جم ط$

۱۵۲۔ مخروطی کا صرف ایک ہی وتر ایسا ہو سکتا ہے جسکی نصف ایک نقطہ معلوم پر ہوتی ہے
فرض کرو کہ (لا، با) میں سے گزرنیوالے وتر کی مسادات ہے

$$\frac{لا - لا}{جم ط} = \frac{ما - با}{جم ط}$$

اگر ایسی نصف (لا، با) پر ہوتی ہو تو

$$مس ط = م - \frac{ا + لا + م + با + گ}{م + لا + ب + با + ت} \quad [دفعہ ۱۵۱]$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط کی صرف ایک ہی سمت ہو سکتی ہے یعنی ایسا
وتر صرف ایک ہی ہے اور اسکی مسادات ہے $ما - با = (لا - لا) مس ط$
جہاں مس ط کی قیمت اوپر مندرج ہے پس اس وتر کی مسادات ہوگی

$(لا - لا) (ا + لا + م + با + گ) + (ما - با) (م + لا + ب + با + ت) = ۰$ (۲)
وتر کی مسادات کی یہ شکل بعض اوقات بہت کارآمد ہوتی ہے۔

ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{با} = ۱$ کی صورت میں ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مسادات

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{با} = \frac{ما}{ب} + \frac{لا}{ا}$$

ہے اور مکانی $ما = م$ لا کی صورت میں

$$ما - با = م - با = ا - لا$$

اس مسادات کو کہنے کا عام طریقہ یہ ہے دو دائیں رکن کو اسطرح لکھ جاؤ گویا
ماس کی مسادات لکھ رہے ہو اور بائیں جانب کی رقم مطلق کو اس طرح منتخب
کرو کہ اس مسادات سے تعبیر ہونیوالا خط مستقیم (لا، با) میں سے
گزرے۔

اس کے استعمال کی توضیح کے لئے دیکھو مثال صفحہ ۲۵۱

مشقیں

۱۔ ابتدائی اصولوں کی بناء پر ہر دو قاعدوں (دفعات ۱۵۱، ۱۵۲) سے لا + لا + ما + لا + لا = کے اُن وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق دریافت کرو جو (۱) ما = لا (۲) ما = لا کے متوازی ہوں۔

۲۔ ثابت کرو کہ مکانی ما = م لا لا میں اُن وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو ما = م لا کے متوازی ہوں خط مستقیم ما = م لا ہے۔

۳۔ زائد لا = م لا - م لا = ا کی صورت میں دونوں قاعدوں سے ثابت کرو کہ مطلوبہ طریق خط مستقیم ما = م لا ہے۔

۴۔ عام صورت میں ثابت کرو کہ اُن تمام وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو ثابت نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں ذیل کی مخروطی تراش ہے
لا + لا + م لا + م لا + ب ما + لا (گ - لا - م لا) =

+ (ما - ف - م لا - ب ما) - (لا - گ - ب ف) =

[اشارہ۔ اسکے لئے شرط لکھو کہ وہ وتر جسکی تنصیف لا، ما پر ہوتی ہے (لا، ما) میں سے گزرتا ہے]

۱۵۴۔ ادپر ہم نے اجمالی طور پر اُن طریقوں کو بیان کیا جو عام مساوات کی صورت میں استعمال ہو سکتے ہیں، اب ہم بالخصوص ناقص، زائد اور مکانی کی صورت میں متوازی وتروں کے نظاموں کی خاصیتوں پر بالتفصیل بحث کریں گے۔

اگرچہ زائد اور ناقص کی خاصیتوں میں بالعموم خاص مشابہت پائی جاتی ہے تاہم یاد رہے کہ ان میں ضروری فرق بھی موجود ہیں مثلاً ہم جانتے ہیں کہ انکی مساویں بلحاظ اصلی محوروں کے بہت مشابہ ہیں مگر اُن مساواتوں سے جو منعینات کی

شکلیں حاصل ہوتی ہیں وہ ایک دوسرے سے کہیں مختلف ہیں، نیز یہ ضروری فرق اگلے چند صفحات میں اکثر زیر بحث رہے گا کہ زائد کا ایک محوثنی سے حقیقی نقاط پر نہیں ملتا۔

اس کتاب میں جہاں تک مکانی کی خاصیتوں پر بحث ہوگی وہ مرکز دار تراشوں کی خاصیتوں سے بالکل جداگانہ ہیں۔

۱۵۵۔ اگر مرکز دار مخروطی تراشوں کے دو قطروں میں سے ایک قطر دوسرے قطر

کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو دوسرا قطر پہلے کے متوازی وتروں کی تنصیف کریگا۔

مرکز کو متبداً مانو، اس طرح مخروطی کی مسادات اس شکل کی ہوگی

$$r = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

فرض کر دو کہ $ما = م لا$ اور $ما = م لا$ دو قطر ہیں۔

فرض کرو کہ (لا، با) (لا، با) ایسے وتر کے سرے ہیں جو مادم لاکے متوازی ہے، جیسا ہم نے دفعہ ۱۵۱ میں دیکھا اس وتر کی مساوات ہوگی

$$\frac{(1-b)(1-b)}{1-b} + \frac{(1-b)(1-b)}{1-b} + \frac{(1-b)(1-b)}{1-b} + \frac{(1-b)(1-b)}{1-b} =$$

چونکہ یہ $m = \lambda$ کے متوازی ہے اس لئے

$$m = \frac{50}{66}$$

$$م = \frac{ا(ا+ب) + ب(ب+ا)}{ا(ا+ب) + ب(ب+ا)}$$

پس اگر (لا'ا) دتر کا نقطہ نصف ہو تو یہ مساوات ہوگی

$$r = \frac{b r \times \infty + 11 r \times 1}{b r \times \infty + 11 r \times \infty}$$

پس $m = \lambda$ کے متوازی وتروں کے تقاطع تنصیف کا طریق ہے

لا + مع + م (علا + ب + ا) = يا لا (ل + مع + م) + ا (ع + ب + م) =

حسب مفروض ہے $m = 1$ $\therefore m = 1$ $\frac{m+1}{m+2} = 1$

شرط (۴) یاد رکھنی چاہیے۔

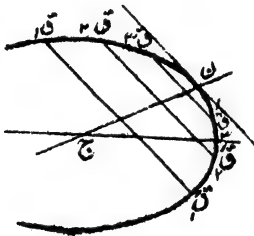
نوٹ اس قطر کی مساوات جو $ما = م لا$ کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے عام نتیجہ میں $گ = ف = .$ اور $ج = ا$ ۔

رکھنے سے حاصل ہو سکتی تھی، لیکن یہاں اسے دوبارہ معلوم کر لینا مناسب ہے، اس طرح ہر صرف وتر کی مساوات کا ہی یاد رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

۱۵۶۔ مزدوج قطر۔ تعریف۔ اگر دو قطر ایسے ہوں کہ ان میں سے کوئی سا ایک قطر دوسرے کے تمام متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو انہیں مزدوج قطر کہتے ہیں۔

مزدوج قطروں کی نہایت سادہ صورت دائرہ کے دو علی القیام قطر ہیں ان میں سے ہر ایک قطر دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

۱۵۷۔ کسی قطر کے سروں پر کے ماس اسکے مزدوج کے متوازی ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ $ق ق$ ، $ق ق$ ، $ق ق$ متوازی وتروں کا ایک نظام ہے اور



شکل ۵۸

قطر $ج$ ان کی تنصیف کرتا ہے، یہیں ثابت کرنا ہے کہ $ن$ پر کا ماس ہر ایک وتر کے متوازی ہے۔

اب نقاط $ق$ اور $ق$ اور $ق$ اور $ق$ اور $ق$ اور $ق$ کی متقابل جانبوں

میں واقع ہیں، نیز ہم جانتے ہیں کہ جب ایک وتر کے سرے ایک دوسرے کے لانتہا قریب ہوں تو اُس وقت وہ ماس بن جاتا ہے پس چونکہ وتر کے سرے ہمیشہ $ج$ کی متقابل جانبوں میں واقع ہونگے اس لئے معلوم ہوا کہ اگر وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوں تو انہیں نقطہ $ن$ پر منطبق ہونا چاہئے، اس لئے $ن$ پر کا ماس ایک دتر کا انتہائی مقام ہے اس لئے یہ $ق ق$ وغیرہ کے متوازی ہے۔

مشقیں

۵۔ ناقص $\frac{لا}{لا} + \frac{لا}{لا} = ا$ کے اس وتر کی مساوات جتنی تنصیف (لا) $ا$ پر ہوتی ہے

$$\frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} = \frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} -$$

۷۔ ابتدائی اصولوں سے حسب دفعہ ۵۵ ثابت کرو کہ اگر $ما = م$ لا ناقص

$$\frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ کے ان سب وتروں کی تنصیف کرے جو } ما = م \text{ لا}$$

کے متوازی ہوں تو $م = م$ - $\frac{ما}{ب}$

$$۸۔ زائد $\frac{لا}{را} - \frac{ما}{ب} = ۱$ کی صورت میں اس طرح ثابت کرو کہ یہ شرط ہونی چاہیے$$

$$م = م - \frac{ما}{ب}$$

۸۔ تجلیلی طریقہ سے دفعہ ۵۷ کے مسئلہ کو ثابت کرو۔

[فرض کرو کہ مخروطی $لا + ۲$ لا $ما + ب = ما$ ہے (لا $ما$) پر کلام ہے

$$لا (لا + ۲) + ما (ما + ب) = ۱$$

$$ما = م لا \text{ کے متوازی ہوگا اگر } (لا + ۲) + ما (ما + ب) = م (ما + ب) = ۰$$

یعنی اگر (لا $ما$) مزدوج وتر پر واقع ہو

۹۔ اگر $ما = م لا$ اور $ما = م لا$ مخروطی $لا + ۲$ لا $ما + ب = ۱$ کے مزدوج قطر ہوں تو اس کے لئے کیا شرط ہونی چاہئے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ $لا + ۲$ لا $ما + ب = ۱$ کے متقارب $لا + ۲$ لا $ما + ب = ۱$

کے مزدوج قطر ہونگے اگر $لا + ب + ۲ - م = ۰$

۱۱۔ ثابت کرو کہ اگر ناقص کی مساوات $لا + ۳ ما = م$ ہو تو قطر $ما = ۲ لا$ اور $لا + ۳ ما = ۱$ ایک دوسرے کے مزدوج ہیں۔

۱۲۔ مثال ۶ کے نتیجہ کو استعمال کرنے سے اس امر کی شرط معلوم کرو کہ خطوط

$$لا + ۲ لا + ما + ب = ۰ \text{ ناقص } \frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ کے مزدوج قطر ہوں}$$

۱۳۔ ثابت کرو کہ خطوط $لا + ۲ لا + ما + ب = ۰$ مخروطی $لا + ۲ لا + ما + ب = ۱$ کے مزدوج قطر ہوں گے اگر

$$لا + ب + ۲ - م = ۰$$

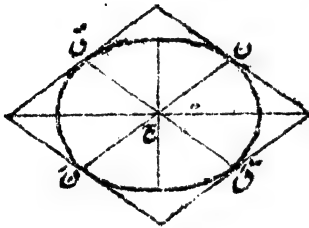
[دیکھو دفعہ ۱۵۵] اس نتیجہ کو یاد رکھنا چاہیے
۱۴۔ ثابت کرو کہ قائم قطع زائد کے مزدوج قطر کسی ایک شعاع سے مساوی زاوے بناتی ہیں

[زائد کی مساوات لا ما = ج فرض کرو]

۱۵۔ اگر دائرہ کو مرکز دار تراشیں خیال کیا جائے تو اس کے مزدوج قطر کیا ہونگے؟ اس دفعہ کے ضابطوں سے ثابت کرو کہ یہ علی التوائم ہیں۔

۱۵۸۔ ناقص کے مزدوج قطروں کی خاصیتیں۔

فرض کرو کہ ن ج ن اور ق ج ق ناقص $\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما} = ۱$ کے مزدوج قطر ہیں جہاں $\frac{لا}{لا}$ ناقص کے نصف محوریں اور ن کے عدد $\frac{لا}{لا}$ ہیں اور ق کے $\frac{لا}{لا}$ اس طرح نقطہ ن $\frac{لا}{لا}$ ہوگا اور ق $\frac{لا}{لا}$ ۔ خاصیتیں حسب ذیل ہیں



$$(۱) \frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما} = ۱ \dots\dots\dots (۵)$$

کیونکہ فرض کرو کہ ج ن کی مساوات ما = لا ہے اور ج ق کی ما = لا اب چونکہ یہ مزدوج قطر ہیں اسلئے ص ص = $\frac{لا}{لا}$

شکل ۵۹

$$\text{لیکن ص} = \frac{لا}{لا} \text{ اور ص} = \frac{ما}{ما} \text{ پس } \frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما} = ۱ \text{ یا } \frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما} = ۱$$

$$(۲) \frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ما} \pm \frac{لا}{لا} \text{ اور } \frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ما} \dots\dots\dots (۶)$$

جہاں دونوں بجلی یا دونوں ادبر کی علامتیں ایک ساتھ لینی چاہئیں۔

$$(۱) \text{ کی رو سے } \frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ما} - \frac{لا}{لا} \text{ اور تناسب کے خواص کی رو سے}$$

$$\text{ان میں سے ہر نسبت} = \frac{\sqrt{\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما}}}{\sqrt{\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما}}} = \frac{۱}{۱} = ۱ \pm$$

اس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے، مشتبہ علامت کے پیدا ہونے کا باعث یہ ہے کہ اگر ایک قطر کا سران متعین کر لیا جائے تو قی دوسرے قطر کا کوئی سا سران ہو سکتا ہے۔ شکل میں ادھر کی علامت قی سے متعلق پہلی قی سے۔

نتیجہ صحیح۔ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ (۳) دو مزدوج نیمہ قطروں کے مربعوں کا مجموعہ نصف محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ (۷)

کیونکہ ج ن = لا + با اور ج ق = لا + با
لیکن لا = با = با اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ (۷) کی رو سے
اس لئے

$$\begin{aligned} \text{ج ن} + \text{ج ق} &= \text{لا} + \text{با} + \text{لا} + \text{با} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \text{با} + \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \text{لا} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) (\text{لا} + \text{با}) \end{aligned}$$

∴ ج ن + ج ق = لا + با (۷)
(۴) ج ن اور ج ق کو متصل اضلاع مان کر جو متوازی الاضلاع بنایا جائے اس کا رقبہ = لا با (۸)

$$\begin{aligned} \text{متوازی الاضلاع} \triangle \text{ج ن ق} &= 2 \times \frac{1}{2} (\text{لا} - \text{با}) = \text{لا} - \text{با} \\ &= \frac{1}{2} \text{لا} + \frac{1}{2} \text{با} + \frac{1}{2} \text{با} + \frac{1}{2} \text{لا} \\ &= \text{لا} + \text{با} \end{aligned}$$

(۵) ج ق = س ن × س ن
ہم طرفین کو لا کی رقوم میں بیان کریں گے جو ن کا نصف ہے۔

$$ج ق = لا + با = \frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = لا = لا - (لا - \frac{لا}{ب}) + \frac{لا}{ب}$$

$$= لا - \frac{لا - با}{ب} = لا - \frac{لا}{ب} = لا - \frac{لا}{ب} \quad [دفعہ ۵۵]$$

$$نیز س ن \times س ن = (لا + لا) (لا - لا) = لا - لا = لا - لا \quad [دفعہ ۶۳]$$

$$\therefore ج د = س ن \times س ن = لا - لا = لا - لا \quad (۹)$$

(۶) اس میں دو کا طول جو مرکز سے ن پر کے ماس پہنچا جائے ہو تو ج ق = لب

$$ن (لا + لا) پر کا ماس = \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱ = ج$$

$$\therefore ع = \frac{۱}{\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب}}$$

$$ج د = لا + با = \frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = \frac{لا + با}{ب} = \frac{لا + با}{ب}$$

$$\text{اس لئے } ع \times ج ق = لب \quad (۱۰)$$

(۶) نتیجہ (۴) سے بھی ماہل ہو سکتا ہے کیونکہ ن اور ق پر کے ماسس ج ن اور ج ق کے ساتھ مل کر نتیجہ (۴) کا متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

۱۵۹۔ مساوی مزدوج قطر۔ اگر ناقص کے دو قطر مزدوج ہوں اور باہم مساوی بھی ہوں تو انہیں مساوی مزدوج قطر کہتے ہیں۔
طالب علم ان کی حسب ذیل خاصیتیں خود ماہل کرے۔

مشقیں

۶۔ اگر ناقص میں محوروں کے سروں پر ماس کیلئے جائیں تو ان سے ایک مستطیل بنتا ہے ثابت کرو کہ اس مستطیل کے قطر مساوی مزدوج قطر ہیں اور ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۷۔ اگر ج ن ج ق مساوی مزدوج قطر ہوں تو
 (۱) ج ن = ج ق = $\frac{1}{4}$ (۱ + ج) (۲) ج ن ج ق = $\frac{1}{4}$ (۱ + ج)
 ۱۸۔ ثابت کرو کہ دو مزدوج قطروں کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا اسوقت ہوگا
 جب وہ مساوی ہوں۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ نقطہ ن (۲۱) ناقص $۲ لا + ۳ ما = ۱۴$ پر واقع ہے
 (۱) ج ن کا طول (۲) مزدوج نیم قطر ج ق کا طول (۳) مرکز سے
 ن پر کے تماس پر جو عمود نکالا جائے اس کا طول معلوم کرو۔
 ن کے ماسکی فاصلے اور ج ن ج ق کا درمیانی زاویہ معلوم کرو
 اور اسطرح خواص ۳، ۴، ۵، ۶ دفعہ ۱۵۸ کی تصدیق کرو۔

۲۰۔ اس کی تصدیق کرو کہ نقطہ (۱۱) ناقص $لا + ما + ۳ = ۳$ پر
 واقع ہے اور ج ن کا جو مزدوج قطر ہے اس کے سروں کے محد معلوم کرو۔
 ۲۱۔ اگر عہ بہ دو مزدوج نیم قطر ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ ۳ ہو تو ثابت کرو کہ
 $عہ + بہ = لا + ج$ عہ بہ جب $۳ = لا + ج$

اسلئے اگر دو مزدوج قطر بلحاظ مقدار اور سمت کے معلوم ہوں تو نیم محوروں
 کے طول معلوم کرو۔

۲۲۔ اگر مشق ۲۱ میں عہ = ۲، بہ = ۱ اور $۳ = ۳$ تو لا ج کو
 اعداد یہ کے دو مقامات تک معلوم کرو۔

۲۳۔ اگر مساوی مزدوج نیم قطروں کا طول ۳ اور ان کا درمیانی زاویہ
 ۳ ہو تو نیم محوروں کو اعداد یہ کے دو مقامات تک معلوم کرو۔
 ۱۶۰۔ ناقص کی مسادات اُس صورت میں جبکہ دو مزدوج قطروں کو محور مانا جائے۔
 چونکہ مرکز مبداء ہے اسلئے مسادات اس شکل کی ہونگی (دفعہ ۴۹)

$$لا + ۲ صہ لا + ج = ۱$$

لیکن خط ما = ۰ ان سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو محور ما کے
 متوازی ہوں پس لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی
 اور مختلف علامت قیمتیں ہونگی (یعنی لا کو کوئی قیمت دینے سے

ما میں جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی اس میں $\frac{1}{2}$ کا سر صفر ہونا چاہیے (اس لئے
ص = ۰ پس مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$لا + ب = \frac{1}{2}$$

اگر قطروں کے طول ۲ و ۲ ب ہوں تو مساوات $لا + ب = \frac{1}{2}$ میں
ما = ۰ رکھنے سے لا کی قیمتیں لازماً $\pm \frac{1}{4}$ حاصل ہونی چاہئیں

$$\therefore لا = \frac{1}{4} \text{ یا } -\frac{1}{4} \text{ اس طرح ب = } \frac{1}{4} \text{ یا } -\frac{1}{4}$$

پس مساوات مطلوبہ ہے $\frac{لا}{۲} + \frac{ب}{۲} = \frac{1}{۲}$ (۱۱)

جو یقیناً اس شکل کی مساوات ہے جو اصلی محوروں کو حوالہ کے محور ماننے سے
حاصل ہوتی ہے، لیکن یاد رہے کہ موجودہ صورت میں محور مائل ہیں۔

نوٹ اس صورت میں بھی تماس کی مساوات اس قطر کی مساوات
جو $ما = م لا$ کے متوازی دتروں کی نصف کرے اور دو قطروں کے
باہم مزدوج ہونے کی شرط سب وہی ہوگی جو قائم خوردوں کی صورت میں۔

مشق

۲۲۔ ناقص کی مساوات بلحاظ اس کے مساوی مزدوج قطروں کے
 $لا + ما = ج$ ہوگی۔

۱۶۱۔ زائد کے مزدوج قطر۔ اگر زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک
منفی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہو تو دوسرا اسے خیالی نقاط پر ملیگا۔
فرض کرو کہ زائد کی مساوات ہے

$$\frac{لا}{۲} - \frac{ب}{۲} = ۱$$

تب $ما = م لا$ منفی سے حقیقی نقاط پر ملیگا اگر م تعداداً $\frac{1}{2}$ سے
کم ہو کیونکہ $ما = \frac{1}{2} لا$ منفی کا متقارب ہے اور کوئی خط جو متقارب
اور قاطع محور کے درمیانی زاویہ سے بڑا زاویہ قاطع محور کے ساتھ بنائے

منحنی سے نہیں مل سکتا (دفعہ ۷۶)
 اب $ما = م لا$ اور $ما = م لا$ کے مزدوج قطر ہونگے اگر

$$\frac{م}{لا} = \frac{ب}{را}$$

پس اگر $م$ $\left(\frac{م}{لا} \right)$ تو $م$ $\left(\frac{ب}{را} \right)$ اور اگر $م$ $\left(\frac{ب}{را} \right)$ تو $م$ $\left(\frac{م}{لا} \right)$

اس لئے ایک قطر منحنی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور دوسرا خیالی نقاط پر۔
 نوٹ: زائد کی صورت میں متوازی دتروں کا نظام ایسا ہو سکتا ہے کہ اس کے
 کسی دتر کے سر منحنی کی ایک ہی شاخ پر یا مختلف شاخوں پر واقع ہوں پہلی
 صورت میں صرف ایک دتر کو اس کے متوازی حرکت دینے سے ہم اسے منحنی کا ماس
 بنا سکتے ہیں اس لئے نقطہ تماس میں سے گذرنے والا مزدوج قطر منحنی سے
 حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور ان میں سے ایک نقطہ ایک شاخ پر واقع ہوتا ہے اور دوسرا
 دوسری شاخ پر لیکن اگر دتر کے سر مختلف شاخوں پر واقع ہوں تو دتر کا طول
 ہمیشہ لا انتہا کم نہیں ہو سکتا کیونکہ شاخیں کبھی ایک دوسرے کے لا انتہا قریب نہیں
 آ سکتیں اس لئے مزدوج قطر منحنی سے حقیقی نقاط پر نہیں ملتا۔

۱۶۲۔ ناقص کی صورت میں اگر ایک قطر دیا ہوا ہو تو اس کے مزدوج قطر کے
 سروں سے ہم نے وہ نقطے مراد لئے ہیں جہاں یہ منحنی سے ملتا ہے لیکن زائد کی
 صورت میں چونکہ دو مزدوج قطروں میں سے ایک قطر منحنی سے خیالی نقطوں پر
 ملتا ہے (دفعہ ۱۶۱) اس لئے اس کے سروں کی حسب بالا تعریف
 نہیں ہو سکتی پس اس جگہ ہمیں بالکل نئے تجلیات سے کام لینا ہو گا انہیں ہم
 اگلی دفعات میں بیان کریں گے۔

۱۶۳۔ مزدوج قطع زائد۔ تعریف۔ جس زائد کی مساوات

$$\frac{لا}{ب} - \frac{را}{ب} = ۱ \dots \dots (۱۲)$$

ہے اس کو زائد $\frac{لا}{ب} - \frac{را}{ب} = ۱$ کا مزدوج قطع زائد کہتے ہیں

۱۶۴۔ زائد اور اس کے مزدوج زائد کے خواص۔

(۱) دونوں نمنیات کے محور وہی ہوتے ہیں لیکن ایک کا قاطع محور دوسرے کا مزدوج محور ہوتا ہے اور برعکس اسکے۔

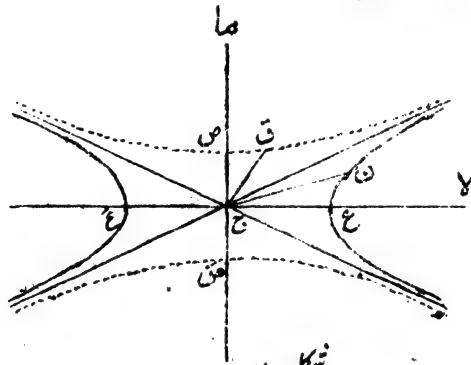
قاطع محور وہ محور ہے جو نمنی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے۔ اس تشریف کو بطور کھٹے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ما۔

$$1 + = \frac{a}{b} - \frac{a}{a}$$

کا قاطع محور ہے اور

$$1 - = \frac{a}{b} - \frac{a}{a}$$

کا مزدوج محور ہے کیونکہ اس سے یہ خیالی نقاط پر ملتا ہے صریحاً لا۔
مؤخر الذکر کا قاطع محور ہے۔



شکل ۶۔

(۲) دونوں نمنیات کے متقارب وہی ہوتے ہیں

دونوں کے متقارب صریحاً $\frac{a}{b} = \pm \frac{a}{a}$ ہیں کیونکہ متقاربوں کی

مساوات حاصل کرنے کے لئے ہم درجہ دوم کی رقوم کو صفر کے مساوی رکھتے ہیں [دفعہ ۱۶۴]
(۳) مرکز میں سے گزرنیوالا کوئی خط ایک زائد سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور دوسرے سے خیالی نقاط پر بشرطیکہ یہ دونوں کا مشترک متقارب نہ ہو۔

کیونکہ $ما = م لا$ پہلے زائد سے ملیگا جہاں

$$لا = \left(\frac{۱}{۱۲} - \frac{۲}{۱۲} \right) = ۱ +$$

اور دوسرے سے ملیگا جہاں

$$لا = \left(\frac{۱}{۱۲} - \frac{۲}{۱۲} \right) = ۱ -$$

یہ خط پہلے زائد سے حقیقی نقاط پر ملیگا یعنی لا کی قیمت مثبت ہوگی اگر

$$\frac{۱}{۱۲} - \frac{۲}{۱۲} \text{ مثبت ہو}$$

اور یہ خط دوسرے سے حقیقی نقاط پر ملیگا اگر

$$\frac{۱}{۱۲} - \frac{۲}{۱۲} \text{ منفی ہو}$$

اس لئے اگر $م' \pm \frac{۲}{۱۲}$ کے مساوی نہ ہو تو خط مذکور ایک منفی سے

حقیقی نقاط پر ملیگا اور دوسرے سے خیالی نقاط پر۔

دونوں منہیات کی شکلیں تصویر ۶۰ میں دکھائی گئی ہیں مسلسل

منفی مساوی $\frac{لا}{۱۲} - \frac{۱}{۱۲} = ۱ +$ کی ترسیم ہے اور نقطوں والا منفی

$$\frac{لا}{۱۲} - \frac{۱}{۱۲} = ۱ - \text{ کی۔}$$

(۴) اگر دو قطر بلحاظ ایک زائد کے مزدوج ہوں تو وہ بلحاظ مزدوج زائد کے بھی مزدوج ہوں گے۔

$$ما = م لا \text{ اور } ما = م لا \text{ بلحاظ } \frac{لا}{۱۲} - \frac{۱}{۱۲} = ۱$$

$$\frac{۲}{۱۲} = م' م$$

$$\frac{لا}{۱۲} - \frac{۱}{۱۲} = ۱ - \text{ یا } \frac{لا}{۱۲} - \frac{۱}{۱۲} = ۱ \text{ کیلئے نظروں کے ازدواج کی}$$

متناظر شرط لا اور ما کا 'ا' اور م ب کا باہم تبادلہ کرنے اور م کی بجائے $\frac{1}{م}$ اور م کی بجائے $\frac{1}{ب}$ نکلنے سے حاصل ہوگی [کیونکہ اس صورت میں ما = م لا محور ما کے ساتھ ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا ماس $\frac{1}{2}$ ہے] شرط مطلوبہ اس لئے یہ ہے

$$\frac{1}{م} \times \frac{1}{ب} = \frac{1}{ج} \quad \text{یا} \quad م م = \frac{ج}{ب}$$

جو پہلی صورت میں اوپر بیان کی گئی ہے اس لئے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ کسی زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک قطر اس زائد سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے اور دوسرا قطر اسکے مزدوج زائد سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے۔ پس مزدوج قطروں کی ایک نئی تعریف ہم حسب ذیل وضع کرتے ہیں۔

۱۶۵۔ مزدوج نیم قطر۔ تعریف۔ اگر ایک قطر ن ج ن

زائد $\frac{1}{ب} - \frac{1}{ا} = ۱$ سے حقیقی نقاط ن اور ن پر ملے تو

اس کا مزدوج قطر مزدوج زائد $\frac{1}{ب} - \frac{1}{ا} = ۱$ سے حقیقی نقاط ق اور ق پر ملیگا۔ ج ق کو ج ن کا مزدوج نیم قطر بلحاظ مقدار اور سمت کے کہتے ہیں۔

پس مزدوج قطر کے سرے وہ نقطے ہیں جہاں یہ مزدوج زائد سے ملتا ہے۔ ۱۶۶۔ ایک زائد دیا جواسے اس کے مزدوج زائد کی مساوات معلوم کر دے۔ سادہ سے سادہ صورت میں زائد اس کے متقاربوں اور اس کے مزدوج زائد کی مساواتیں بالترتیب یہ ہیں

$$\frac{1}{ب} - \frac{1}{ا} = ۱ \quad 'ا' \quad \frac{1}{ب} - \frac{1}{ا} = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{1}{ب} - \frac{1}{ا} = ۱$$

اب کسی اور محوروں کے لحاظ سے (خواہ یہ محور قائم ہوں یا مائل)

ان مساواتوں کو تحلیل کرنے کے لئے ہمیں اس قسم کے اندراج کرنے ہوں گے

$$لا = ل + لا + م + ما + ن$$

$$ما = ل + لا + م + ما + ن$$
 [حصہ اول دفعہ ۳۵]

اوپر کی تین مساواتیں ہو جائیگی

$$\frac{(ل + لا + م + ما + ن)}{ب} - \frac{(ل + لا + م + ما + ن)}{ب} = ۱$$

$$\frac{(ل + لا + م + ما + ن)}{ب} - \frac{(ل + لا + م + ما + ن)}{ب} = ۰$$

$$\frac{(ل + لا + م + ما + ن)}{ب} - \frac{(ل + لا + م + ما + ن)}{ب} = ۱$$

اس سے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ زائد کی مساوات سے متقاربوں کی مساوات حاصل کرنے کے لئے ہم زائد کی رقم مستقل سے ایک خاص مقدار مثلاً $ل$ تفریق کرتے ہیں اور مزدوج زائد کی مساوات حاصل کرنے کے لئے ہم متقاربوں کی مساوات سے وہی مقدار $ل$ تفریق کرتے ہیں یاد رہے کہ $ل$ کا ایک کے مساوی ہونا ضروری نہیں کیونکہ ہر ایک مساوات کو انکا باہمی تعلق بدلنے کے بغیر ایک ہی مقدار سے ضرب دیا جاسکتا ہے [دفعہ ۹۰]

مثال۔ زائد $لا + ما + ل + م = ۰$ کے مزدوج زائد کی مساوات معلوم کرو۔
 اوپر کی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$۰ = ۵ - (۱ + ما)$$

$$۰ = (۱ + لا) (۱ + ما)$$

$$۰ = ۵ + (۱ + لا) (۱ + ما)$$

$$۰ = ۶ + لا + ما + ما + ل$$

مشقیں

۲۵۔ ان زائدوں کی مساواتیں معلوم کرو جو بالترتیب

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} = 0$$

کے مزدوج ہوں۔

۲۶۔ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 0$ کے متقاربوں کی مسادات معلوم کرو اور اس سے مزدوج زائد کی مسادات حاصل کرو۔

۲۷۔ اگر $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 0$ کے متقاربوں کی مسادات معلوم کرو اور اس سے مزدوج زائد کی مسادات حاصل کرو۔
مزدوج زائد پر واقع ہے تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 0$ کے متقاربوں کی مسادات متوازی ہوگا۔

۱۶۔ زائد کے مزدوج قطروں کی خاصیتیں۔

فرض کرو کہ زائد $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ کے مزدوج نیمقطروں $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ اور $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ ہیں جہاں $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ ہے اور اس لئے $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ مزدوج زائد ہے۔

$$\text{تب } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} = 0$$

خو اس ذیل کے ثبوت بالکل ویسے ہی ہیں جیسے ناقص کی صورت میں (دفعہ ۱۵۸) اور طالب علم انہیں مشق کے طور پر حل کرے۔

$$(1) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} = 0 \quad (13)$$

$$(2) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} = 0 \quad (13)$$

$$(3) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} = 0 \quad (15)$$

(۴) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ اور $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ کے متقاربوں کی مسادات معلوم کرو اور اس سے مزدوج زائد کی مسادات حاصل کرو۔

$$\text{رقبہ} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad (16)$$

$$(5) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} = 0 \quad (14)$$

(۶) اگر اس عمود کا طول جو مرکز سے $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ کے متقاربوں کی مسادات معلوم کرو اور اس سے مزدوج زائد کی مسادات حاصل کرو۔

$$ع \times ج ق = ا ب \dots \dots (۱۸)$$

۱۶۸۔ زائد کی مساوات جبکہ مزدوج قطروں کو حوالہ کے محور مانا جائے۔
چونکہ مرکز مبدأ ہے اس لئے مساوات اس شکل کی ہوگی

$$ا ب لآ + ۲ م لا + م ا = ۱$$

اب محور لا ہر ایک ایسے وتر کی تنصیف کرتا ہے جو محور ما کے متوازی ہو اس لئے لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی اور مختلف علامت قیمتیں حاصل ہونی چاہئیں اس لئے $م = ۰$ ۔

اس لئے مساوات ہو جاتی ہے $ا ب لآ + ۲ م لا = ۱$
اس لئے متقاربوں کی مساوات جو مبدأ میں سے گزرنیوالے دو خطوط مستقیم ہیں یہ ہے $ا ب لآ + ۲ م لا = ۰$ ۔

اس لئے وقفہ ۱۶۶ کی رو سے مزدوج زائد کی مساوات ہے

$$ا ب لآ + ۲ م لا = ۱$$

اب فرض کرو کہ اس قطر کا طول جو محور لا پر منطبق ہوتا ہے اور منحنی کو کاٹتا ہے ۲ ہے اور دوسرے کا طول جو مزدوج زائد کو قطع کرتا ہے ۲ ب ہے۔
اس لئے اگر ہم مساوات $ا ب لآ + ۲ م لا = ۱$ میں ما کو صفر کے مساوی رکھیں تو لازماً حاصل ہونا چاہیے $لا = ۱$ اور اگر مساوات $ا ب لآ + ۲ م لا = ۰$ میں ہم $لا = ۰$ رکھیں تو حاصل ہونا چاہیے $ما = ۱$ ۔

$$اس لئے $ا ب لآ = ۱$ اور $ب لآ = ۱$ ۔$$

$$اس لئے مساوات ہوگی $\frac{لا}{۱} - \frac{ب لآ}{۱} = ۱ \dots \dots (۱۹)$$$

مشقیں

۲۸۔ زائد لآ + لا - ما = ۱ کا وہ قطر معلوم کرو جو لا + ۲ ما = ۰ کا مزدوج ہو اور فی الحقیقت اس کی تصدیق کرو کہ دو قطروں میں سے ایک منحنی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور دوسرا خیالی نقاط پر۔

۲۹۔ ثابت کرو کہ اگر متوازی الاضلاع ج ن ل ق کی تکمیل کی جائے تو ل ایک متقارب پرواقع ہوگا۔

۳۰۔ اگر زائد کے مزدوج نیم قطر عم اور بہ ہوں اور انکا درمیانی زاویہ سم ہو تو ثابت کرو کہ $\text{عہ} = \text{بہ} = \text{لا} = \text{جہ}$ اور $\text{عم} = \text{بہ} = \text{سم} = \text{جہ}$ اس لئے اگر مزدوج قطروں کا ایک جوڑا دیا ہوا ہو اور ان کا درمیانی زاویہ بھی معلوم ہو تو بتاؤ کہ محوروں کے طول کس طرح معلوم کئے جائیں۔

۳۱۔ مشق ۳۰ میں اگر $\text{عہ} = \text{سم} = \text{بہ} = \text{لا} = \text{جہ}$ اور $\text{عم} = \text{بہ} = \text{سم} = \text{جہ}$ تو اعشاریہ کے دوسرے مقام تک ل اور جب کے طول معلوم کرو۔

۳۲۔ نقطہ ن (۱) زائد ۳ لا - ۲ ما = ۱ پرواقع ہے مزدوج قطروں ج ن اور ج ق کے طول اور انکا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

س ن اور س ن کی قینیں فی الحقیقت معلوم کرنے سے اسکی تصدیق کرو کہ $\text{س ن} \times \text{س ن} = \text{ج ق}$

۱۶۹۔ مکانی کے متوازی وتر۔ مکانی کے متوازی وتر کے نقاط نصف کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو منحنی کے محور کے متوازی ہے۔ اس جگہ ہم عام نیچہ کو استعمال کر سکتے ہیں، لیکن ابتدا سے ہی عمل کرنا بہتر ہوگا۔

فرض کرو کہ محور قائم ہیں اور مکانی کی مساوات $\text{ما} = \text{سم} + \text{لا}$ ہے۔ منحنی پر کے نقاط (لا، ل) اور (لا، ل) کو ملانے والے وتر کی مساوات ہوں گی

$$(\text{ما} - \text{لا}) (\text{ما} - \text{لا}) = \text{ما} - \text{سم} + \text{لا}$$

$$\text{یا } \text{ما} (\text{ما} + \text{لا}) - \text{سم} + \text{لا} = \text{ما} + \text{لا}$$

اگر یہ وتر $\text{ما} = \text{سم} + \text{لا}$ کے متوازی ہو تو

$$\text{م} = \frac{\text{لا}}{\text{ما} + \text{لا}}$$

جو کہ $\frac{1}{\text{ما} + \text{لا}}$ وتر کے نقطہ نصف کا معین ہے، اس لئے نقطہ نصف

$$\text{خط } \frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \frac{1}{\text{م}} \text{ یا } \frac{\text{لا}}{\text{م}} = \text{ما}$$

پر واقع ہے جس سے نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

۱۷۔ مکانی کا قطر۔ تعریف۔ ایسا خط جو مکانی کے محور کے متوازی ہو مکانی کا قطر کہلاتا ہے۔

مرکز دار تراشوں کے سب قطر ایک نقطہ میں اکرتے ہیں جسے تراش کا مرکز کہتے ہیں، لیکن یاد رہے کہ مکانی کے قطر سب ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔ پس مشابہت کو قائم رکھنے کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ مکانی کے سب متوازی قطر لا انتہا فاصلے پر ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر ملتے ہیں اس نقطہ کو ہم مکانی کا مرکز خیال کر سکتے ہیں۔

۱۸۔ مکانی کا قطر ان تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو اسکے سرے پر کے مماس کے متوازی ہوں۔

اس صورت میں ثبوت بالکل ویسا ہے جو ناقص کی صورت میں اسے بطور مشق کے طالب علم کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔

مشقیں

۳۳۔ مکانی $MA = 3$ لا کی صورت میں اس قطر کی مسادات معلوم کرو جو $MA = 4$ کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے اس کے سرے کے محدود بھی معلوم کرو۔

۳۴۔ مکانی $MA = 4$ لا $MA = 3$ میں وہ قطر معلوم کرو جو $MA = 2$ کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے اس کے سرے کے محدود معلوم کرو اور اسکی تصدیق کرو کہ سرے پر کا مماس وتروں کے نظام کے متوازی ہے۔

۳۵۔ مکانی کی مسادات جبکہ کوئی قطر اور اس کے سرے پر کا مماس حوالہ کے محور ہوں۔

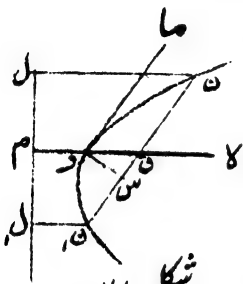
فرض کرو کہ قطر محور ولا ہے اور مماس و ما۔

ہم معلوم کرتے ہیں کہ عام مسادات

$$1 \text{ لا } 2 \text{ لا } 3 \text{ لا } 4 \text{ لا } 5 \text{ لا } 6 \text{ لا } 7 \text{ لا } 8 \text{ لا } 9 \text{ لا } 10 \text{ لا } 11 \text{ لا } 12 \text{ لا } 13 \text{ لا } 14 \text{ لا } 15 \text{ لا } 16 \text{ لا } 17 \text{ لا } 18 \text{ لا } 19 \text{ لا } 20 \text{ لا } 21 \text{ لا } 22 \text{ لا } 23 \text{ لا } 24 \text{ لا } 25 \text{ لا } 26 \text{ لا } 27 \text{ لا } 28 \text{ لا } 29 \text{ لا } 30 \text{ لا } 31 \text{ لا } 32 \text{ لا } 33 \text{ لا } 34 \text{ لا } 35 \text{ لا } 36 \text{ لا } 37 \text{ لا } 38 \text{ لا } 39 \text{ لا } 40 \text{ لا } 41 \text{ لا } 42 \text{ لا } 43 \text{ لا } 44 \text{ لا } 45 \text{ لا } 46 \text{ لا } 47 \text{ لا } 48 \text{ لا } 49 \text{ لا } 50 \text{ لا } 51 \text{ لا } 52 \text{ لا } 53 \text{ لا } 54 \text{ لا } 55 \text{ لا } 56 \text{ لا } 57 \text{ لا } 58 \text{ لا } 59 \text{ لا } 60 \text{ لا } 61 \text{ لا } 62 \text{ لا } 63 \text{ لا } 64 \text{ لا } 65 \text{ لا } 66 \text{ لا } 67 \text{ لا } 68 \text{ لا } 69 \text{ لا } 70 \text{ لا } 71 \text{ لا } 72 \text{ لا } 73 \text{ لا } 74 \text{ لا } 75 \text{ لا } 76 \text{ لا } 77 \text{ لا } 78 \text{ لا } 79 \text{ لا } 80 \text{ لا } 81 \text{ لا } 82 \text{ لا } 83 \text{ لا } 84 \text{ لا } 85 \text{ لا } 86 \text{ لا } 87 \text{ لا } 88 \text{ لا } 89 \text{ لا } 90 \text{ لا } 91 \text{ لا } 92 \text{ لا } 93 \text{ لا } 94 \text{ لا } 95 \text{ لا } 96 \text{ لا } 97 \text{ لا } 98 \text{ لا } 99 \text{ لا } 100 \text{ لا}$$

اس صورت میں کیا ہو جاتی ہے، امور ذیل توجہ طلب ہیں

- ۱۔ سب انہی پر واقع ہے
- ۲۔ لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی اور مختلف علامات قیمتیں حاصل ہونی چاہئیں
- ۳۔ کوئی ایسا خط جو دلا کے متوازی ہو یعنی کو د ایسے نقطوں پر کاٹتا ہے جن میں سے ایک نقطہ لاتنا ہی پر واقع ہوتا ہے [دفعہ ۴۹]



شکل ۶۱

(۱) کی رو سے ج = ۰

(۲) کی رو سے ص = ۰ اور ف = ۰

اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$لا + ج + ما + م گ لا = ۰$$

(۳) کی رو سے اگر ما = ۰ تو

لا کی قیمتیں صفر اور ∞ ہونی چاہئیں۔

اس لئے لا = ۰ [یونیورسل الجبر حصہ دوم، دفعہ ۱۶۶]

پس مساوات ہو جاتی ہے ج + ما + م گ لا = ۰

جسے ہم صریحاً اس شکل میں کہہ سکتے ہیں ما = م گ لا

(یہ امر کہ لا = ۰ اس سے بھی ظاہر ہے کہ درجہ دوم کی رقبوں کو مربع کامل

ہونا چاہیے، اس لئے لا ب = ۰ اور ج ب = ۰ کیونکہ اس صورت

میں منحنی دو خطوط مستقیم کو تعبیر کریگا)

مساوات ما = م گ لا میں یہ باسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ لا نقطہ تماس کا

ماسکی فاصلہ سے ہے۔

وما کے متوازی ماسکی وتر ن ق س ن کیجئے جو منحنی سے ن ن پر

اور محور لا سے ق پر ملے۔ ن ل ن ل مرتب پر عمود نکالو اور

فرض کرو کہ دلا مرتب سے م پر ملتا ہے

$$تب \quad ن ق = م ل \times د ق$$

$$لیکن \quad ن ق = \frac{1}{2} ن ن = \frac{1}{2} (س ن + س ن) = \frac{1}{2} (ن ل + ن ل)$$

= ق م = ۲ د م [شق ۱۱ دفعہ ۱۲۹ کی رو سے]

= ۲ س د

∴ ۲ س د = ۲ ل د ق = ۲ ل د م = ۲ ل د س د

∴ ل = س د

۱۷۳- دفعات ۱۶۰، ۱۶۸، ۱۷۲ کے نتائج کا مقابلہ اگر مرکزدار تراشوں کی ان مساداتوں کے ساتھ کیا جائے جبکہ اصلی محور حوالہ کے محور ہوں تو ظاہر ہے کہ مسادات

$$\frac{ل}{د} + \frac{ل}{د} = \frac{ل}{د} - \frac{ل}{د} = ۱ = ۱ = \frac{ل}{د} = ۲ ل د$$

کی شکلیں دونوں صورتوں میں وہی ہیں فی الحقیقت اصلی محور دفعات ۱۶۰، ۱۶۸ اور ۱۷۲ کے محاور کی خاص صورتیں ہیں مثلاً ناقص کے محور اعظم اور اصغر فی الحقیقت منحنی کے دو علی القوائم مزدوج قطر ہیں۔

مشق

۳۵- مکانی کے نقاط ن اور ن پر کے ماس ایک دوسرے کو ت پر قطع کرتے ہیں ن کا وسطی نقطہ ص ہے ت ص مکانی سے ق پر ملتا ہے ثابت کرو کہ ت ق = ق ص

[ن کے تنصیف کرنے والے قطر کو نور لا اور اس کے سرے پر کے ماس کو محور ما انو۔ اس طرح مکانی کی مسادات ہوگی ل = م ل ل ق بسا ہے اور نقاط ن اور ن ہیں بالترتیب (ل، ل) اور (ل، ل)]

توضیحی مثالیں

(۱) مکانی کے ماسکی دتروں کے نقاط تنصیف کا طریق معلوم کرو۔
فرض کرو کہ ل = م ل ل کے ایک وتر کے نقطہ تنصیف کے محدود (ل، ل) ہیں دفعہ ۱۵۲ کی رو سے وتر کی مسادات ہوگی

$$ل - ل = م ل ل - ل$$

اسے لازماً ماسکہ (۱) میں سے گزرنا چاہئے، اس لئے

$$۱ - ۲ = ۲$$

اس لئے طریق کی مساوات ہے $۱ - ۲ = ۲$ (۱-۲)

پس طریق مطلوب مکانی ہے جس کا محور وہی ہے جو اصلی مکانی کا ہے لیکن اس کا رأس (۱) ہے جو دئے ہوئے مکانی کا ماسکہ ہے نیز اس کا وتر خاص ۲ ہے۔

(۲) مخروطی تراش $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$ خط مستقیم $۱ = ۲ + ۱$ ج سے جو حصہ کاٹتی ہے اس کا نقطہ تنصیف معلوم کرو۔

ذیل کے طریقہ کا اطلاق عام صورتوں پر ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ خط اور منحنی کے نقاط تقاطع (۱) اور (۲) ہیں ان نقطوں کے فاصلے معلوم کرنے کے لئے ہم اوپر کی دو مساواتوں سے ماسکو ساکت کرتے ہیں، اس طرح ہمیں ذیل کی مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے

$$۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{(۲ + ۱)}{۲}$$

$$۱ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۲} + \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right)$$

$$۱ - ۱ = - \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۲} + \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right)$$

لیکن اگر نقطہ تنصیف کے مجدد (۲) ہوں تو

$$۱ = - \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۲} + \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right)$$

$$۱ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۲} + \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right)$$

چونکہ نسبت $\frac{۱}{۲}$ کا انحصار ج پر نہیں ہے اس سے اس امر کا ایک اور ثبوت حاصل ہوتا ہے کہ متوازی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق

ایک قطر ہے۔
(۳) ناقص کا ایک ماس مرتب دائرہ سے ن اور ق پر ملتا ہے
اگر ج مرکز ہو تو ثابت کرو کہ ج ن ج ق مخروطی کے مزدوج قطر ہیں۔

فرض کرو کہ ناقص کی مسادات ہے $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \dots (۱)$

مرتب دائرہ کی مسادات ہوگی $لا + ما = وا + ب \dots (۲)$

(لا، ما) پر کے ماس کی مسادات ہے $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \dots (۳)$

چونکہ ج مبدأ ہے اس لئے ج ن ج ق کی مسادات (۲) اور (۳) کو
اس طرح ملانے سے حاصل ہوگی کہ مسادات محصلہ لا، ما میں متجانس ہو جائے۔

یہ متجانس مسادات ہوگی $لا + ما = (وا + ب) (\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب})$

یا $لا (وا + ب) (\frac{لا}{وا} - ۱) + ما (وا + ب) (\frac{لا}{وا} - ۱) = ۱$
لیکن ہم جانتے ہیں کہ ما - م لا = ۱ اور ما - م لا = ۱ باہم مزدوج ہونگے
اگر $م م = \frac{لا}{وا}$

اور $م م = - \frac{لا}{ما}$ مسادات بالائیں میں لئے یہ خطوط
مزدوج قطر ہونگے اگر

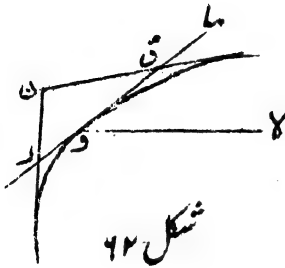
$\frac{لا}{وا} (وا + ب) (\frac{لا}{وا} - ۱) + \frac{ما}{ب} (وا + ب) (\frac{لا}{وا} - ۱) = ۱$

یعنی اگر $(\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب}) (وا + ب) (\frac{لا}{وا} - ۱) = ۱$

اور یہ شرط پوری ہوتی ہے کیونکہ (لا، ما) مخروطی پر واقع ہے۔
(۴) مکانی کے دو ماس ایک ثابت نقطہ و پر کے ماس سے

ق اور ر پر ملتے ہیں اور وقی x ور ہمیشہ مستقل رہتا ہے۔
ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

و میں سے گزرنیوالے قطر اور و پر کے ماس کو محور مانو، اسطرح
مکانی کی مساوات ہوگی $ما = م لا$
فرض کرو کہ نقطہ ن مطلوبہ طریق پر ہے،



تب وقی x ور مستقل = ک (فرض کرو)

فرض کرو کہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں۔

نقطہ (لا، ما) سے منحنی کے ماسات کی مساوات ہے،

$\{ما - ما - ۲ لا (لا + لا)\} = \{ما - ما - ۲ لا (لا + لا)\}$

ان نقطوں کو حاصل کرنے کے لئے

جہاں یہ ماس ثابت ماس سے ملتے ہیں ہمیں $لا = ۰$ رکھنا چاہیے،
اسطرح ہم دیکھتے ہیں کہ وقی اور ور ذیل کی مساوات درجہ دوم کی اہلیں ہیں

$$(ما - ما - ۲ لا (لا + لا)) = (ما - ما - ۲ لا (لا + لا))$$

$$یا \quad ما \times م لا - م لا لا + ما \times م لا + م لا لا = ۰$$

$$\therefore \text{وقی} \times \text{ور} = \frac{ما لا لا}{م لا لا} = لا$$

لیکن وقی x ور = ک

اس لئے طریق مطلوب ہے $لا = ک$ یا آخری ہندسہ کو حذف

کرنے سے $لا = ک$ جو ایک خط مستقیم ہے اور ثابت ماس کے متوازی ہے۔

باب نیز دھم پر متفرق شقیں

۳۶- مخروطی لا + لا + ما + ما + لا = ۰ کے ان وتروں کے نقاط تنصیف کا

طریق معلوم کرو جو لا = ما کے متوازی ہوں۔

۳۷- کسی طرح سے ثابت کرو کہ مخروطی

$$لا + لا + ۲ لا + ج + ما + لا + گ + لا + ف + ما + ج = ۰$$

کے اُن وتروں کے نقاط نصفیت کا طریق جو محور لا کے متوازی ہوں
 $\text{لا} + \text{ح} = \text{ما} + \text{گ} = ۰$ ہے۔

۳۸۔ ایک زائد کی مساوات $\text{لا} + \text{ا} + \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج} = \text{مبے}$
 اسکے ستارہوں اور اسکے مزدوج زائد کی مساواتیں معلوم کرو۔

۳۹۔ اگر ناقص $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = ۱$ کے ماسکوں سے ن برسے
 ماس پر عمود سی ما اور سی ما کھینچے جائیں تو ثابت کر دو کہ
 سی ما \times سی ما = جبا اور سی ن \times سی ن = ج ج ٹی
 جہاں ج ج ق ج ن کا مزدوج نیم قطر ہے۔

۴۰۔ نقطہ و (لا، ا) میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو ناقص $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = ۱$

سے نقاط ن اور ق پر ملتا ہے اگر ن ق کا نقطہ نصفیت ر
 ہو اور یہ خط ولا کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو ثابت کر دو کہ

$$\text{ور} = - \left(\frac{\text{لا} + \text{ج} + \text{ط}}{\text{ب}} + \frac{\text{ا} + \text{ج} + \text{ط}}{\text{ب}} \right) / \left(\frac{\text{ج} + \text{ط}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج} + \text{ط}}{\text{ب}} \right)$$

ر کے محدود حاصل کرو

۴۱۔ اسکے لئے کیا شرط ضروری ہے کہ خطوط $\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = ۰$ اور $\text{لا} + \text{ب} + \text{ا} + \text{ج} = ۰$

ناقص $\text{م} + \text{لا} + \text{ا} + \text{ق} = ۳۶$ کے دو مزدوج قطروں کے متوازی ہوں۔

۴۲۔ ثابت کر دو کہ مخروطی $\text{لا} + \text{ا} + \text{ح} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ا} + \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج} = ۰$

کے وہ نقطے جن پر کے ماس $\text{ما} = \text{م}$ لا کے متوازی ہیں قطر

($\text{لا} + \text{ح} + \text{ما} + \text{گ}$) + ($\text{م} + \text{ح} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ا} + \text{ف}$) = ۰ کے سرے ہیں۔

۴۳۔ ایک ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ

۹۰ ہے ثابت کر دو کہ نخی کا خروج المرکز $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

۴۴۔ ناقص کے ایک ماسک سے ایک مزدوج قطر پر اور دوسرے

ماسک سے دوسرے قطر پر عمود کھینچے گئے ہیں عمودوں کے نقطہ

تقاطع کا طریق دریافت کرو۔

سرے ہیں تو ثابت کر دو کہ ن ع اور ن ع مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

کیا یہی خاصیتِ ن ص اور ن ص کیلئے بھی درست ہوگی؟

۵۲۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ ق سے ایک قطرن جاً کے

سردں تک دتر کھینچے گئے ہیں جو مزدوج قطرق ج ق سے ل اور

م پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ $J \times J = J$ ج ق

۵۵۔ کئی ایسے ستوازی الاشعاع ایک ناقص کے اندر بنائے گئے ہیں

جن کے صلے ناقص کے مساوی مزدوج فطروں کے متوازی ہیں ثابت

لرولہ ان سب متواتری الاصلاعوں کے لئے اصلع کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے

۵۶۔ الرد المحتجی تراشوں میں سے ایلی کے مقابرب دوسری کے

مردوج لکھنؤ کے متواری ہوں لو مابث (وہ دوسری کے سفارح
 ہل تراش کے مردوج قطع دل کے متواری ہو گئے۔

۵۔ مخمور $\frac{1}{2}$ لا + ما + ف + ما + مگ

کے اُن تمام دتروں کے نقاط تنصیف کا طریق معلوم کر دجو مبدأ میں

— اس نام و درجہ سے ایک نیا سرسبز عالم کو جو جہاں میں
سے گذرتے ہوں۔

۵۸۔ ثابت کرد کہ خط مستقیم $MA = M$ لا زائاً $LA = K$ کے اُن تمام

وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو $ma = m$ کے متوازی ہوں۔

۵۹۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم

(مَعُوذ - مَعُوذ) + (وَلَب - وَلَب) + (مَعُوذ - مَعُوذ)

مخروطی $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ کے اور نیز $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

کے مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

[دیکھو مشق ۳، دفعہ ۱۵]

۶۰۔ ناقص کے کسی ایک محور کے متوازی ایک ثابت خط مستقیم کھینچا گیا ہے

جو ناقص کے مزدوج قطروں سے ک اور ل پر ملتا ہے ثابِت کہ اگر

کل کے قطر پر ایک دائرہ بنایا جائے تو یہ دوسرے محور پر کے

دو ثابت نقطوں میں سے گزریگا۔

۶۱۔ اگر ناقص کے محور اعظم کے سروں پر تماس کیجئے جائیں اور ناقص کے کوئی دوسرا مزدوج نیمقطر ان تماسات سے قی اور ر پر میں تو ثابت کرو کہ قی ر ناقص کو مس کرتا ہے۔

۶۱۔ اگر ناقص کے محور اعظم کے سروں پر تماس کیجئے جائیں اور ناقص کے کوئی دوسرا مزدوج نیمقطر ان تماسات سے قی اور ر پر میں تو ثابت کرو کہ قی ر ناقص کو مس کرتا ہے۔

۶۲۔ ایک ثابت نقطہ میں سے ایک مکانی کے کئی وتر کیجئے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان سب کے وسطی نقطے ایک ایسے مکانی پر واقع ہوتے ہیں جس کا وتر خاص دئے ہوئے مکانی کے وتر خاص کا نصف ہے۔

۶۳۔ $ما = م$ لاکے متوازی قطع ناقص کے متوازی دتروں کا ایک نظام ہے اور اس نظام کا ایک وتر $ل م$ ہے اگر $ل م$ پر ایک نقطہ $ن$ ایسا لیا جائے کہ $ل ن : ن م = ۳ : ۱$ تو $ن$ کا طریق ایک ہم مرکز قطع ناقص ہوگا۔



باب چہارم

مخروطی تراشوں کے عماد

[اس باب میں شروع سے آخر تک محدودوں کے محور قائم فرض کئے جائینگے]
 ۴۷۱۔ عماد۔ تعریف۔ مخروطی کے کسی نقطہ پر کا عماد وہ خط مستقیم ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنیوالے مماس پر اس نقطہ میں سے عمود کھینچا جائے۔
 عماد کی یہ تعریف ہر مثنیٰ کے لئے درست ہے مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ خط مستقیم کے کسی نقطہ پر کا عماد ایک خط ہے جو اس نقطہ میں سے مفروضہ خط مستقیم پر عمود ہو اور ایک دائرہ کے کسی نقطہ پر کا عماد اس نقطہ میں سے گزرنیوالا نصف قطر ہے۔

۴۷۵۔ مخروطی (لا + م) پر کے عماد کی مساوات معلوم کرو
 نقطہ (لا + م) پر کے مماس کی مساوات ہے
 لا (لا + م + گ) + م (م + ب + ف) + گ (لا + ف + ب) = [دفعہ ۱۲۷]
 اب جس خط کی مساوات

$$\frac{لا}{لا + م + گ} - \frac{م}{م + ب + ف} = ک$$

ہے وہ ک کی تمام قیمتوں کے لئے مماس پر عمود ہے [حصہ اول دفعہ ۱۹]
 اگر یہ خط (لا + م) میں سے گزرے تو لازماً

$$\frac{لا + م + گ}{لا + م + گ} - \frac{م}{م + ب + ف} = ک$$

پس شرط مطلوبہ ہے

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}} = \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}}$$

جسے ہم فوراً لکھ سکتے تھے۔

۱۷۶۔ خاص صوتیں

طاب علم ذیل کے نتائج کو ابتدائی اصولوں سے حاصل کرے۔
(۱) مکانی ما^۲ = م لا

$$\text{عماد} \quad ۲ \text{ لا} (ما - با) + با (لا - لا) = ۰$$

$$(۲) \text{ ناقص} \quad \frac{\text{لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{با}} = ۱ \text{ عماد} \quad \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{با}}$$

$$(۳) \text{ زائد} \quad \frac{\text{لا}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{با}} = ۱ \text{ عماد} \quad \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{با}}$$

$$۱۷۷۔ \text{ ناقص} \quad \frac{\text{لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{با}} = ۱ \text{ کے عماد کی مساوات ہے}$$

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{با}} \text{ یا } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{با}} = \frac{\text{لا}}{\text{با}} - \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{لا}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{با}} = \frac{\text{لا}}{\text{با}} - \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \quad (۲) \dots\dots\dots$$

اس شکل میں اسے یاد رکھنا چاہئے، اسی طرح زائد کے عماد کی مساوات ہے

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{\text{لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{با}} = \frac{\text{لا}}{\text{با}} + \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$$

مثال۔ نقطہ (۲، ۱) مخروطی لا + لا + ما + لا + ما = ۱۰ پر

واقع ہے، اس نقطہ پر کے عماد کی مساوات معلوم کرو۔

(لا، با) پر کے ماس کی عام مساوات ہے

$$\text{لا} (\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}) + \text{ما} (\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}) + \text{با} (\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}) + \text{ج} =$$

اس صورت میں یہ ہو جائیگی

۹۔ اگر مکانی کے کسی نقطہ پر ماس اور عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ محور سے ایسے دو نقاط پر لپٹے جو ماسکے سے متساوی الفصل ہوں۔

۱۰۔ مکانی $MA = m$ والا کے نقطہ (لا، لم) پر کا عماد منحنی سے دوبارہ ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے جس کے محدد $\frac{(MA + m)}{m}$ ' - $\frac{(MA + m)}{m}$ ہیں

[مساوات (۱) میں لا اور لا کی بجائے $\frac{MA}{m}$ اور $\frac{m}{m}$ رکھو]

۱۱۔ اگر مکانی $MA = m$ والا کے نقطہ ن (لا، ما) پر کا عماد منحنی سے دوبارہ قی پر ملے تو ن ق کا طول معلوم کرو۔

۱۲۔ اگر ناقص کے وتر خاص کے ایک سرے پر کا عماد محور اصفہر کے ایک سرے میں سے گزرے تو لا + لب - بآ = ۰۔
اس سے حاصل کرو کہ خروج مرکز ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے
 $لا + لا - ۱ = ۰$

۱۳۔ اگر ناقص $\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے نقطہ (لا، لم) پر کا عماد

محور لا سے حادہ زاویہ طہ بنائے اور اس نقطہ پر کے ماس پر مرکز سے جو عمود کھینچا جائے اس کا طول د ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ط} = \frac{د لا}{لا} \quad \text{جب ط} = \frac{د ما}{ب}$$

عماد کی مساوات ہے

$$\frac{لا - لا}{لا} = \frac{ما - ما}{ب}$$

اس کا خط کی شکل ذیل کے ساتھ مقابلہ کرنے سے

$$\frac{لا - لا}{جم ط} = \frac{ما - ما}{\text{جم ط}} \quad [\text{حصہ اول، دفعہ ۱۰، ب}]$$

$$\text{لا} - \text{ر} = \frac{\text{د لا}}{\text{لا}} ، \text{با} - \text{ر} = \frac{\text{د با}}{\text{با}}$$

اگر ر = ن گ تو دوسرا محد صفر ہونا چاہئے اس لئے

$$\frac{\text{ر د}}{\text{د}} = ۱ \quad \text{یا} \quad \text{ر} = \frac{\text{د با}}{\text{با}}$$

اگر ر = ن ف تو پہلا صفر ہونا چاہئے اس لئے

$$\frac{\text{ر د}}{\text{د}} = ۱ \quad \text{یا} \quad \text{ر} = \frac{\text{د لا}}{\text{لا}}$$

(۲) اگر ہم نقطہ ن (لا، با) سے ج ق کے مساوی طول ن ط اور ن ط عماد پر باہر اور اندر کی طرف ناپیں جہاں ج ق، ج ن کا مزدوج نیقطر ہے تو

ج ط = لا + با ، ج ط = لا - با
اور ج ط، ج ط محوروں سے مساوی زاویے بناتے ہیں۔
فرض کرو کہ نقطہ ط (لہ، مہ) ہے اور ط (لہ، مہ) تب اگر
ج ق = س تو

$$\text{لہ} = \text{لا} + \text{س} = \frac{\text{د لا}}{\text{لا}} ، \text{مہ} = \text{با} + \text{س} = \frac{\text{د با}}{\text{با}}$$

$$\text{لہ} = \text{لا} - \text{س} = \frac{\text{د لا}}{\text{لا}} ، \text{مہ} = \text{با} - \text{س} = \frac{\text{د با}}{\text{با}}$$

لیکن دس = لب

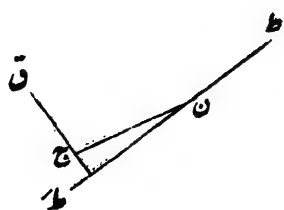
$$\text{لہ} = \text{لا} (۱ + \frac{\text{س}}{\text{لا}}) = \frac{\text{د لا}}{\text{لا}} (۱ + \frac{\text{س}}{\text{لا}})$$

$$\text{مہ} = \text{با} (۱ + \frac{\text{س}}{\text{با}}) = \frac{\text{د با}}{\text{با}} (۱ + \frac{\text{س}}{\text{با}})$$

اسی طرح

$$\text{لہ} = \text{لا} (۱ - \frac{\text{س}}{\text{لا}}) = \frac{\text{د لا}}{\text{لا}} (۱ - \frac{\text{س}}{\text{لا}})$$

$$\text{مہ} = \text{با} (۱ - \frac{\text{س}}{\text{با}}) = \frac{\text{د با}}{\text{با}} (۱ - \frac{\text{س}}{\text{با}})$$



شکل ۶۴

اس لئے ج ط = ل + م
 $(ل + ب) = \left\{ \frac{ل}{۲} + \frac{ل}{۲} \right\} = (ل + ب)$
 $\therefore ج ط = ل + ب$ ، اس طرح ج ط = ل - ب

اور چونکہ $\frac{ل}{۲} = \frac{م}{۲}$
 اس لئے خطوط ج ط، ج ط عماد سے مساوی زاوے بناتے ہیں۔
 (۳) ناقص کے دو مزدوج قطر بلحاظ مقدار اور محل کے معلوم ہیں، ناقص کے محور کھینچو۔

فرض کرو کہ ج ن اور ج ق مزدوج قطر ہیں۔
 چونکہ ن پر کا عماد ج ق پر عمود ہے (دفعہ ۱۵) اس لئے ہم
 ط اور ط کے مقام آسانی معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ

ن ط = ن ط = ج ق
 اب (۲) کی رو سے ناقص کے محور ج ط اور ج ط کے درمیانی
 زاویہ کے داخلی اور خارجی منصف ہیں اور

$ل = ج ط + ج ط$ ، $ب = ج ط - ج ط$
 زاؤ کی صورت میں جب ط اور جم ط کے لئے جو متناظر ضابطے
 حاصل کئے گئے ہیں انہیں استعمال کرنے سے بعینہ ایسے نتائج حاصل ہو سکتے
 ہیں، یہ مشتق کے طور پر طالب علم کے لئے چھوڑے گئے ہیں۔
 ۱۸۰۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ معلوم سے مکانی کے تین عماد کھینچ سکتے ہیں۔

نقطہ (لا، لم) پر کے عماد کی مسادات ہے

$ل + م + ل = ل + ل + م$
 یا چونکہ $\frac{ل}{۲} = \frac{م}{۲}$ اس لئے یہ مسادات ہو جاتی ہے
 $ل + م + ل = ل + ل + م$
 اگر عماد نقطہ (ف، گ) میں سے گزرے تو

$ل + گ + ف = ل + ل + م$

$$یا \frac{۲}{۱۲} + ۱ (۲ - ۱) - ۲ گ = ۰$$

جو مائیں درجہ سوم کی مساوات ہے، اس مساوات کی تین اصلیں ہیں (یوٹوریل الجبرا دوم دفعہ ۳۷۱) اور ہر اصل کے لئے منحنی پر ایک نقطہ ہے۔ پس معلوم ہوا کہ منحنی پر تین ایسے نقطے ہیں کہ ان پر کے عماد ایک نقطہ معلومہ میں سے گزرتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر مکانی کے تین نقطوں پر کے عماد ایک ہی نقطہ میں سے گذریں تو ان کے معینوں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

اوپر کی مساوات میں رقم ۱۱ موجود نہیں اس لئے اصلوں کا مجموعہ صفر ہے (یوٹوریل الجبرا دوم دفعہ ۳۷۲)

مشقیں

۱۳۔ ناقص لا + ۳ ما = ۴ کے نقطہ (۱، ۱) پر کا عماد محور اعظم سے زاویہ ۷۰ بناتا ہے، جم ۷۰ اور جب ۷۰ کی قیمتیں معلوم کر دو۔

۱۴۔ لا + ۳ ما = ۲ کے نقطہ (۱، ۱/۴) پر کا عماد جزو زاویہ محور اعظم سے بناتا ہے اس کی جیب اور جیب التمام معلوم کر دو۔

۱۵۔ قائم زاؤ کا ایک وتر جس کے عمادی ایک نقطہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے اس نقطہ پر کے عماد کے متوازی ہے۔

۱۶۔ مکانی ما = ۳ لا پر کے ان نقطوں کے محدود معلوم کرو جن پر کے عماد نقطہ (۱۵/۳ - ۲/۳) میں سے گذریں اور ایک شکل میں ان تین متراکز عمادوں کو دکھاؤ۔

[ما کے لئے کبھی مساوات حاصل کرو اور دیکھو کہ اس کی ایک اصل ایک ہے باقی دو اصلیں مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں]

۱۷۔ ناقص لا + ۳ ما = ۱ کے ان نقطوں کے محدود معلوم کر دو

جن پر کے عماد محور لا سے ۵۴ کا زاویہ بنائیں۔
 ۱۸۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ سے مکانی کا کم از کم ایک حقیقی عماد کھینچ سکتا ہے
 [تیسرے درجہ کی مساوات کی کم از کم ایک اصل حقیقی ہوتی ہے]
 ۱۸۱۔ مکانی کے عماد کی مساوات شکل $Ma = m + la + j$ میں۔
 اب ہم مکانی $Ma = m + la$ کے عماد کی مساوات اُس زاویہ کے
 ماس کی رقوم میں معلوم کریں گے جو عماد محور لا سے بناتا ہے۔
 عماد کی مساوات اس شکل کی ہے $Ma = m + la + j$
 چونکہ یہ نقطہ (لا، ما) پر کا عماد ہے اس لئے

$$Ma = m + la + j$$

$$= (لا، ما) پر کے ماس \quad Ma = m + la + j \text{ پر عمود ہے}$$

$$\text{اسلئے } m = -\frac{la}{j} \quad \text{یا} \quad Ma = -la + j$$

$$\text{اور } la = \frac{Ma}{j} = -m + la + j$$

$$\therefore j = Ma - m - la = -m - la + j$$

اسلئے عماد کی مساوات ہے

$$Ma = m - la - la + j \dots \dots (۵)$$

مشقیں

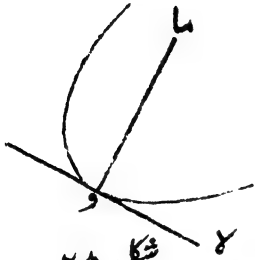
۱۹۔ ثابت کرو کہ مکانی کے کسی نقطہ پر کے عماد کا وہ حصہ جو منحنی اور محور کے
 درمیان کٹے اُس معین کے مساوی ہے جو زیر عماد کے نقطہ تنصیف میں
 سے کھینچا جائے۔

۲۰۔ $Ma = m + la$ کے اُن عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محور لا
 سے بالترتیب زاویے (۱) ۹۰ (۲) ۵۴ (۳) ۱۲۰ بنائیں۔
 ۲۱۔ $Ma = m + la$ کے اُس عماد کی مساوات معلوم کرو جو محور
 سے ۵۴ کا زاویہ بناتا ہے۔

[مبدأ کو نقطہ (۰، ۰) پر لجاؤ اور پھر ابتدائی نقطہ پر واپس لے آؤ]

۲۲۔ عمادی مسادات $ما = م لا - ۲م - ۱م$ سے دفعہ ۱۸۰ کے نتائج حاصل کرو۔

۱۸۲۔ مخروطی کی مسادات جبکہ کسی نقطہ پر کاماس اور عماد حوالہ کے محور ہوں۔ فرض کرو کہ نقطہ و پر کاماس



محور لا ہے اور عماد محور ما۔

عام مخروطی کی مسادات اس شکل کی ہے

$$۱لا + ۲ص لا + ما + ب + ۲ا + ۲ف + ج = ۰$$

لیکن چونکہ محور لا (ما = ۰) منحنی سے

ایسے دو نقاط پر ملتا ہے جو مبدأ پر منطبق

ہوتے ہیں اس لئے مسادات $۱لا + ۲ا + ۲گ + ج = ۰$ کی دونوں اصلیں صفر ہونی چاہئیں۔

$$اس لئے گ = ۰ اور ج = ۰$$

اس لئے مطلوبہ مسادات ہے

$$۱لا + ۲ص لا + ما + ب + ۲ا + ۲ف + ج = ۰ \dots (۶)$$

مسادات کی یہ شکل اکثر کارآمد ہوتی ہے صریحاً ایک فائدہ تو یہ ہے کہ محور قائم ہیں۔

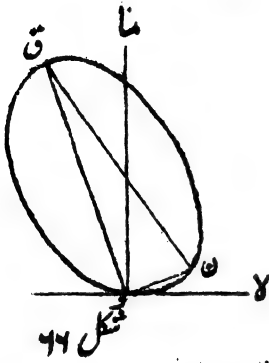
مخروطیوں کی کئی خاصیتیں ان محوروں کو استعمال کرنے سے باسانی حاصل ہو سکتی ہیں مثلاً ملاحظہ ہوں ذیل کی مثالیں۔

توضیحی مثالیں

(۱) مخروطی کے جن وتروں کے مجازی منحنی کے ایک ثابت نقطہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے وہ سب کے سب اس نقطہ میں سے گزرنیوالے عماد کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

صریحاً اس صورت میں ہمیں ثابت نقطہ پر کے ماس اور عماد کو حوالہ کے محور فرض کرنا چاہئے۔

$$فرض کرو کہ مخروطی ہے $۱لا + ۲ص لا + ما + ب + ۲ا + ۲ف + ج = ۰$$$



اور ایک وتر ہے $ل + لا + م = ا$
جو خط اس وتر کے سروں 'ن' 'ق' کو
مبدأ سے ملاتے ہیں انکی مساوات ہے
(حصہ اول کا دفعہ ۳۸ کی رو سے)

$$ا = لا + ۲ م + جب ما$$

$$+ ۲ ف (ل + لا + م) = ۰$$

$$یا لا + ۲ لا ما (ھ + ف ل)$$

$$+ ما (ج + ۲ ف م) = ۰$$

لیکن چونکہ یہ مساوات دو علی القوائم خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اس لئے
 $ا + ب + ۲ ف م = ۰$ (حصہ اول کا دفعہ ۲۹)

$$یا م = - \frac{ا + ب}{۲ ف}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ ان تمام وتروں کے لئے $م$ کی ایک ہی قیمت ہے۔
 لیکن $ل + لا + م = ا$ عماد ($لا = ۰$) سے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے
 جس کا معین مساوات $م = ا$ سے حاصل ہوتا ہے پس $ما = ا$ جو مستقل ہے
 اس لئے ثابت ہوا کہ تمام ایسے وتر عماد پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے
 گزرتے ہیں۔

(۲) مکانی $ما = ۲ لا$ کے دو علی القوائم عمادوں کے تقاطع کا طریق معلوم کرو
 فرض کرو کہ عماد کی مساوات ہے $ما = م لا - ۲ لا م - لا م$
 اگر عماد ($ھ$ ، $ک$) میں سے گزرے تو

$$ک = م ھ - ۲ لا م - لا م$$

اس سے $م$ کی تین قیمتیں ($م$ ، $م$ ، $م$) حاصل ہوتی ہیں اور اگر مساوات کو
 شکل ذیل میں لکھا جائے

$$م^۲ + \frac{ھ-۲لا}{لا} م + \frac{ک}{لا} = ۰$$

تو مساواتوں کے مسائل کی رو سے

$$(۱) \dots ۰ = م + م + م$$

$$(۲) \dots \frac{۱-۲}{۱} = م + م + م + م$$

$$\frac{۱-۲}{۱} = م + م + م$$

لیکن حسب مفروض دونوں عماد علی القوائم ہیں اس لئے $م = ۱$

$$\frac{۱-۲}{۱} = م$$

(۱) اور (۲) میں $م$ کی یہ قیمت رکھنے سے

$$\frac{۱-۲}{۱} = م + م$$

$$\frac{۱-۲}{۱} = \frac{۱-۲}{۱} (م + م) + ۱$$

$م + م$ کو ماقط کرنے سے

$$۱ - \frac{۱-۲}{۱} = \frac{۱-۲}{۱} \text{ یا } ۱ - ۱ + ۲ = ۱$$

اس لئے (۱-۲) کا طریق ہے

$$۱ - ۱ + ۲ = ۲$$

باب چہارم برتفرق مشقیں

۲۲۔ اس کے لئے شرط معلوم کر دو کہ خط لاجم ع + ماجب ع - ع = ۰

$$\text{ناقص} = \frac{ل}{۱} + \frac{ب}{۱} = ۱ \text{ کا عماد ہو}$$

۲۳۔ ناقص $= \frac{ل}{۱} + \frac{ب}{۱} = ۱$ کے وہ نقطے معلوم کر دو جن پر کے

عماد نور اعظم کے ایک نقطہ معلومہ (گ) میں سے گزریں۔

۲۴۔ ناقص $= \frac{ل}{۱} + \frac{ب}{۱} = ۱$ کے نقطہ ن پر جو عماد ہے اس پر

اتنا فاصلہ ر اندر کی طرف ناپا گیا ہے کہ در = م جہاں د اُس عمود کا طول ہے جو مرکز سے ن پر سے ماس پر کھینچا جائے۔ ن کے محدود کی رقوم میں اس نقطہ محصلہ کے محدود معلوم کر دو۔

نیز ثابت کر دو کہ اس نقطہ کا طریق ہے ناقص

$$1 = \frac{لا}{(لا - م)} + \frac{ب}{(ب - م)}$$

۲۶۔ م = لا کے اُن عمادوں کا طول دریافت کرو جو محور کے اُس نقطہ سے جس کا فاصلہ ماسک سے ا ہو کھینچے جائیں۔

۲۷۔ مکانی م = لا کے نقطہ ن پر عماد کھینچا گیا ہے اس عماد اور نقطہ ق میں سے گزرنیوالے متوازی المحور خط مستقیم سے تقاطع کا طریق معلوم کر دو جہاں ن اور ق محور کی متقابل جانبوں میں دو متساوی الفضل نقطے ہیں۔

۲۸۔ مام مخروطی کے نقطہ (لا، ب) میں سے گزرنیوالا عماد ایک ایسے نقطہ میں سے گزرتا ہے جس کے محدود

$$لا - \frac{ب}{(لا + م + ب)} = ب - \frac{لا}{(لا + م + ب)}$$

۲۹۔ ثابت کر دو کہ خط ل لا + م = ا ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ب}{لا} = 1$ کا عماد ہوگا اگر

$$\frac{لا}{ب} = \frac{ب}{(لا - م)}$$

دارہ کی صورت میں یہ شرط کیا ہو جائیگی؟

۳۰۔ اس کے لئے شرط معلوم کر دو کہ ل لا + م = ا ناکند $\frac{لا}{ب} - \frac{ب}{لا} = 1$ کا عماد

۳۱۔ مکانی کے ماسک سے ایک عماد پر عمود نکالا گیا ہے اس سے پایہ کا طریق معلوم کر دو۔

۳۲۔ مکانی م = لا کے دو نقطوں سے عماد نکالے گئے ہیں جو محور سے

زاویے ط اور ذ بناتے ہیں جہاں مس ط x مس ذ = م، ثابت کر دیکھ
عماد ایک دوسرے کے مکانی پر قطع کرتے ہیں۔

۳۳۔ مکانی ما = م والا کے عماد ن گ کا جو وسطی نقطہ ہے اس کا
طریق دریافت کرو۔

۳۴۔ $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے عماد کا جو حصہ محاور لا اور ما کے
درمیان کٹتا ہے اس کے نقطہ تنصیف کے عماد (لا، ما) ہیں، ثابت کر دو کہ
 $\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ما} = \frac{۱}{م}$ (ا - ب)

۳۵۔ ثابت کر دو کہ مکانی کے ایک ماس اور اس کے متوازی عماد کا فاصلہ
و قم ط قطع ط ہے جہاں ط وہ زاویہ ہے جو انہیں سے کوئی خط محور سے
بناتا ہے۔

۳۶۔ ن کوئی نقطہ ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ پر ہے، خط ن ق محور
لا کے متوازی کھینچا گیا ہے اور ناقص سے دوبارہ ق پر ملتا ہے
ن ر محور ما کے متوازی کھینچا گیا ہے اور منحنی سے دوبارہ ر پر ملتا
ہے، ثابت کر دو کہ خط ق ر اور ن پر کے عماد کا نقطہ تقاطع ذیل کا
ناقص ہے

$$\left(\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ما} \right) = \frac{ما}{ب} + \frac{لا}{ا}$$

۳۷۔ ون اور ون ایک مخروطی کے دو وتر ہیں جو و پر کے عماد
سے زاویے ط اور ط بناتے ہیں، ثابت کر دو کہ اگر مس ط x مس ط
مستقل ہو تو ون ن عماد کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

۳۸۔ قائم زاویہ میں ثابت کر دو کہ عماد کے اُس حصہ کی تنصیف جو محوروں کے
درمیان کٹتا ہے منحنی پر ہوتی ہے۔

۳۹۔ مخروطی کا ایک وتر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ خطوط ون، وق جو اس کے

سروں کو مخروطی کے ایک ثابت نقطہ سے ملاتے ہیں و پر کے عماد کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں ثنابت کروکہ دتراد پر کے ماس سے ایک ثابت نقطہ پر ملتا ہے۔

۳۰۔ اگر (لا، با) ناقص $\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} = 1$ پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c}} \right) \left(\frac{1}{\frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c}} \right) = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

اس سے ثابت کر دے کہ اگر (λ, μ) پر کا عماد ناقص سے دوبارہ فی پر ملے تو

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) r = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) r$$

جہاں د اُس نمود کا طول ہے جو مرکز سے ن پر کسے ماس پر کھینچا جائے اور رے ن ق

$$\frac{r}{d(r+b-r)} = 1 \text{ یعنی}$$

[ق کے محد ہیں لا۔ دلا۔ ر۔ با۔ دبا۔ ر اس کیلئے

شرط لکھو کہ قی مخنی پر واقع ہے۔

۴۱۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ کے عماد ن گ کے وسطی نقطہ کا مرتب ہے

$$\frac{f(j+1)}{r} = \frac{f(j+1)}{r-1} + \frac{f}{r}$$

۴۲۔ اگر قائم زائد کے متغیر نقطہ ن پر کا عماد منحنی سے دوبارہ قی پر ملے تو
ن قی ج ن ج جہاں ج مرکز ہے۔

۴۳۔ مکانی $m = 1$ کے تین عماد نقطہ (مہک) میں سے کہیں گئے ہیں اور محور سے بالترتیب گ، گ، گ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

۱ گ + ۱ گ + ۱ گ = ۲ (۱ + ۱) جہاں ۱ منحنی کا ماس ہے۔
 ۴۴۔ ایک نقطہ معلوم ق سے مکانی م = ۲ والا کے عماد کھینچے گئے
 ہیں جو محور سے زاویے ط، ط، ط بنا تے ہیں، ثابت کرو کہ
 س ق = ۱ ق ط ط ق ط ط ق ط ط

آزمائشی پرچہ ۴

۱۔ (۱) منحنی م لا م + ب م۔ ۲ گ لا + ۲ ف م۔ ج = ۰ کے
 نقاط (ف، ق) اور (ف، ق) کو ملانے والے وتر کی مسادات
 معلوم کرو اور اس سے نقطہ (ف، ق) پر کے ماس کی مسادات حاصل کرو۔
 (ب) نقطہ (لا، م) سے منحنی لا + م = ۱ کے ماسات کی مسادات معلوم کرو۔

اس سے مرتب دائرہ کی مسادات حاصل کرو۔
 ۲۔ ثابت کرو کہ زاویہ کے ماس کے اُس حصہ کی تصنیف جو متقاربوں کے
 درمیان کٹتا ہے نقطہ تماس پر ہوتی ہے۔
 نیز اس طرح جو مثلث کٹتا ہے اس کا رقبہ مستقل ہے۔

۳۔ مکانی م = ۲ والا کے نقطہ (۱، ۱) پر ماس کی مسادات معلوم
 کرو اور ثابت کرو کہ ایک اور صرت ایک ماس کھینچ سکتا ہے جو محور متساوی
 کے ساتھ ایک دیا ہوا زاویہ بنائے۔

ثابت کرو کہ مکانی کے وہ ماس جو ایک دوسرے سے ۵ کا زاویہ بنائیں
 ایک دوسرے کو قائم زاویہ پر قطع کرتے ہیں۔

۴۔ ابتدائی اصولوں کی بنیاد پر ۳ لا + ۲ لا م + ۲ لا م + ۱ م = ۱ کے
 اُن متوازی وتروں کے نقاط تصنیف کا طریق معلوم کرو جو م = ۳ لا
 کے متوازی ہوں۔

۵۔ مزدوج قطر، مزدوج قطع زاویہ کی تعریفات لکھو اور ثابت کرو کہ اگر
 مرکز دار تراش کے ایک قطر کے سروں پر ماس کھینچے جائیں تو وہ مزدوج قطر

کے متوازی ہوں گے۔

اُس زائد کی مساوات دریافت کرو جو $۳لا + ۴لا + ۲لا = ۳ + ۴ + ۶ = ۱۵$ کا

مزدوج ہو۔

۶۔ اگر ایک متقارب کے کسی نقطہ سے ایک زائد اور اس کے مزدوج کے

ماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاط ماس مزدوج قطروں کے سر ہوں گے۔

۷۔ ثابت کرو کہ زائد کے ایک قطر اور اس کے مزدوج کے مریوں کا فرق مستقل ہے۔

۸۔ مکانی کی مساوات دریافت کرو جبکہ اس کا ایک قطر اور قطر کے سرے کا

ماس حوالہ کے محور ہوں۔

۹۔ منحنی ورجہ دوم کی مساوات کی شکل کیا ہو جاتی ہے جبکہ اس کا کوئی ماس اور

متناظر عماد حوالہ کے محور ہوں؟

۱۰۔ ثابت کرو کہ ناقص کے ایک ماسکی وتر کے سروں پر کے عماد ایک ایسے

خط مستقیم پر ملتے ہیں جو اس وتر کے نقطہ انصیف میں سے محور کے

متوازی کھینچا جائے۔



باب پانزدہم

قطب اور قطبی

۱۸۳۔ ثابت کرو کہ کسی ایک نقطہ سے مخروطی کے دو ماس کھنچ سکتے ہیں ان کے نقاط تماس معلوم کرو۔

اس مسئلہ کا پہلا حصہ اس سے قبل ثابت ہو چکا ہے کیونکہ ہم نے دو ماسوں کی مساوات دفعہ ۳۸ میں معلوم کی ہے۔

اب ہم ایک اور طرح سے اس کی تحقیق کریں گے اور اس طرح ایک ضروری نتیجہ پہنچیں گے جو کارآمد ہوگا۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات ہے

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

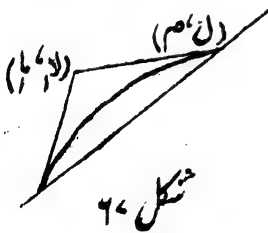
فرض کرو کہ جس نقطہ سے مخروطی کے ماس کھینچے گئے ہیں اس کے محدد (لام، ما) ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ایک ماس کا

نقطہ تماس (ل، م) ہے

تب نقطہ (ل، م) پر کے

ماس کی مسارات ہے [دفعہ ۱۲]



لا (اول + ہم + گ) + ما (ہل + ب + م + ن) + گ ل + ن م + ج =

اب یہ ماس نقطہ (لام، ما) میں سے گزرے گا اگر

لام (اول + ہم + گ) + ما (ہل + ب + م + ن) + گ ل + ن م + ج =

یا ترتیب بدلنے سے

لی (لا + ہ + ما + گ) + م (ہ + لا + ب + ما + ن) + گ (لا + ف + ما + ج) = (لو)
پس دو مجموعیوں مقادیر ل اور م میں یہ ایک مساوات ہے، ایک اور
مساوات یہ ہوگی

ل + ۲ + م + ۲ + ب + م + ۲ + ل + ۲ + ف + م + ج = (ب)
پس نقاط تماس معلوم کرنے کے لئے ہمیں دو مساواتوں (ل) اور (ب)
کو ل اور م کے لئے ایک ساتھ حل کرنا چاہئے۔

چونکہ (ل) نامعلوم مقادیر میں درجہ اول کی مساوات ہے اور (ب) درجہ
دوم کی اس لئے (ل) کی مدد سے ہم (ب) میں سے ل کو ساقط کر کے
م میں ایک مساوات درجہ دوم حاصل کر سکتے ہیں۔ اس طرح ہمیں دو حل
حاصل ہوتے ہیں جن کو اگر ہم چاہیں تو آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں، پس
اس بنا پر ہمیں دو ماس نہیں گے۔ ہم ان کے نقاط تماس کو معلوم
شدہ قرار دیتے ہیں کیونکہ ہمارے پاس ان کے محدود معلوم کرنے کے لئے
کافی مساواتیں موجود ہیں۔

۱۸۴۔ ان مساواتوں کی ہندسی تعبیر۔ مذکورہ بالا دو مساواتوں
(ل) اور (ب) کو نہایت آسان ہندسی معنی پہنائے جا سکتے ہیں۔
(ب) کا مفہوم یہ ہے کہ نقطہ (ل، م) مخروطی پر واقع ہے لیکن مساوات
(ل) اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ نقطہ تماس (ل، م) جس خط مستقیم پر
واقع ہے اس کی مساوات

لا (لا + ہ + ما + گ) + م (ہ + لا + ب + ما + ن) + گ (لا + ف + ما + ج) =

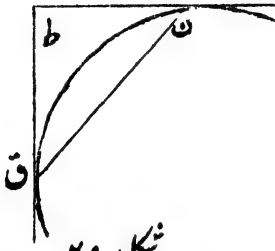
ہے۔ اس سے ہم فوراً یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ نقاط تماس وہ نقطے ہیں جہاں
یہ خط مخروطی کو قطع کرتا ہے۔

پس اگر نقطہ (لا، ما) سے مخروطی کے ماس کھینچے جائیں تو ان ماسوں کے
نقاط تماس کے خط وصل کی مساوات

لا (لا + ہ + ما + گ) + م (ہ + لا + ب + ما + ن) + گ (لا + ف + ما + ج) = (۱)

ہے۔

[یہ مساوات دونوں صورتوں میں درست رہتی ہے خواہ محور قائم ہوں یا مائل]
 ۱۸۵ - قطبی - تعریف - اگر کسی نقطہ معلومہ سے مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو ان مماسوں کے نقاط تماس کے ملائے والے خط کو بلحاظ اس مخروطی کے اس نقطہ کا قطبی کہتے ہیں۔
 شکل ۶۸ میں ط کا قطبی ن ق



قطب - اگر مخروطی کے کسی وتر کے سروں میں سے مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو ان مماسوں کا نقطہ تقاطع وتر مذکور کا قطب کہلاتا ہے۔ شکل ۶۸ میں ن ق کا قطب ط ہے۔

پس اگر ایک خط ایک نقطہ کا قطبی ہو تو وہ نقطہ اس خط کا قطب ہوگا۔
 نوٹ - احتیاط سے دیکھا جائے کہ قطبی کی مساوات بعینہ اُس شکل کی ہے جس شکل کی کہ مماس کی مساوات ہے۔ پس اس کو الگ یاد رکھنے کی ضرورت نہیں۔ ان دونوں خطوط میں ضروری فرق یہ ہے کہ مماس کی صورت میں نقطہ (لام، مام) منحنی پر واقع تھا لیکن اس صورت میں نقطہ پر اس قسم کی کوئی قید نہیں لگائی گئی۔
 پس ظاہر ہے کہ جب نقطہ منحنی پر واقع ہو تو اس کا قطبی وہی ہو گا جو اس نقطہ پر کا مماس ہے۔

ہندسی نقطہ نظر سے بھی یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ جیسے نقطہ ط منحنی کے نزدیک آتا جاتا ہے، مماسوں کے نقاط تماس بھی ایک دوسرے کے قریب آتے جاتے ہیں اور بالآخر جب نقطہ ط عین منحنی پر واقع ہوتا ہے تو نقاط مذکورہ کو ملائے والا خط انتہا میں مماس بن جاتا ہے۔
 پس مماس قطبی کی ایک خاص صورت ہے۔

۱۸۶ - اسی سلسلہ میں ایک اور بات قابل ذکر ہے جس کی طرف

طالب علم کو توجہ کرنی چاہئے۔ ہم نے اوپر بیان کیا ہے کہ کسی نقطہ کے قطبی سے وہ خط مراد ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنے والے ماسوں کے نقاط تماس کو وصل کرے۔ اب اگر فرضی قطع ناقص ہو اور نقطہ اس کے اندر واقع ہو تو ظاہر ہے کہ تماس خیالی ہوں گے لیکن قطبی کی مساوات کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ یہ اس صورت میں ایک حقیقی خط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ اس امر کی تشریح یوں ہو سکتی ہے کہ اگرچہ خط حقیقی ہے لیکن یہ منحنی کو حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا، اس لئے نقاط تماس خیالی ہیں اگرچہ ان کو ملانے والا خط حقیقی ہے۔

عبدی مثال کے ذریعہ ہم اس کی فرید توضیح کرتے ہیں، نقطہ (۳، ۳) قطع ناقص $۲ + ۲ = ۳۶$ کے اندر واقع ہے، اس لئے منحنی کے وہ تماس جو اس نقطہ میں سے گزریں گے خیالی ہوں گے۔ ہم یہاں فی الحقیقت نقاط تماس کو معلوم کرتے ہیں اور ان سے ایک خط وصل کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ (لام، با) ایک نقطہ تماس ہے، تب اس پر کے تماس کی مساوات

$$۲ + ۲ = ۳۶ \text{ ہے، اس لئے } ۳ + ۲ = ۳۶$$

یعنی $۲ + ۲ = ۱۲$ پس ہمیں وہ مساواتوں

$$۲ + ۲ = ۱۲ \text{، } ۲ + ۲ = ۳۶$$

کو ایک ساتھ حل کرنا چاہئے

لام کو ساٹھ کرنے اور با میں درجہ دوم کی مساوات کو حل کرنے سے

$$۲ = ۳ \pm \sqrt{۲}$$

لہذا پہلی مساوات سے لام = $۲ - \sqrt{۲}$

پس نقاط تماس (۳، $۲ - \sqrt{۲}$) اور (۳، $۲ + \sqrt{۲}$)

ہیں، اور یہ خیالی ہیں جو ہمیں پہلے ہی سے معلوم تھا۔

ان کے ملانے والے خط کی مساوات

$$\frac{۲ - \sqrt{۲} + ۳ - ۶}{۲ - \sqrt{۲} - ۳} = \frac{۲ - \sqrt{۲} - ۳ - ۶}{۲ - \sqrt{۲} - ۳}$$

ہے جو اختصار کے بعد لا + ۲ ما - ۱۲ = ۰ ہو جاتی ہے اور ایک حقیقی خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۸۷۔ جو اشارات دفعہ گذشتہ میں درج کئے گئے ہیں وہ کسی دئے ہوئے خط مستقیم کے قطع کے لئے بھی صادق آتے ہیں۔ ہم نے کسی خط کے قطب کی تعریف یہ کی ہے کہ قطب ان نقطوں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ہے جن پر خط مذکور منحنی کو قطع کرتا ہے۔ اگر خط مذکور منحنی سے نہ ملے تو ماس خیالی ہوں گے لیکن ہم دیکھیں گے کہ اس صورت میں بھی وہ ایک دوسرے کو حقیقی نقطہ پر قطع کر سکتے اور خط مذکور کا قطب حقیقی ہو گا۔ مثلاً خط لا + ۲ ما = ۱۲ قطع ناقص لا + ۲ ما = ۳۶ کو حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا۔ بائیں ہمہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ اس خط کا قطب حقیقی نقطہ (۳۶، ۳۶) ہے۔

۱۸۸۔ سادہ صورتوں میں قطبی کی مساوات۔

ذیل کی خاص صورتوں میں ہم قطبیوں کی مساواتیں یہاں درج کرتے ہیں۔

قطع مکانی ما - ۲ لا = ۰، قطبی ما - ۲ (لا + لا) = ۰ (۲)

قطع ناقص لا + ما = ۱، قطبی لا + لا + ما = ۱ (۳)

قطع زائد لا - ما = ۱، قطبی لا - لا - ما = ۱ (۴)

قطع زائد لا + ما = ج، قطبی لا + لا + ما = ج (۵)

سب صورتوں میں قطبی کی مساوات ہر دو قائمہ اورائل محوروں کے لئے درست رہتی ہے کیونکہ ہم نے اس کو ماس کی مساوات سے اخذ کیا ہے جو مائل محوروں کی صورت میں بھی درست ہے۔

اب ہم ابتدائی اصولوں کی بناء پر قطع ناقص لا + ما = ۱ کے

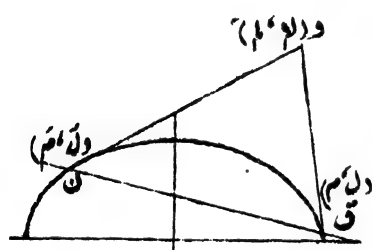
لحاظ سے نقطہ (لا، با) کا قطبی معلوم کریں گے۔

[انتباہ۔ قطعہ زائد لا، با = ج کی صورت میں یہ بات قابل غور ہے کہ اگرچہ (لا، با) پر کے ماس کی مساوات دونوں شکلوں لا، با + لا، با = ج اور لا، با + لا، با = ۲ میں لکھی جاسکتی ہے لیکن موخر الذکر مساوات با، با قطبی کو تعبیر نہیں کرتی]

۱۸۹۔ کسی نقطہ کا قطبی لحاظ لا، با + با، لا = ۱ کے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ معلومہ و (لا، با) ہے اور و میں سے جو ماسات ون، وق کہنے گئے ہیں ان کے نقاط تماس (ل، م)، (ل، م) ہیں۔

مساوات لا، لا + لا، با = ۱ (ج)



پر غور کرو۔

یہ درجہ اول کی مساوات ہے اس لئے کسی نہ کسی خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

اب ن اور ق پر کے ماسوں کی مساواتیں یہ ہیں

$$\frac{لا، لا}{و، لا} + \frac{لا، با}{و، با} = ۱ \text{ اور } \frac{لا، لا}{و، لا} + \frac{لا، با}{و، با} = ۱$$

اور چونکہ یہ ماس (لا، با) میں سے گزرتے ہیں، اس لئے

$$\frac{لا، لا}{و، لا} + \frac{لا، با}{و، با} = ۱ \text{ اور } \frac{لا، لا}{و، لا} + \frac{لا، با}{و، با} = ۱ \text{ (د)}$$

مساواتوں (د) سے ظاہر ہے کہ مساوات (ج) بالترتیب ہر دو جوڑوں

لا = ل، م = م اور لا = ل، م = م سے پوری ہوتی ہے۔

اس لئے $\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ سے جو خط مستقیم تعبیر ہوتا ہے وہ

(ل، م) (ل، م) میں سے گزرتا ہے یعنی یہ خط مستقیم ن ق ہے۔
دوسرے الفاظ میں (لا، م) کے قطبی کی مساوات حسب ذیل

ہے:-

$$\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \dots\dots\dots (۳)$$

۱۹۰۔ قطع مکانی کے لئے ہم دفعات ۱۸۳، ۱۸۴ کا عام طریقہ استعمال کر سکتے ہیں یا دفعہ ۱۸۹ کا طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ یہاں ہم موخر الزکر طریقہ استعمال کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ نقطہ و (لا، با) ہے اور و میں سے قطع مکانی کے مماس ون، وق کھینچے گئے ہیں اور ان کے نقاط تقاطع بالترتیب (ل، م)، (ل، م) ہیں۔ مساوات

$$ما = ۲ (لا + ل) \dots\dots\dots (ج)$$

پر غور کرو۔ یہ درجہ اول کی مساوات ہے اس لئے کسی نہ کسی خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اب (ل، م) پر کے مماس کی مساوات $ما = ۲ (لا + ل)$ ہے اور یہ (لا، با) میں سے گزرتا ہے۔

$$ل = ۲ (لا + ل)$$

پس جس سے ظاہر ہے کہ (ل، م) خط مستقیم (ج) پر واقع ہے، اسی طرح (ل، م) بھی اسی خط مستقیم پر ہے۔ پس مساوات (ج) اس خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقاط مماس کو وصل کرتا ہے۔

۱۹۱۔ مخروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی مخروطی کے اس وتر کے متوازی ہوتا ہے جس کی تنصیف نقطہ مذکور ہو۔

دفعہ ۸۴ کی روش سے نقطہ (لا، با) کا قطبی

$$لا (لا، با) + (لا، با) = ۰$$

۴۔ دفعات ۱۸۳، ۱۸۴ کے طریقہ کے مطابق ابتدائی اصولوں کی بنا پر دفعہ ۱۸۸ کی صورتوں میں قطبیوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

۵۔ اگر بلحاظ مخفی $\frac{لا}{ب} + \frac{ب}{لا} = ۱$ کے نقطہ ن (لا، ب) کے قطبی پر نقطہ مذکورہ سے عمود کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس عمود کی مساوات

$$\frac{لا}{ب} - \frac{ب}{لا} = ۱ - ب = ۱ - ب$$

اگر (لا، ب) مخروطی پر واقع ہو تو بتاؤ کہ اس صورت میں یہ مساوات کیا ہو جائے گی۔

۶۔ مشق ۵ کا عمود محور اعظم سے گ پر ملتا ہے اور ن ل محور اعظم پر عمود کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ج گ = ز \times ج ل$$

۷۔ بلحاظ قطع مکانی $۱۴ = ۱ (لا + لا)$ کے نقطہ ن (لا، ب) کے قطبی کی مساوات معلوم کرو۔

اگر قطبی مرتب سے ت پہلے تو ت کو مبدا سے وصل کرنے والے خط کی مساوات دریافت کرو۔ پھر ماسکہ کو مبدا مان کر ثابت کرو کہ زاویہ ن س ت قائم ہے۔

[نوٹ۔ ملاحظہ ہو کہ مرتب کی مساوات $لا + لا = ۱$ ہے۔]

۸۔ اس امر کی تصدیق کرو کہ اگرچہ نقطہ (۱، ۲) سے مخروطی لا = ۱ کے ماس خیالی ہیں لیکن دتر ماس حقیقی ہے اور اس کی مساوات $لا = ۲ = ۲$ ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ نقطہ (لا، ب) سے قطع زائد $\frac{لا}{ب} - \frac{ب}{لا} = ۱$ کے جو ماس کھینچ سکتے ہیں وہ حقیقی اور الگ الگ اسی صورت میں ہوں گے

جبکہ $\frac{لا}{ب} - \frac{ب}{لا} > ۱$ لیکن ان کا دتر ماس خط مستقیم لا = ۱ - $\frac{لا}{ب} = ۱ - \frac{لا}{ب}$ ہے۔

میں لیں تو مسئلہ مذکورہ آسانی سے ثابت ہو جاتا ہے۔
کیونکہ اس صورت میں (لا، ما) کا قطبی

$$1 = \frac{لا}{ما} + \frac{لا}{ما}$$

ہے، اگر یہ قطبی (لا، ما) میں سے گزرے تو

$$1 = \frac{لا}{ما} + \frac{لا}{ما}$$

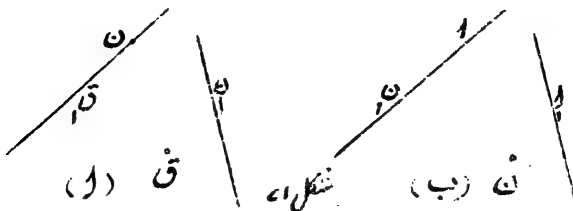
یہ ربط صریحاً متشاکل ہے، اس لئے (لا، ما) کا قطبی (لا، ما) میں سے گذرتا ہے۔

مشق

۱۰۔ اوپر کا مسئلہ دفعہ ۸۸ کی باقی سادہ صورتوں کے لئے ثابت کرو۔

۱۹۳۔ مزدوج نقطے — تعریف — اگر دو نقطے ایسے ہوں کہ مخروطی کے لحاظ سے ہر ایک کا قطبی دوسرے نقطے میں سے گذرے تو یہ نقطے لمحاظ مخروطی مذکور کے مزدوج نقطے کہلاتے ہیں۔

مزدوج خطوط — اسی طرح سے اگر دو خط ایسے ہوں کہ ان میں سے ہر ایک کا قطب دوسرے خط پر واقع ہو تو ان خطوں کو مزدوج خط کہتے ہیں۔ اس تعریف میں ایک مسئلہ ثبوت طلب ہے جسے ہم حسب ذیل ثابت کرتے ہیں۔
۱۹۴۔ اگر خط ن کا قطب ن خط ق پر واقع ہو تو خط ق کا قطب ق خط ن پر واقع ہو گا۔

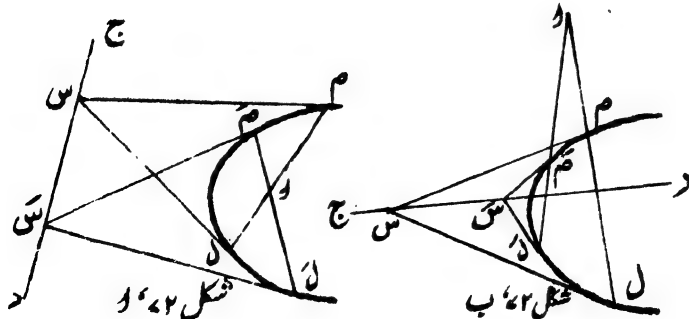


ق کا قطبی (دیکھو شکل ۱۷۱) ق حسب مفروض ن میں سے گزرتا ہے، لہذا ن کا قطبی ن ق میں سے گزرے گا اور یہی ثابت کرنا تھا۔
[شکل بالا میں نقطہ ق کو ارادۂ ن سے الگ رکھا گیا ہے تاکہ طالب علم شکل ہی سے اس نتیجہ کو درست تسلیم کر لینے کی طرف راغب نہ ہو جو حقیقت اسے ثابت کرنا ہے]

۱۹۵۔ اگر ایک خط ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے تو اس کا قطب ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ ثابت نقطہ ۱۷۱ ہے (دیکھو شکل ۱۷۱ ب) اور اس کا قطبی ۱۷۱ ہے نیز فرض کرو کہ ن کوئی خط ہے جو ۱۷۱ میں سے گزرتا ہے اور اس کا قطب ن ہے۔ تب ن کا قطبی ۱۷۱ میں سے گزرتا ہے، لہذا ۱۷۱ کا قطبی ن میں سے گزرتا ہے، یعنی ۱۷۱ ن میں سے گزرتا ہے یعنی ن، ۱۷۱ پر واقع ہے، لہذا ن کا قطب ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم یعنی ۱۷۱ کے قطبی پر واقع ہوتا ہے۔ (ملاحظہ ہو دفعہ گذشتہ کے آخر کا نوٹ)

۱۹۶۔ مسئلہ بالا کی مدد سے ہندسی طور پر کسی نقطہ کے قطبی کا کھینچنا۔
دفعہ ۱۹۵ کا نتیجہ نہایت ضروری ہے کیونکہ اس کی مدد سے کسی نقطہ کا قطبی کھینچا جاسکتا ہے۔



کیونکہ نقطہ ۱۷۱ میں سے خواہ یہ منی کے اندر ہو جیسا شکل (۱۷۱ ب) میں یا منی کے

باہر ہو یا داخل (۲) باہر ہیں ہم ایسے وتر کھینچ سکتے ہیں جو مخروطی سے حقیقی نقطوں مثلاً م، ل، م، ل پر ملیں اور ان دوتروں کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کو م، س، س پر قطع کرتے ہیں جن کو ملانے سے مطلوبہ قطبی حاصل ہوتا ہے۔

اس سے ہمیں قطبی کی ایک اور تعریف حاصل ہوتی ہے۔ پہلے ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ جوں جوں کوئی وتر ایک ثابت نقطہ کے گرد گھومتا ہے اس کے سروں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ اس ثابت خط کو نقطہ مذکورہ کا قطبی کہا جاسکتا ہے۔

اس طریقہ کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اس میں ہمیں خیالی مقادیر کا استعمال نہیں کرنا پڑتا، لیکن چونکہ ہندسہ تحلیلی کے اعلیٰ حصوں میں یہ مقادیر بکثرت استعمال ہوتی ہیں اس لئے ابھی سے ہمیں ان کی ماہیت سے واقف ہونے کی کوشش کرنی چاہئے۔

۱۹۷۔ اگر ایک نقطہ ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو اس کا قطبی ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

یہ صاف ظاہر ہے کہ اس نقطہ کا قطبی ہمیشہ اس ثابت خط کے قطب میں سے گزرتا ہے۔

۱۹۸۔ مسئلہ بالا کی مدد سے خط مستقیم کے قطب معلوم کرنے کا ہندسی عمل۔

دفعہ ۱۹۷ کی مدد سے ہم تمام صورتوں میں ایک خط ج د کے قطب

کو ہندسی طریق پر معلوم کر سکتے ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۹۶ میں قطبی معلوم

کئے گئے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اس خط پر کے بعض نقطے مثلاً س، م، س

منحنی سے باہر ہوں گے اور ان سے منحنی کے ماس س، م، س، ل

اور م، م، ل، م، ل کھینچ سکیں گے، ان ماسوں کے اتار ماس،

م، ل، م، ل کا نقطہ تقاطع مطلوبہ قطب ہوگا۔ پس یہ قطب اس طرح

ہندسی عمل سے باسانی کھینچ سکتا ہے۔

اسی طرح سے ہم اس کو خط کے قطب کی تعریف تصور کر سکتے ہیں اور

دفعہ ۱۹۶ کے اشارات اس پر بھی صادق آتے ہیں۔
 ۱۹۹۔ ایک خط مستقیم کے قطب کے محدود معلوم کرو۔

ہم دو مختلف طریقے استعمال کر سکتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ خط معلومہ پر دو ثابت نقطے $ل$ اور $ب$ ہیں، تب دفعہ ۱۹۶ کی رو سے $ل$ اور $ب$ کے قطبی دونوں خط $ل$ ب کے قطب میں سے گذرتے ہیں، اس لئے ان کا نقطہ تقاطع قطب مطلوبہ ہے، پس ہم مطلوبہ خط مستقیم پر کوئی دو نقطے منتخب کرتے ہیں، ان کے قطبیوں کی مساواتیں لکھ لیتے ہیں اور ان کو حل کرنے سے ان کا نقطہ تقاطع معلوم کرتے ہیں۔

(۲) زیادہ عام طریقہ یہ ہے کہ ہم فرض کرتے ہیں کہ مطلوبہ نقطہ $(ل، ب)$ ہے اور پھر $لا، با$ کی وہ قیمتیں منتخب کرتے ہیں جن سے $(لا، با)$ کا قطبی وہی حاصل ہو جو معلومہ خط مستقیم ہے۔

مثال ۱۔ خط مستقیم $ل$ لا + $م$ = $ما$ کا قطب بلحاظ ناقص
 $\frac{لا}{ل} + \frac{ما}{ب} = ا$ کے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $(لا، با)$ مطلوبہ قطب ہے۔ تب معلومہ خط مستقیم وہی ہوگا جو $\frac{لا}{ل} + \frac{ما}{ب} = ا$ ہے، سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$ل = \frac{لا}{ل}، م = \frac{ما}{ب}$$

نتیجہ صریح = $ل$ اور $ما = ب$ م
 شرط یہ ہے کہ $ل + ب = ا$ م

(۲) اسکے لئے شرط معلوم کرو کہ خطوط $ل$ لا + $م$ = $ما$ اور $ل$ لا + $م$ = $ا$ مندرجہ بالا ناقص کے لحاظ سے مزدوج ہوں۔

یہاں دوسرے خط کا قطب پہلے خط پر ہونا چاہئے یعنی نقطہ

۱۴۔ بلحاظ منحنی ۴ لا + ۹ ما = ۳۶ کے نقاط ن (۳، ۳) اور ق (۳، ۳) کے قطبیوں کی مساواتیں معلوم کرو۔ قطبیوں کے نقطہ تقاطع کے محدود معلوم کرو پھر اس کے قطبی کی مساوات معلوم کرو اور یہ ثابت کرنے سے دفعہ ۹۲ کی تصدیق کرو کہ یہ قطبی نقاط ن اور ق کا خط وصل ہے۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ مخروطی لا + لا + ۲ ح لا + ما + ب ما = ا کے لحاظ سے

خط لا + ح ما = ا کے قطب کے محدود $\frac{ب ل - ح ح م}{ب ب - ح ح م}$ ، $\frac{ب ل - ح ح م}{ب ب - ح ح م}$ ہیں

۱۶۔ شق ماقبل سے مستنبط کرو کہ خطوط لا + ح ما = ا اور لا + ح ما = ا باہم مزدوج ہوں گے اگر ب ل ل - ح (ل م + ل م) + ح م = ب ب - ح م۔
۱۷۔ شق ۱۶ کے نتیجہ سے خط لا + ح ما = ا کے ماس ہونے کی شرط معلوم کرو۔

۲۰۰۔ مرکز کا قطبی۔ لاتناہی پر کا خط۔ عام مخروطی کے لحاظ سے نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات

لا (لا + ح ما + گ) + ما (ح لا + ب ما + ف) + گ (لا + ف + ح) = ۰ ہے
اب اگر (لا، ما) مخروطی کا مرکز ہو تو

لا + ح ما + گ = ۰ اور ح لا + ب ما + ف = ۰ (دفعہ ۹۶)

پس مساوات بالا کی شکل یہ ہو جاتی ہے

(لا + ح ما + گ) + (لا + ح ما + گ) + (لا + ح ما + گ) = ۰ جہاں ن = گ لا + ف + ح

اس مساوات میں نہ لا شامل ہوتا ہے نہ ما، پس یہ دیکھنا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ اس عجیب و غریب نتیجہ کا کیا مفہوم ہے۔

اولاً ہم جانتے ہیں کہ ہر خط مستقیم کی مساوات کو لا + ح ما = ا کی شکل میں تحلیل کیا جاسکتا ہے اور ل اور م کی مختلف قیمتوں کیلئے اس سے مختلف خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں۔ نیز محوروں کے محوروں پر اس خط کے نقطوں بالترتیب ل اور م ہیں۔ پس ل اور م جتنے چھوٹے ہوں گے اتنے ہی بڑے نقطوں ہوں گے اور ابتدا سے اتنا ہی زیادہ دور خط مستقیم ہوگا۔ اور بالآخر جب ل م

بالکل صفر ہو جائیگا تو یہ دونوں نقطوں کے لائنیں ہوں گی اور خط مستقیم بالتمام لائنیں ہوں گی۔ لہذا جب لا اور ما کے صفر ہوں تو ہم مساوات کو $لا + ص = ما$ کی شکل میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں لا اور ص دونوں صفر ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک خط مستقیم کی مساوات میں لا اور ما دونوں کے صفر صفر ہوں تو خط مستقیم بالتمام لائنیں ہوں گے۔ اس خط کو لائنیں ہوں گے کا خط کہتے ہیں۔

پس مرکز کے قطبی کی مساوات کے یہ معنی ہیں کہ مرکز کا قطبی لائنیں ہوں گے کا خط ہے،

یا بالفاظ دیگر لائنیں ہوں گے کا خط کا قطب مرکز ہے۔

سطور بالا سے ان امور کی جو ہم نے متعارفوں کے بارے میں اس سے پہلے بیان کی ہیں تشریح اور تصدیق ہوتی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ متقارب ایک خط مستقیم ہے جو منحنی سے لائنیں ہوں گے کے دو نقاط پر ملتا ہے یعنی یہ منحنی کا ایسا تماس ہے جس کا نقطہ تماس لائنیں ہوں گے کا خط ہے۔ لیکن دونوں متقارب مرکز پر ملتے ہیں، لہذا متقارب منحنی کے وہ تماس ہیں جو مرکز میں سے گزرتے جائیں۔ پس مرکز کا قطبی جو ان تماسوں کے نقاط تماس کو ملاتا ہے بالتمام لائنیں ہوں گے کا خط ہے۔

توضیحی مثالیں

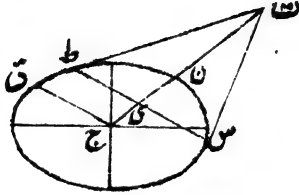
(۱) اگر ایک قطع ناقص کے لمحا سے (جس کا مرکز ج ہو) نقطہ ت کا

قطبی خط ج ت سے سی پر ملے اور ج ت منحنی سے ن پر ملے تو ثابت کر دو کہ

$$ج ی \times ج ت = ج ن$$

ج ن اور اس کے مزدوج قطر ج ن کو محور انویٹیب نقطہ ت

کے محدود (لام) ہوں گے جہاں ج ت = لا اور قطع ناقص کی مساوات
کی شکل $\frac{لا}{۲} + \frac{پ}{۲} = ۱$ ہوگی جہاں لا = ج ن اور ب = ج ق



شکل ۳

اب ت کا قطبی ہے $\frac{لا}{۲} = ۱$ لہذا می پر لا = $\frac{لا}{۲}$ یعنی
ج می = $\frac{لا}{۲}$

اس لئے ج می x ج ت = لا = ج ن
نوٹ - چونکہ طاس کی مساوات لا = $\frac{لا}{۲}$ ہے، اس لئے طاس
متوازی ہے ق ج کے جس کی مساوات لا = ہے، بالفاظ دیگر
ت کا قطبی مزدوج قطر کے متوازی ہے۔ اب ت ط، ت اس
ماس ہیں اور ج ن، طاس کی جو ج ق ہے متوازی ہے
تقسیم کرتا ہے۔ اس لئے ہم فوراً اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر کسی
نقطہ سے ماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاط تماس کو ملانے والا دتراس
خط سے جو نقطہ مذکورہ کو مرکز سے وصل کرتا ہے دو مساوی حصوں میں
تقسیم ہو جاتا ہے۔

(۲) ایک مخروطی لو کے مماسات کے قطبوں کا طریق بلحاظ ایک اور
مخروطی ب کے معلوم کرو۔

اس طرح کے سوالات اکثر بحث میں آتے ہیں۔ فرض کرو کہ لا، ماس ایک
قطب ہے، تب حسب مفروض اس کا قطبی بلحاظ ب کے لو کو س کرتا ہے۔
پس ہم پہلے قطبی کی مساوات لکھ لیتے ہیں، پھر وہ شرط معلوم کرتے ہیں

جو اس قطبی کو a سے مس کرنے کے لئے پوری کرنی چاہئے اس طرح ہمیں
(لام، لم) میں ایک ربط حاصل ہوتا ہے جو مطلوبہ طریق کی مساوات ہے۔
(طالب علم کو چاہئے کہ حل کے اس طریقہ کو بخوبی ذہن نشین
کرنے)

مثلاً مخروطی $\frac{لا}{عم} + \frac{با}{بہ} = 1$ کے عمادات کے قطبوں کا طریق
بجائے مخروطی $1 لا + ۲ م + ۳ ب + ۴ گ + ۵ ف + ۶ ج = ۰$ کے
معلوم کرو۔

فرض کرو کہ (لام، لم) ایک قطب ہے، اس کا قطبی

لا (لا + م + گ) + م (م + ب + ف) + گ (گ + ب + ج) = ۰

ہے اور حسب مفروض اسے $\frac{لا}{عم} + \frac{با}{بہ} = 1$ کو مس کرنا چاہئے۔

اب خط ل لا + م + م + ۱ = ۰ مؤخر الذکر مخروطی کو مس کرے گا اگر
عم ل + بہ م = ۱

لیکن اس صورت میں $\frac{لا + م + م + ۱}{عم ل + بہ م} = 1$ اور $\frac{م + ب + ف}{گ + ب + ج} = 1$

∴ عم (لا + م + گ) + بہ (م + ب + ف) = (گ + ب + ج) ×

حرف کے آخری ہندسوں کو حذف کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ طریق ایک
مخروطی ہے جس کی مساوات ہے

عم (لا + م + گ) + بہ (م + ب + ف) = (گ + ب + ج) ×

(۲) قطع ناقص $\frac{لا}{را} + \frac{با}{بہ} = 1$ کے عمادوں کے قطبوں کا طریق
دریافت کرو۔

(لا، ما) پر کے عادی مساوات ہے

$$\frac{لا}{لا} - \frac{ب}{ب} = \frac{ق}{ق} - \frac{ب}{ب} \dots \dots \dots (۱)$$

اگر اس خط کا قطب (ن، ق) ہو تو یہ خط مساوات ذیل سے بھی تعبیر ہو سکتا ہے

$$۱ = \frac{لاق}{ب} + \frac{لان}{ق}$$

$$\text{اس لئے } \frac{لاق}{ب} / \frac{لان}{ق} = - \frac{ق}{ب} / \frac{ق}{ب} = - \frac{ق}{ب} = \frac{ب}{ق}$$

$$\text{جس سے } لا = \frac{لاق}{ب} ، \frac{لان}{ق} = - \frac{ب}{ق} \dots \dots \dots (۱)$$

لیکن (لا، ما) ناقص پر ہے اس لئے

$$۱ = \frac{لاق}{ب} + \frac{لان}{ق}$$

$$۱ = \left\{ \frac{لاق}{ب} \right\} + \left\{ - \frac{لان}{ق} \right\} = \frac{لاق}{ب} - \frac{لان}{ق}$$

$$\text{یا } لا ق = (لاق - لان) = ق - ب$$

پس (ن، ق) کا طریق ہے

$$لا ما = (لاق - لان) = ق - ب$$

باب پانزدہم پر متفرق مشقیں

۱۸۔ ابتدائی اصولوں سے نقطہ (۱، ۱) کا قطبی بمطابق مکانی ما = ۲ لاکے معلوم کرو۔

$$۱۹۔ مخروطیوں لا ما + لا ما = ۲ ، لا ما + لا ما = ۱$$

$$لا - ما = ۱ ، لا + ما = ۲ ، لا ما + لا ما = ۲ ، لا ما + لا ما = ۱$$

کے لحاظ سے نقطہ (۲، ۱) کے قطبیوں کی مساواتیں لکھو۔

۲۰۔ مخروطیوں (۱) $\frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} = ۱$ ، (۲) $ما = ۴ لا$ (۳) $لا = ۴ ج$

کے لحاظ سے خط $لا + م = ۱$ کے قطب کے محدد لکھو۔

۲۱۔ مشق ۲۰ کے نتائج سے وہ شرائط حاصل کرو کہ خطوط $لا + م = ۱$ ل $لا + م = ۱$ $ما = ۱$ مشق ۲۰ کی مخروطیوں کے لحاظ سے مزدوج ہوں۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ ناقص کے ماسک کا قطبی اُس کا متناظر مرتب ہوتا ہے۔

۲۳۔ مکانی کی صورت میں شق ماقبل کا مسئلہ کیا صورت اختیار کرے گا؟

۲۴۔ ایک نقطہ $ت (لا، ما)$ سے مکانی $ما = ۴ لا$ کے ماسس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ وتر تماس کے وسطی نقطہ $م$ کے

محدد $لا = \frac{لا - ۲ لا}{۲}$ ، $ما = ما$ ہیں۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ مشق ۲۴ کا خط $ت م$ محور کے متوازی ہے۔

۲۶۔ قطع مکانی کے لحاظ سے نقطہ $ت$ کا قطبی $ت$ میں سے گزرنیوالے قطر سے $ص$ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ت ص$ کا وسطی نقطہ منحنی پر

واقع ہوتا ہے اور اس نقطہ پر کا ماس $ت$ کے قطبی کے متوازی ہے۔

۲۷۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص اور اس کے امدادی دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی ناقص کے محور اعظم پر ملتے ہیں۔

۲۸۔ ایک خط معلومہ پر کے نقطوں میں سے ایک دائرہ کے ماسس کے

زوج کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے دائرہ تماس ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

۲۹۔ اگر ناقصوں کا ایک نظام ایسا ہو کہ ان کا محور اعظم مشترک ہو تو

ثابت کرو کہ ان ناقصوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے جو قطبی ہوں گے

وہ سب محور اعظم پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں گے۔

اس مسئلہ کو وسعت دیکر دیکھو کہ یہ اس صورت میں جبکہ سب

ناقص ایک مشترک قطر کے سروں پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں
کیا شکل اختیار کرتا ہے۔

۳۰۔ خط لا جم عہ + ماجب عہ - ع =۔ کا قطب بلحاظ مکانی ما = م ولا
کے معلوم کرو۔

۳۱۔ نقطہ (لا، ما) کا طریق معلوم کرو جبکہ اس کا قطبی بلحاظ مکانی ما = م ولا
کے خط لا + م = ا کے متوازی ہو۔

۳۲۔ اگر کسی نقطہ کا قطبی بلحاظ لا = $\frac{لا}{ب}$ - $\frac{ما}{ب}$ = ۱ کے منحنی کے مزدوج

محور کے ایک سرے میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ قطب مزدوج
قطع زائد کے اس مماس پر واقع ہو گا جو مذکورہ محور کے دوسرے سرے میں
سے کھینچا جائے۔

۳۳۔ دائرہ لا + ما = لا کے لحاظ سے دائرہ لا + ما - ۲ لا =۔ کے
مماسوں کے قطبوں کا طریق دریافت کرو۔

۳۴۔ اگر ایک خط مستقیم ایک ایسے دائرہ کو مس کرے جس کا مرکز
ایک مکانی کے رأس پر ہو اور جس کا قطر وتر خاص کے مساوی ہو تو
ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کے قطب کا طریق بلحاظ مکانی مذکور کے قائم
ہندہ لولی ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ دائرہ (لا - با) + ما = ج کے مماسات کے
قطبوں کا طریق بلحاظ دائرہ لا + ما = لا کے مخروطی

(ج - با) لا + ج + ما + ۲ لا - با = لا ہے۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ بلحاظ ان مخروطی تراشوں کے جو لا + ما + ۲ لا = ا
میں ک کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتی ہیں نقطہ (ف، گ)
کے قطبی ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

اگر (ف، گ) ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو ثابت
کرو کہ قطبوں کا نقطہ تقاطع ایک ثابت قطع زائد پر حرکت کرتا ہے

۳۷۔ بلحاظ $\frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} = ا$ کے ایک نقطہ کا قطبی ایک قطع زائد کو

مس کرتا ہے جس کی مساوات $\frac{لا}{را} - \frac{ما}{ب} = ا$ ہے، ثابت کرو کہ نقطہ

کا طریق قطع زائد ہے۔

۳۸۔ ایک نقطہ ن سے ایک قطع ناقص کے ماس کھینچے گئے ہیں

اور نقطہ مذکورہ سے وتر تماس پر عمود ن ل نکالا گیا ہے۔ اگر ن ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ ل کا طریق قائم ہندوئی ہے۔

۳۹۔ اگر ایک نقطہ ن کے قطبی بلحاظ دو ثابت دائروں کے کھینچے جائیں اور قطبیوں کا تقاطع ق ہو تو خط ن ق کے نقطہ تنصیف

کا طریق دریافت کرو۔

۴۰۔ اگر ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرے کہ اس کا قطب

بلحاظ ایک ثابت دائرہ کے ایک معلومہ خط مستقیم پر حرکت کرے،

تو ثابت کرو کہ اول الذکر خط مستقیم کا قطب بلحاظ کسی اور دائرہ کے بھی

ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے گا۔

۴۱۔ ایک بیرونی نقطہ سے ایک مکانی کے دو ماس کھینچے گئے ہیں،

اگر ان کا وتر تماس ہمیشہ مکانی پر عماد ہو تو ثابت کرو کہ بیرونی نقطہ کے

طریق کی مساوات $ما (لا + را) + م = ۰$ ہے۔

۴۲۔ ثابت کرو کہ وہ سب دائرے جن کے لحاظ سے ایک نقطہ

معلومہ کا قطبی وہی ہو ایک مشترک اصلی محور رکھتے ہیں اور یہ اصلی

محور اس عمود کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتا ہے جو نقطہ مذکورہ سے اس کے قطبی پر کھینچا جائے۔



باب شانزدہم

ایک متبدل کے ذریعہ کسی مخروطی پر کے نقطوں کی تبصیر

۲۰۱۔ متبدل۔ مخروطی پر کے نقطوں کے متعلق جو مسائل ہوں ان کی بحث میں اکثر اوقات یہ زیادہ سودمند ہوتا ہے کہ ان نقاط کو صرف ایک تنقیر متبوع کی رقوم میں بیان کیا جائے بجائے اس کے کہ ہر نقطہ دو تنفیروں سے تعبیر ہو اور یہ تنفییر ایک ربط کے ذریعہ باہم منسلک ہوں۔ پس اگر ہم کسی مخروطی کے نقطوں کے محدودوں کے لئے ایک تنفییر کی رقوم میں سادہ جملے معلوم کر سکیں تو اس تنفییر کی کسی خاص قیمت سے منحنی کے ایک نقطہ کا تعین ہوگا، جب کسی تنفییر کو اس طرح استعمال کیا جائے تو اسے متبدل کہتے ہیں۔

مثلاً دائرہ $لا + ما = واک$ کی صورت میں ہم رکھ سکتے ہیں

$لا = رجم طہ$ ، $ما = رجب طہ$

اس طرح منحنی کے ہر نقطہ کے جواب میں طہ کی ایک مختلف قیمت ہے، اس جگہ طہ متبدل ہے۔

لازمی طور پر منحنی کے ہر ایک نقطہ کے جواب میں متبدل کی ایک قیمت ضرور ہونی چاہئے، اور متبدل کی ایک ہی قیمت سے منحنی کے دو نقطے تبصیر نہیں ہونے چاہئیں۔

صریحاً ہم دونوں محدودوں کو ایک محدود کی رقوم میں لا سکتے ہیں کیونکہ مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے ما کو لا کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا لیکن ایسے جملات میں اہم مقداریں شریک ہونگی اس لئے ان کے

ساتھ عمل کرنا مشکل ہوگا۔ مگر بعض صورتوں میں یہ ممکن ہوتا ہے کہ مرد و تیز
لا، ماکسی اور تیسبے تنغیر کی رقوم میں باآسانی بیان ہو سکیں۔ اعلیٰ دفعہ
میں ہم دیکھیں گے کہ مخروطیوں کی تین مساواتوں کی صورت میں
لا، ماکے لئے نہایت سادہ اور موزوں جملے حاصل ہوتے
ہیں۔

۲۰۲۔ متبدلی تعبیر کی سادہ صورتیں

(۱)۔ مکانی $a = ۴$ لا b اگر ہم رکھیں

$$\left\{ \begin{array}{l} a = ۲ \\ b = ۱ \end{array} \right. \dots\dots\dots (۱)$$

تو اس طرح سے مہ نے لا اور ما کو جبکہ نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہو
مہ کی رقوم میں نہایت آسان شکل میں بیان کر دیا۔ نیز چونکہ منحنی کے
ہر نقطہ کا معین مختلط ہے اس لئے ہر نقطہ مہ کی مختلط قیمت
سے تعبیر ہوتا ہے۔

جب مہ کی قیمت ∞ سے شروع ہو کر بالترتیب بڑھتے بڑھتے
 $\infty +$ ہو جاتی ہے تو اس کے جواب میں ما کی قیمت ∞ سے شروع ہو کر
 $\infty +$ ہو جاتی ہے۔ اس کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ منحنی
پر ایک نقطہ اس کے اس حصہ پر جو محور سے پیچے ہے لا، تنہا ہی نقطہ
سے حرکت کر کے بالترتیب راس پہنچتا ہے اور پھر محور کے اوپر کے
حصہ پر حرکت کرتا ہوا لا، تنہا ہی فاصلہ پر چلا جاتا ہے، مہ کی قیمت صفر
سے راس تعبیر ہوتا ہے کیونکہ اس صورت میں
 $a = ۰$ ، $b = ۰$

$$(۲) \text{ ناقص } \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$$

یہاں اگر ہم رکھیں $\left\{ \begin{array}{l} لا = ۱ \\ ب = ۱ \end{array} \right. \dots\dots\dots (۲)$

تو نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہوگا، کیونکہ

$$\left(\frac{لا}{ا}\right)^2 + \left(\frac{ما}{ب}\right)^2 = ۱ = \text{جیب}^2 طہ$$

نیز جیب طہ بالترتیب ۰ سے ۳۶۰ تک بدلتا ہے تو منناظر نقطہ گھڑی کی مقابل سمت میں ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے، نیز طہ کی کسی ایک قیمت سے دو نقطے تعبیر نہیں ہو سکتے کیونکہ اگر جیب طہ اور جیب طہ دونوں معلوم ہوں تو ہمیں ۰ اور ۳۶۰ کے درمیان طہ کی صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$(۳) \text{ قطع زائد } \frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ یہاں اگر ہم رکھیں}$$

$$لا = \text{نقطہ طہ}، ما = \text{ب مس طہ} \dots\dots (۳)$$

تو نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہوگا اور دو مختلف نقطوں کے لئے طہ کی دو مختلف قیمتیں ہوں گی۔

اگر طہ ۰ سے بڑھتے بڑھتے ۳۶۰ تک پہنچے تو منناظر نقطہ مکمل قطع زائد مرتسم کرے گا، لیکن ترتیب پر اعلیٰ طہ سے غور کرتا جائے۔ نقطہ دائرہ طہ کے رأس سے شروع ہوتا ہے (وجیب طہ بدل کر ۹۰ تک پہنچتا ہے تو نقطہ دائیں جانب کی شاخ کے بالائی حصہ پر حرکت کر کے لا متناہی فاصلہ پر پہنچ جاتا ہے۔

چونکہ ۹۰ کے بعد نقطہ طہ اور مس طہ دونوں کی قیمتیں منفی ہوتی ہیں اس لئے اب نقطہ مذکورہ بائیں شاخ کے نچلے حصہ پر لا متناہی فاصلہ سے شروع ہوتا ہے اور بتدریج حرکت کرتے کرتے رأس کی طرف آتا جاتا ہے اور بالاخر جیب زاویہ طہ ۱۸۰ کے مساوی ہو جاتا ہے اور اس کی بناء پر نقطہ ۱ اور مس طہ ۰ ہو جاتا ہے تو یہ بائیں جانب کے رأس پر پہنچ جاتا ہے، اس کے بعد یہ بائیں شاخ کے اوپر کے حصہ پر حرکت کرتا ہے اور جوقت طہ ۲۷۰ کے مساوی ہوتا ہے تو نقطہ اس شاخ

پر لا متناہی فاصلہ پر پہنچ جاتا ہے اور بالآخر دائیں جانب کی شلخ کے
پنچلے حصہ پر سے ہوتا ہوا پھر مبدا پر آ پہنچتا ہے۔
پس جب ہماری مراد اس نقطہ سے ہو جس کا متبدل مہ یا طہ
ہے تو ہم اس نقطہ کو ”نقطہ مہ“ یا ”نقطہ طہ“ سے موسوم کر سکتے ہیں۔

مشقیں

۱۔ اگر $\text{لا} = \text{ا} + \text{ت}$ ، $\text{ما} = \text{ا} + \text{ت}$ جہاں ت کوئی متغیر ہے تو ثابت کرو کہ
نقطہ $(\text{لا}، \text{ما})$ ایک مکانی کو متمم کرتا ہے جس کا رأس $(\text{ا}، \text{ا})$ ہے۔
نیز منحنی پر نقطہ کی حرکت کو بیان کرو جبکہ ت $-\infty$ سے $+\infty$ تک بدلے۔
(مساوات معلوم کرنے کے لئے ت کو ساقط کرو)

۲۔ اگر $\text{لا} = \text{ا} + \text{ج}$ ، $\text{ما} = \text{ب} + \text{ج}$ اور $\text{ما} = \text{ب}$ جب $\text{ط} = \text{د}$ تو ثابت کرو کہ $(\text{لا}، \text{ما})$
ایک ناقص کو متمم کرتا ہے جس کا مرکز $(\text{ج}، \text{د})$ ہے اور منحنی کے گرد نقطہ کی حرکت
پورے طور پر بیان کرو جبکہ ط سے 2π تک بدلے۔

۳۔ قائم زائد $\text{لا} = \text{ا}$ ، $\text{ما} = \text{ا}$ میں ثابت کرو کہ ہم $\text{لا} = \text{ا}$ ، $\text{ط} = \text{ا}$ اور $\text{ما} = \text{ا}$ و مسط
رکھ سکتے ہیں۔

۴۔ قطع ناقص $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ میں (۱) مساوی مزدوج قطروں
کے سروں پر کے (۲) وتر خاص کے سروں پر کے متبدلی زاوے معلوم کرو
(ان نقطوں کے محد معلوم کر کے طہ کی قیمت معلوم کرو)
۲۰۴۔ مذکورہ بالا طریقہ کا استعمال قطع مکانی کی صورت میں۔

اب ہم مکانی $\text{ما} = \text{ا}$ ، $\text{لا} = \text{ا}$ پر

$$\text{لا} = \text{ا}، \text{ما} = \text{ا}، ۲ = \text{ا}$$

کے ذریعہ نقطوں کو تبصیر کرنے کی چند مثالیں درج کریں گے۔

اس طرز تبصیر کا نمایاں فائدہ اس وقت حاصل ہوتا ہے جب ہمیں
قطع مکانی اور بعض اور منحنیات (جن کی مساواتیں معلوم ہوں) کے

نقاط تقاطع معلوم کرنا مقصود ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ نقطہ لا = ۱۰ م، ۲ = ۱۰ م + ۲۰ م، ۳ = ۱۰ م + ۲۰ م + ۳۰ م کی تمام قیمتوں کے لئے قطع مکانی پر واقع ہوتا ہے، اس لئے لا اور ما میں دو مساواتوں کو حل کرنے کی بجائے ہم مہ کی رقوم میں لا اور ما کی یہ قیمتیں معلوم نہی کی مساوات میں درج کرتے ہیں۔ اس طرح ہمیں

۱۰ م + ۲۰ م + ۳۰ م = ۱۰ م + ۲۰ م + ۳۰ م + ۴۰ م

مہ میں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں نقاط تقاطع کے متبدلوں کو تبصیر کرتی ہیں۔

مثال ۱۔ قطع مکانی ۱۰ م + ۲۰ م + ۳۰ م + ۴۰ م + ۵۰ م + ۶۰ م + ۷۰ م + ۸۰ م + ۹۰ م + ۱۰۰ م کے نقاط تقاطع کے متبدل معلوم کرو۔ نیز ان کے ماہم ما میں ہونے کی شرحیں معلوم کرو۔ چونکہ قطع مکانی پر کے ہر ایک نقطہ کے لئے

لا = ۱۰ م، ۲ = ۱۰ م + ۲۰ م، ۳ = ۱۰ م + ۲۰ م + ۳۰ م

اس لئے نقاط تقاطع کے متبدل مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں۔

ل (۱۰ م) + م (۲۰ م) + م (۳۰ م) + م (۴۰ م) + م (۵۰ م) + م (۶۰ م) + م (۷۰ م) + م (۸۰ م) + م (۹۰ م) + م (۱۰۰ م) = ۱۰ م + ۲۰ م + ۳۰ م + ۴۰ م + ۵۰ م + ۶۰ م + ۷۰ م + ۸۰ م + ۹۰ م + ۱۰۰ م

جوہ میں درجہ دوم کی مساوات ہے اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ نقاط تقاطع دو ہیں کیونکہ مہ کی ایک قیمت کے جواب میں مکانی پر ایک اور صرف ایک نقطہ ملتا ہے۔

اگر خط مذکور مکانی کو مس کرے تو مساوات درجہ دوم کی اصلیں صرفاً مساوی ہونگی۔ اس کی شرط یہ ہے

۱۰ م + ۲۰ م = ۱۰ م + ۲۰ م + ۳۰ م + ۴۰ م + ۵۰ م + ۶۰ م + ۷۰ م + ۸۰ م + ۹۰ م + ۱۰۰ م

مثال ۲۔ دائرہ مکانی سے چار نقاط پر ملتا ہے اور ان نقطوں کے معینوں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

دائرہ کی مساوات کی شکل یہ ہے

$$لا + ۲ + گ + لا + ۲ + ف + ما + ج = ۰$$

اس لئے لا = ۱۰ م، ۲ = ۱۰ م + ۲۰ م رکھنے سے ہمیں مہ میں درجہ پہلے کی یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مکانی کو مس کرتا ہے۔ اس مساوات کا نقطہ مہ پر کے مماس کی مساوات
 $\frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$
 کے ساتھ مقابلہ کرنا باعث دلچسپی ہوگا۔

ہم فوراً دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دونوں مساواتیں ایک ہی ہونگی اگر
 $\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$
 پس ہم م کو بھی بطور متبدل استعمال کر سکتے ہیں جس صورت میں

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m} \text{ اور } \frac{1}{m} = \frac{1}{m}$$

پس اگر متبدل م سے کسی نقطہ کا مقام معلوم کیا جائے اور اس
 نقطہ پر منحنی کا مماس کھینچا جائے تو م سے اس زاویہ کا مماس
 تبیر ہوتا ہے جو مذکورہ بالا ہندسی مماس منحنی کے محور کے ساتھ بنا آتا ہے۔ لیکن
 یاد رہے کہ مہ استعمال کرنے سے ہم کسروں سے بچتے ہیں۔

مثال۔ اگر دو نقطوں پر کے مماس علی القیام ہوں تو نقاط مماس کا خط
 وصل ماسک میں سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ نقاط مماس مہ ہیں، تب چونکہ مماس علی القیام ہیں
 اسلئے مہ مہ = ۱

لیکن ان کو ماننے والا وتر ہے

$$m(m + m) = 2 - 2 = 0 \text{ مہ مہ}$$

اور یہ محور سے ملتا ہے جہاں

$$2 - 2 = 0 \text{ مہ مہ}$$

یعنی ماسک پر ملتا ہے۔
 ۲۰۸۔ کسی نقطہ سے مکانی کے دو مماس کھینچ سکتے ہیں اور اگر یہ علی القیام
 ہوں تو نقطہ مذکورہ تر تب پر واقع ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ نقطہ کے محدود (لا، ما) ہیں، نقطہ مہ پر کے ماس کی مساوات لا۔ مہ ما + لا مہ = ۰ ہے اور اگر یہ (لا، ما) میں سے گزرے تو

$$لا مہ - مہ ما + لا مہ = ۰$$

جو مہ میں درجہ دوم کی مساوات ہے، اس کی دو اصلوں سے پہنچی پر کے دو نقاط حاصل ہوتے ہیں جن پر کے ماس نقطہ مذکورہ میں سے گزرتے ہیں اگر یہ اصلیں مہ، مہ ہوں تو مساوات علی القواکم ہونگے اگر

لیکن مساوات درجہ دوم کے مسائل کی رو سے مہ مہ = $\frac{لا}{ما}$ یعنی $\frac{لا}{ما} = ۱$ یعنی لا + لا = ۱ = ۰، بالفاظ دیگر نقطہ مرتب پر واقع ہے۔

مشقیں

۵۔ ایک قطع مکانی کے نقاط مہ، مہ پر ماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کے محدود لا مہ مہ (مہ ۲ مہ) ہیں۔

(یہ نتیجہ نہایت ضروری ہے)

۶۔ ثابت کرو کہ اگر مکانی کے ماس کی دتر کے ایک سرے کے محدود

$$لا مہ، ما مہ ہوں تو دوسرے سرے کے محدود $\frac{لا}{ما}$ ، $\frac{ما}{لا}$ ہونگے۔$$

۷۔ مکانی $ما = لا$ میں ان نقطوں کے محدود معلوم کرو جنکے لٹو متبدلوں کی قیمتیں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ ہیں۔

۸۔ مکانی $ما = لا$ کے وتر خاص کے سروں پر متبدل مہ کی کیا قیمت ہے۔

۹۔ مکانی $ما = لا$ کے اُس نقطہ کے محدود معلوم کرو جس پر کا ماس محور کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتا ہے۔

۱۰۔ (لا، لا) (لا، لا) کی جوتیتیں مہ اور مہ کی بقوم میں ہیں ان کو مساوات
(ما - لا) (لا - ما) = ما - لا میں درج کرنے سے نقطا مہ، مہ کو
لانے والے وتر کی مساوات معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک مکانی کا وتر ن قی اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ان زاویوں کے محاسن
کا حاصل ضرب جون اور قی پر کے ہندسی ماس نمود کے ساتھ بناتے
ہیں مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ماس مہاسن مکانی کے ایک ثابت
معین پر ملتے ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ اگر ان زاویوں کے محاسن کا حاصل جمع مستقل ہو تو
وتر اس پر کے ماس سے ایک ثابت نقطہ پر ملتا ہے۔

۲۰۹۔ قطع مکانی کے کسی نقطہ پر کا عماد۔ نقطہ مہ پر کا عماد اس
نقطہ میں سے گزرتا ہے اور اس میں سے گزرنے والے ماس پر غمو دے۔
ماس کی مساوات ہے۔

$$۱۰۔ مہ + ما + لا = مہ -$$

لہذا نقطہ مہ (یعنی لا مہ، ۲ لا مہ) پر کے عماد کی مساوات ہے:-

$$مہ (لا - لا مہ) + (ما - لا مہ) = ۰$$

$$مہ لا + ما = لا مہ + ۲ لا مہ + ۳ لا مہ + ۴ لا مہ + ۵ لا مہ + ۶ لا مہ$$

یہ مساوات علی طور پر دفعہ ۱۸ کی مساوات ہے، طالب علم کو چاہیے
کہ م اور مہ کے ہندسی معنوں کا مقابلہ کرنے سے اس امر کی تصدیق
کرے۔

۲۱۰۔ کسی نقطہ میں سے ایک مکانی کے تین عماد کھینچے جا سکتے ہیں (دفعہ
۱۸ سے مقابلہ کرو)

فرض کرو کہ (لا، لا) نقطہ معلوم ہے، تب نقطہ مہ پر کا عماد اس نقطہ
میں سے گزرتا ہے اگر مہ لا + ما = لا مہ + ۲ لا مہ + ۳ لا مہ + ۴ لا مہ + ۵ لا مہ + ۶ لا مہ

$$یا لا مہ + ۲ لا مہ (لا - لا) = لا مہ + ۳ لا مہ + ۴ لا مہ + ۵ لا مہ + ۶ لا مہ$$

اب یہ مساوات مہ میں درج سوم کی مساوات ہے۔ اس لئے اس کی

تین اصلیں ہیں اور ہر اصل کے جواب میں مسخنی پر ایک نقطہ ہے جس پر کاغذ فقط (۱، ۲، ۳) میں سے گزرتا ہے۔

انتباہ۔ مساواتوں کے مسائل کی رو سے ظاہر ہے کہ مساوات (۱) کی ایک اصل یا تینوں اصلیں حقیقی ہیں (دو حقیقی یا تینوں خیالی نہیں ہو سکتیں کیونکہ خیالی اصلوں کے ہمیشہ زوج ہوا کرتے ہیں) ان اصلوں کے جواب میں ایک یا تین حقیقی عاود ہونگے اور صورت اول میں باقی عاود خیالی ہونگے۔ نتیجہ صریح۔ اگر مہ کی مذکورہ بالا مساوات کی اصلیں مہ، مہ، مہ ہوں تو

$$\begin{aligned} & \text{مہ} + \text{مہ} + \text{مہ} = ۰ \\ & \text{مہ} + \text{مہ} + \text{مہ} = \text{مہ} + \text{مہ} + \text{مہ} = (۱ - ۱) / (۱ - ۱) \\ & \text{مہ} + \text{مہ} = \frac{۱}{۱} \end{aligned}$$

ان تین مساواتوں میں سے پہلی مساوات اس شرط کو تبصیر کرتی ہے کہ تینوں عاود ایک نقطہ پر ملیں کیونکہ یہ نقطہ کے محدودوں پر منحصر نہیں ہے۔ اس سے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ان نقطوں پر کے عاود متر اکر ہوں تو معینوں کا حاصل جمع صفر ہوگا کیونکہ یہ مجموعہ ۱ - ۱ (مہ + مہ + مہ) کے مساوی ہے۔

باقی دو مساواتوں سے نقطہ تقاطع کے مجدد حاصل ہوتے ہیں۔ مثال ۱۔ اگر کسی مکانی کے نقاط ۱ اور ۲ پر کے عاود مسخنی پر قطع کریں تو خط ۱ - ۲ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ نقاط مہ، مہ پر کے عاود مسخنی کے نقطہ ن پر ملتے ہیں جسکا متبدل مہ ہے اور جس کے محدود (۱، ۲) ہیں، تب ظاہر ہے کہ ان نقطوں کے جواب میں جن پر کے عاود نقطہ ن میں سے گزرتے ہیں مہ کی تین قیمتیں مہ، مہ، مہ ہیں۔ پس اوپر کی مساواتوں کی رو سے

$$\text{مہ} + \text{مہ} + \text{مہ} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱ - ۱}{۱} = ۲ - ۲ = ۲$$

اب نقاط میں، میں کو ملائے والا وتراب

$$12 = 12 - (1 + 1)$$

ہے جو منحنی کے محور سے نقطہ $(a, -b)$ اور $(-a, b)$ کے درمیان میں ہے۔

(۱۲۰) پر ملتا ہے۔

پس وتر و لب محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے جو راس سے ۵۲ کے فاصلہ پر واقع ہے۔

مثال ۲۔ مکافی ما = ۴ لاپر کے وہ نقطے معلوم کرو جن پر کے
 عا د نقطہ ($\frac{15}{4}$ ، $-\frac{3}{4}$) میں سے گزرتے ہیں۔

یہاں $1 = 1$ ، اس لئے $1 = 2$ ، $2 = 1$ ، $2 = 2$ کسی نقطہ پر
کاغذ پر $1 = 2$ ، $2 = 1$ ، $2 = 2$ ہے

پس اگر یہ نقطہ $(\frac{15}{4}, -\frac{3}{4})$ میں سے گزرے تو ہمیں m میں درجہ سوم کی مساوات ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$= \frac{3}{2} + \frac{4}{2} \times m - m^2 \quad \text{یعنی} \quad = 1 - (2 - 2)m + m^2$$

چونکہ یہ مسادات درجہ سوم ہے، اس لئے ہم اس کو براہ راست حل نہیں کر سکتے، لیکن اس کا ایک حل صریحاً یہ ہے کہ اسے اور باقی حل جو مہ + مہ - $\frac{3}{4}$ سے حاصل ہوتے ہیں $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ ہیں۔ پس تین نقاط مطلوبہ یہ ہیں :-

[illegible]

طالب علم کو چاہیے کہ شکل کھینچ کر دیکھے کہ یہ تینوں عداومتراکز ہیں۔

مشقیں

۱۲۔ ثابت کرو کہ مکافہ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ کے لئے وتر خاص کے سروں پر کے
عمادوں کی مسادالتیں $\frac{4}{6} + \frac{4}{6} = \frac{8}{6}$ اور $\frac{4}{6} = \frac{4}{6}$ ہیں۔

۱۳۔ اگر مہیر کا عماد محور سے گزیرے اور اس کو ہوتو وگ کا

طول معلوم کرو، اس سے ثابت کرو کہ زیر عماد ل گ مستقل ہے اور نصف
در خاص کے مساوی ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ نقطہ مہ پر کا عماد معنی سے دوبارہ جس نقطہ پر ملتا ہے
اس کے واسطے متبدل کی قیمت $-(m + \frac{1}{2}) / m$ ہے۔

اس نقطہ کے محور کو لکھو اور $m = 1$ کے لئے شکل کھینچو۔
۱۵۔ مکانی $m = 2$ والا پر کے وہ نقطے معلوم کرو جن پر کے عماد نقطہ
(۶-۹) میں سے گزرتے ہیں، شکل بھی کھینچو۔

۱۶۔ اگر 'ق' اور پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ ان کے
معیینوں کا مجموعہ صفر ہے، اس کی بناء پر ثابت کرو کہ اگر 'ق' اور ل پر کے عماد
ایک ثابت نقطہ ن پر کے عماد پر ملیں تو 'ق' ایک ثابت خط مستقیم کے
متوازی ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ مکانی $m = 2$ والا پر کے نقطہ مہ میں سے اس نقطہ پر
کے عماد کے علاوہ دو اور عماد کھینچے جاسکتے ہیں اور ان کے پایوں کے
متبدل $m + m + m = 2 + 0$ سے حاصل ہوتے ہیں۔

[مہ کی مساوات درجہ سوم میں $la = 1$ مہ، $ma = 2$ مہ رکھو اور دیکھو کہ
مہ = مہ ایک اصل ہے]

۲۱۱۔ متبدلی تبصیر ناقص کی صورت میں۔ خارج المکرز زاویہ۔

ہم اوپر دیکھ چکے ہیں کہ ناقص $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ پر کے کسی نقطہ کے

محددوں کو

$$la = 1 \text{ (مجموعہ) } , \quad ma = 2 \text{ جب } lb$$

کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

ط کے ہندسی معنی طسا ہر ہیں۔ فرض کرو کہ زاویہ طہ کی کسی خاص
قیمت کے جواب میں ناقص پر کوئی نقطہ ن ہے، ن سے ع ج ع پر عمود ن ل

کھینچو اور ل ن کو ن تک اتنا خارج کرو کہ

$$\text{ن} : \text{ل} = \text{ل} : \text{ا} \quad \text{ب}$$

تب ن کے محدود لا = اجم ط، ما = $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} \times \text{ب جب ط} = \text{اجب ط ہیں۔}$

پس ن ہمیشہ ایک دائرہ

کے محیط پر واقع ہوگا جسکو معاون یا مدوی

دائرہ کہتے ہیں اور اسکی مساوات

$$\text{لا} = \text{ما} + \frac{\text{ا}}{2}$$

ہے اور محور اعظم اس کا قطر ہے۔

علاوہ ازیں چونکہ ج ن = ا

اور ج ل = اجم ط اس لئے

ط زاویہ ل ج ن کو تعبیر کرتا ہے۔

شکل ۴۴

لہذا اگر ہم محور اعظم کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچیں اور ن کے

میں کو اتنا خارج کریں کہ وہ دائرہ سے ن پر ملے تو زاویہ ن ج ع کو

ن کا خارج المرکز زاویہ کہتے ہیں اور ن کے محدود اجم ط، ب جب ط

میں جہاں ط خارج المرکز زاویہ ہے۔

متناظر نقطے - امدادی دائرہ پر کا نقطہ ن، مان کا

متناظر نقطہ کہلاتا ہے۔ اور نقاط ن اور ل کو متناظر

نقطے کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح - اگر ناقص پر کے کسی نقطہ کے محدود لا، ما ہوں تو امدادی

دائرہ پر کے متناظر نقطہ کے محدود لا، ما ملے گا ہونگے۔

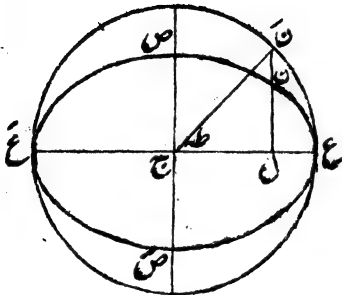
خارج المرکز زاویہ کی پیمائش کے طریقہ کو بغور ملاحظہ کیا جائے،

اگر ن ناقص پر کا کوئی نقطہ ہو اور ن معاون دائرہ پر کا متناظر نقطہ

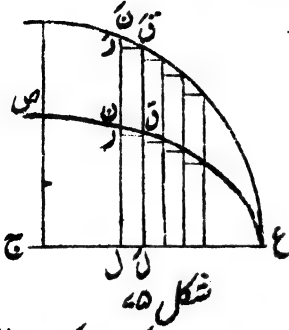
ہو تو ن کے خارج المرکز زاویہ سے زاویہ ج ن ع مراد ہوتا ہے جو محور اعظم

کی مثبت سمت اور معاون دائرہ کے نصف قطر ج ن کے درمیان

بنتا ہے۔



۲۱۲۔ ثابت کرو کہ ایسے ناقص کا رقبہ جسکے نیم محور a اور b ہوں
 πab ہے۔



فرض کرو کہ محور اعظم
 کو بہت سے مساوی حصوں
 میں تقسیم کیا گیا ہے اور l
 ان حصوں میں سے ایک حصہ
 ہے۔ معین n n l ،
 q q l کھینچو اور فرض

کرو کہ یہ ناقص سے n ، q پر امدادی دائرہ سے n ، q پر ملتے ہیں
 مستطیلوں l q l q l q کی تشکیل کرو، نیز باقی حصوں
 میں سے ہر ایک پر بھی اسی طرح مستطیل بناؤ۔

چونکہ q l : q l = b : a
 : مستطیل l q l : مستطیل l q l = b : a
 اسی طرح باقی کے مستطیل بھی اسی نسبت میں ہیں، پس ان مستطیلوں
 کے حاصل جمع کو جو ناقص پر پڑتی ہوئے ہیں ان مستطیلوں کے حاصل جمع
 کے ساتھ جو دائرہ پر پڑتی ہیں نسبت b : a ہے۔

لیکن اگر ان حصوں کی تعداد کو لا انتہا بڑا یا جلے تول q l q l
 کے نمونہ کے مستطیلوں کا حاصل جمع ناقص کے بالائی نصف کے
 رقبہ کے مساوی ہو جاتا ہے اور l q l q کے نمونہ کے مستطیلوں
 کا مجموعہ دائرہ کے بالائی نصف کے رقبہ کے مساوی ہو جاتا ہے۔ لہذا
 ناقص کا رقبہ : دائرہ کا رقبہ = b : a
 لیکن دائرہ کا رقبہ πa^2 ہے، لہذا ناقص کا رقبہ

$$= \pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab \quad (۵)$$

مثال۔ ناقص a $a^2 + ۲$ a $a + b$ $a = ۱$ کا رقبہ دریافت کرو۔

ہیں نصف محوروں کا حاصل ضرب معلوم کرنا چاہئے۔
اب نصف محوروں a ، b کی قیمتیں مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$(a - \frac{1}{2}) (b - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

$$یا \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (a + b) + \frac{1}{4} (a + b)^2 = \frac{1}{4}$$

$$لہذا \quad \frac{1}{4} (a + b)^2 = \frac{1}{4} (a + b) - \frac{1}{4} \quad (ٹیوٹریل الجبرا، دفعہ ۱۵۶)$$

$$پس رقبہ = \frac{1}{4} (a + b)^2 = \frac{1}{4} (a + b) - \frac{1}{4}$$

(علامت جذر کے اندر کی رقم مثبت ہے کیونکہ ناقص کے لئے $a + b > 1$ ۔)

مشقیں

۱۸۔ مکافی $a^2 = 4$ والا کے نقاط m ، n پر جو عادی کھینچ سکتے ہیں ان کے نقاط تقاطع کے محدود شکل ذیل میں معلوم کرو

$$لا = 2 = (a + 1) (m^2 + m + 1) = 4 = (m + 1) (n^2 + n + 1)$$

۱۹۔ اگر نقطہ m نزدیک آتے آتے بالآخر نقطہ n پر منطبق ہو جائے تو ثابت کرو کہ عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے

$$لا = 2 = (a + 1) (m^2 + m + 1) = 4 = (m + 1) (n^2 + n + 1)$$

اس قسم کے دو متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع m پر کا مرکز انخا کہلاتا ہے۔

۲۰۔ دو معینوں اور ناقص کے درمیان جو رقبہ گھرجاتا ہے اس کی نسبت اس رقبہ کے ساتھ جو دو معینوں اور دائرہ کے درمیان گھرجاتا ہے b ہے۔

۲۱۔ اگر n ، q ، r ناقص پر کے تین نقطے ہوں اور q ، r امدادی دائرہ پر کے متناظر نقطے ہوں تو

$$\triangle nqr : \triangle nqr = b : a$$

۱۱۳۔ ایک ناقص پر کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاوئے عہ اور بہ ہیں، ان کو لانے والے وتر کی مساوات معلوم کرو۔

ان نقطوں کے محدود (ا جم عہ، ب جب عہ) (ا جم بہ، ب جب بہ) ہیں، پس ان نقطوں کو لانے والے خط کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{ا جم عہ}}{\text{ا جم عہ} - \text{ب جب عہ}} = \frac{\text{ا جم عہ} - \text{ب جب عہ}}{\text{ب جب عہ} - \text{ب جب بہ}}$$

یا ب لا (جب عہ - جب بہ) - ا ا (ا جم عہ - جم بہ) - ا ب (ب جب عہ - جم عہ جب بہ) =

$$\text{یا ب لا (ب جب عہ - جم عہ جب بہ)} + \frac{\text{جم عہ} + \text{جم عہ} + \text{جم عہ}}{۲} + \frac{۲ \times \text{ب جب عہ} - \text{جم عہ} - \text{جم عہ}}{۲} =$$

- ا ب جب (عہ - بہ) =

اس لئے ۲ جب عہ - جم عہ پر تقسیم کرنے سے

$$\text{ب لا جم عہ} + \frac{\text{جم عہ} + \text{جم عہ} + \text{جم عہ}}{۲} - \frac{\text{ا ب جم عہ} - \text{جم عہ} - \text{جم عہ}}{۲} =$$

$$\text{یا } \frac{\text{لا}}{۲} \text{ جم عہ} + \frac{\text{ب}}{۲} \text{ جب عہ} = \frac{\text{جم عہ} + \text{جم عہ} + \text{جم عہ}}{۲} \dots (۸)$$

نتیجہ صریح - نقطہ عہ پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا}}{۲} \text{ جم عہ} + \frac{\text{ب}}{۲} \text{ جب عہ} = ۱ \dots (۹)$$

یہ مساوات عہ اور بہ کو لانے والے وتر کی مساوات میں عہ = بہ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے، اس صورت میں عہ، بہ کو لانے والا وتر عہ پر کا مماس ہو جاتا ہے۔

۱۱۴۔ اُن نقاط کو لانے والے وتر کی مساوات جن کے خارج المرکز زاوئے عہ + بہ اور عہ - بہ ہیں حسب ذیل ہوتے

$$\frac{\text{لا}}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{عہ} - \text{بہ}) + \frac{\text{ب}}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{۲} (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{عہ} - \text{بہ})$$

$$= \text{جم } \frac{۱}{۲} (\text{عہ} + \text{بہ} - \text{عہ} + \text{بہ})$$

لا کے محور سے اوپر ہیں یا دونوں نیچے تو ن اور ق کے خارج المرکز
زادیوں کا فرق ایک قائمہ کے مساوی ہے۔

اگر ن اور ق کے خارج المرکز زادیوں سے عد اور ب ہوں تو ج ن
اور ج ق کی مساداتیں ہیں

$$ما = لا \frac{ب جب ب}{ا جم ب} \quad اور \quad ما = لا \frac{ب جب ب}{ا جم ب}$$

لیکن اگر خط ما = م لا اور ما = م لا مزدوج قطر ہوں تو

$$م م = - \frac{ب}{ا} \quad (دیکھو مشق ۶ صفحہ ۱۳۵)$$

$$لہذا \quad ما جب ب جب ب = - \frac{ب}{ا}$$

$$جم ب جب ب + جب ب جب ب = ۰$$

$$جم (ب - ب) = ۰$$

پس عد۔ ب ایک قائمہ کے مساوی ہے یا تین قائموں کے۔

لیکن چونکہ ج ن اور ج ق دونوں لا کے محور سے اوپر ہیں
یا دونوں نیچے اس لئے فرق مذکور تین قائموں کے مساوی نہیں ہو سکتا۔
نتیجہ صریح۔ اگر ج ن اور ج ق مزدوج قطر ہوں اور ن کا متبدل عد ہو
تو ق کا متبدل عد + $\frac{ق}{ن}$ ہوگا۔

۲۱۷۔ ناقص کے دو مزدوج نصف قطروں کے مربعوں کا حاصل

جمع مستقل ہوتا ہے اور اگر ان دو نصف قطروں کو متصل اضلاع مان کر ان پر
ایک متوازی الاضلاع بنایا جائے تو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ بھی
مستقل ہوگا۔

دفعہ ۲۱۶ نتیجہ صریح کی رو سے ن اور ق کے محدود ہیں:-

$$ا جم ب، ب جب ب اور ا جم (ب + \frac{ق}{ن})، ب جب (ب + \frac{ق}{ن})$$

یا اجم عہ، ب جب عہ اور - ا جب عہ، ب جم عہ
 لہذا ج ن = اجم عہ + ب جب عہ، ج ق = ا جب عہ + ب جم عہ
 جن سے نوٹا ج ن + ج ق = ا + ب
 نیز مذکورہ متوازی الاضلاع $\triangle ج ن ق =$

$$2 \times \frac{1}{4} = \{ اجم عہ ب جم عہ - ب جب عہ (- ا جب عہ) \}$$

$$= ا ب (جم عہ + جب عہ) = ا ب (حصہ اول دفعہ نم نتیجہ صریح)$$

پس دونوں نتیجے ثابت ہوئے۔

مشقیں

۲۲۔ ثابت کرو کہ مساوی مزدوج قطروں کے سروں کے خارج المرکز زاوے
 ۴۵° اور ۱۳۵° ہیں۔

۲۳۔ ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ا$ کے اُن نقطوں کو ملانے والے وتر کی
 مساوات دریافت کرو جن کے خارج المرکز زاوے ۳۰° اور ۱۲۰° ہیں
 نیز اُس وتر کی مساوات معلوم کرو جو خارج المرکز زاووں ۲۰° اور ۱۶۰° والے نقطوں
 کو ملاتا ہے۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ا$ کے دو مزدوج قطروں
 کے سروں کو ملانے والا خط ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۲$ کو مس کرتا ہے۔
 ۲۵۔ نقاط عہ، ب پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کے محدود شکل ذیل
 معلوم کرو۔

$$لا = اجم عہ + ب جم عہ / ۲ - عہ، ما = ب جب عہ + ج جم عہ / ۲ - عہ$$

اگر عہ + ب مستقل ہو تو ثابت کرو کہ (لا، ما) کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مرکز میں
 سے گزرتا ہے اور اگر عہ - ب مستقل ہو تو ثابت کرو کہ طریق ایک ناقص ہے

جسکی مساوات $\frac{2}{b} + \frac{2}{a} = \frac{2}{c}$ قط $\frac{2}{c}$ سے جہاں $c = b = a$ ۔
۲۶۔ اگر n کا خارج المرکز زاویہ طہ ہو تو مسئلہ طہ طریق کتابت کے
مطابق ثابت کرو کہ

$$ج ق^2 = 2(1 - زجم ط) ، سن = 1(1 - زجم ط) \\ سن = 1(1 + زجم ط) اور اس سے مستنبط کرو کہ \\ سن \times سن = ج ق^2$$

۲۷۔ ثابت کرو کہ وتر خاص کا وہ حصہ جو امدادی دائرہ اور ناقص کے
درمیان منقطع ہوتا ہے محور اصغر کے مساوی ہے۔

۲۸۔ ناقص کے ایک تماس پر مرکز سے عمود کھینچا گیا ہے جو محور اعظم
کے ساتھ زاویہ عم نہاتا ہے اور جس کا طول c ہے، اگر n وہ نقطہ
ہو جس کا خارج المرکز زاویہ c ہے تو ثابت کرو کہ $ج = c$
(یاد رہے کہ $c = 2(1 - زجم ط) + 2(1 + زجم ط)$)

$$۲۹۔ شکل \frac{(1-a)(1-b)}{2} + \frac{(1-a)(1-b)}{2} = \frac{2}{b} + \frac{2}{a} = 1$$

سے نقاط a, b کو ملانے والے وتر کی مساوات معلوم کرو۔

۳۰۔ ایک ناقص پر وہ نقطہ n ، $ق$ ہیں اور امدادی دائرہ پر ان کے
متناظر نقطہ $ن$ ، $ق$ ہیں۔ اگر n کی مساوات $ل + م = 1$ ہو تو ثابت
کرو کہ n کی مساوات $ل + م = 1$ ہوگی
(دونوں خطوں کی مساواتیں n اور $ق$ کے خارج المرکز زاویوں کی رقوم
میں معلوم کرو)

اس سے حاصل کرو کہ $ن$ ، $ق$ ، $ن$ ، $ق$ محور اعظم پر ملتے ہیں۔
۳۱۔ ثابت کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ پر کا تماس اور امدادی دائرہ کے
متناظر نقطہ پر کا تماس دونوں ایک دوسرے سے محور اعظم پر
ملتے ہیں۔

۲۱۸۔ ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات معلوم کرو۔
نقطہ طہ پر کا عماد اس نقطہ میں سے گزرتا ہے اور اس نقطہ میں سے گزرنے والے مماس پر عمود وار ہے۔

لیکن مماس کی مساوات $\frac{لا}{ا} \text{ جم طہ} + \frac{با}{ب} \text{ جب طہ} = ا$ ہے
اسلئے عماد ہے $\frac{ا}{جم طہ} (لا - ا \text{ جم طہ}) = \frac{ب}{جب طہ} (با - ب \text{ جب طہ})$
یا $\frac{لا}{جم طہ} - \frac{با}{جب طہ} = \frac{ب}{ب} - \frac{ا}{ا} \dots (۱۰)$

یہ مساوات عماد کی اس مساوات سے بھی جو پہلے دی جا چکی ہے حاصل ہو سکتی ہے۔

۲۱۹۔ کسی نقطہ سے ناقص کے چار عماد کھینچے جاسکتے ہیں۔
اگر نقطہ طہ پر کا عماد ایک معلومہ نقطہ (لا، با) میں سے گزرے تو

$$\frac{لا}{جم طہ} - \frac{با}{جب طہ} = \frac{ب}{ب} - \frac{ا}{ا}$$

یہ طہ میں ایک مساوات ہے جس سے ہم مخروطی پر کے وہ تمام نقطے معلوم کر سکتے ہیں جن پر کے عماد نقطہ (لا، با) میں سے گذرتے ہیں۔

اب کسی ایسی مساوات کو حل کرنے کی جس میں جم طہ اور جب طہ دونوں شامل ہوں عام ترکیب یہ ہے کہ ہم فرض کریں $مس = طہ = ت$

$$\text{جس سے جم طہ} = \frac{ا - ت}{ا + ت} \text{ اور جب طہ} = \frac{ب - ت}{ب + ت}$$

یہ قیمتیں مندرجہ کرنے سے ہمیں ت میں مطلوبہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔
موجودہ صورت میں

$$\frac{لا(ا + ت)}{ا - ت} - \frac{با(ب + ت)}{ب - ت} = \frac{ب(ا + ت)}{ب - ت} - \frac{ا(ب + ت)}{ا - ت}$$

$$\text{یا } لا \times ت(ا + ت) - با \times ت(ب + ت) = (ا - ت) \times ت(ب + ت) - (ب - ت) \times ت(ا + ت)$$

یعنی ت^۲ ب^۱ + ت^۳ (۱ + ۱ + ۱ - ۱ - ۱ - ۱) + ت^۲ (۱ + ۱ - ۱ - ۱ - ۱) - ب^۱ + ۱ = ۰
..... (ب)

یہ درجہ چارم کی مساوات ہے، اسلئے اس کی چار اصلیں ہیں، ہر ایک اصل سے حجم طہ اور جب طہ کی ایک ایک قیمت حاصل ہوتی ہے اس سے ظاہر ہے کہ کسی نقطہ سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے جاسکتے ہیں۔
انتباہ - مساوات (ب) کی اصلیں خیالی بھی ہو سکتی ہیں، مساواتوں کے مسائل کی رو سے اس کی چاروں یا دو اصلیں حقیقی ہوں گی، اس لئے ان کے جواب میں چار یا دو عماد حقیقی ہوں گے اور دوسری صورتیں باقی عماد خیالی ہوں گے۔

۲۲۰ - دفعہ گزشتہ سے طالب علم کو معلوم ہو گیا ہو گا کہ خارج المرکز زاویوں کے متعلقہ سوالوں کو حل کرنے میں ت = مس طہ رکھو سے کیا فائدہ ہوتا ہے، ت کی اس قیمت سے

$$\text{لا} = \text{اجم طہ} = \frac{۱ - ت}{۱ + ت}، \text{ما} = \text{ب جب طہ} = \text{ب} \frac{ت}{۱ + ت}$$

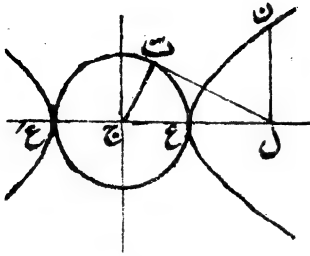
یعنی اس طرح منحنی کے کسی نقطہ کے محدود ایک متبدل ت کی رقوم میں منطق طور پر بیان ہو گئے۔ ت کو اس طرح داخل کر کے اختصار کرنے کی وجہ یہی ہے کیونکہ منطق تفاعلوں کے خواص ہمیں اچھی طرح سے معلوم ہیں۔ قطع زائد پر بھی یہی امور صادق آتے ہیں۔

متبدلی تبصیر قطع زائد کی صورت میں - زائد $\frac{۱}{۲}$ - $\frac{۱}{۲}$ = ا کے کسی نقطہ کے محدود ایک متبدل طہ کی رقوم میں اس طرح بیان ہو سکتے ہیں

$$\text{لا} = \text{ا نقطہ}، \text{ما} = \text{ب مس طہ} \dots\dots (\text{دیکھو دفعہ ۲۰۲})$$

طہ کے ہندسی معنی - فرض کرو کہ ن ایک نقطہ ہے جسکے محدود ا نقطہ اور ب مس طہ ہیں۔

معین ن ل کھینچو اور ل سے
امدادی دائرہ کا تماس
ل ت کھینچو، ج ت کو ملاؤ۔
تب قط ت ج ل = $\frac{\text{ج ت}}{\text{ج ل}}$
لا = $\frac{\text{قط ت}}{\text{ج ل}}$



شکل ۷۶

اس لئے زاویہ ت ج ل
نقطہ ن کے متبدلی زاویہ
طہ کے برابر ہے۔

قطع زائد کے مزدوج قطروں کے خواص۔ ان کے بعض خواص
زاویہ طہ کی مدد سے، دفعہ ۱۶۷ کے طریقہ کی نسبت زیادہ آسانی سے حاصل
ہو سکتے ہیں۔

اگر ج ن ایک قطر ہو اور ج ق اس کا مزدوج قطر ہو تو نقطہ ن کے
محدود قطر طہ، تب مس طہ ہو گئے اور نقطہ ق کے محدود مس طہ
اور ب قطر طہ ہو گئے۔

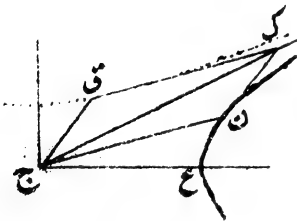
(۱) ج ن - ج ق

$$= (\text{قط}^2 \text{طہ} + \text{مس}^2 \text{طہ})$$

$$= (\text{مس}^2 \text{طہ} + \text{ب}^2 \text{قط}^2 \text{طہ})$$

$$= (\text{لا} - \text{ب}) (\text{قط}^2 \text{طہ} - \text{مس}^2 \text{طہ})$$

$$= \text{لا} - \text{ب}$$



شکل ۷۷

(۲) اگر متوازی الاضلاع

ج ن ک ق کی شکلیں کی جائے تو

$$\text{رقبہ ج ن ک ق} = \Delta ۲ \text{ ج ن ق}$$

$$= \text{لا ب} (\text{قط}^2 \text{طہ} - \text{مس}^2 \text{طہ})$$

دیکھو حصہ اول، دفعہ ۱۶۷ نتیجہ صیح

$$= \text{لا ب}$$

(۳) ماسوں نک، ق ک کی مساواتیں ہیں

$$1 = \frac{\text{لا ق ط ط}}{\text{ب}} - \frac{\text{ماس ط}}{1}$$

$$1 = \frac{\text{لا مس ط}}{1} - \frac{\text{ما ق ط ط}}{\text{ب}}$$

ان کا نقطہ تقاطع ک مساوات ذیل کو پورا کرتا ہے

$$\frac{\text{لا ق ط ط}}{1} - \frac{\text{ماس ط}}{\text{ب}} = \frac{\text{لا مس ط}}{1} - \frac{\text{ما ق ط ط}}{\text{ب}}$$

$$\text{یا } \frac{\text{لا}}{1} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}} \text{ جو ایک متقارب ہے}$$

اس لئے ک متقارب پر واقع ہوتا ہے۔

۳۳۲۔ کسی نقطہ سے قطع زائد کے عماد۔
(۱) دفعہ ۲۱۸ کے طریقہ کے مطابق یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ قطع زائد کے کسی نقطہ ط پر کا عماد ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ق ط ط}} + \frac{\text{ب}}{\text{ماس ط}} = \frac{\text{ب}}{1} + \frac{\text{لا}}{1} \dots (۱۱)$$

(۲) پس وہ نقطے جن پر کے عماد نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں

$$\text{مساوات } \frac{\text{لا}}{\text{ق ط ط}} + \frac{\text{ب}}{\text{ماس ط}} = \frac{\text{ب}}{1} + \frac{\text{لا}}{1} \text{ سے حاصل ہوتے ہیں۔}$$

اس مساوات کو حل کر نیچے لئے رکھو مس ط = ت

$$\text{تب ق ط ط} = \frac{1 + \text{ت}}{1 - \text{ت}} \text{ اور } \text{ماس ط} = \frac{\text{ت}}{1 - \text{ت}}$$

اور مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\text{ب ماس ط} = \frac{\text{ت}}{1 - \text{ت}} \text{ اور } \frac{\text{لا}}{1} + \frac{\text{ب}}{1} = \frac{\text{لا}}{\text{ق ط ط}} + \frac{\text{ب}}{\text{ماس ط}} \text{۔}$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ کسی نقطہ سے ناقص کی طرح ناند پر بھی چار
عام کھینچ سکتے ہیں۔

۲۲۳۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کس طرح مخروطیوں کی صورت میں منحنی پر
کے کسی نقطہ کے محدود ایک متغیر کی رقوم میں جسکو متبدل کہتے ہیں بیان
کئے جا سکتے ہیں۔ برعکس اس کے جب کسی نقطہ کے محدود ایک نامعلوم
مقدار کی رقوم میں بیان کئے جائیں تو نقطہ ایک منحنی پر واقع ہوتا ہے جسکی
مساوات اس متبدل کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال۔ اگر $لا = اجم ط + ب جب ط + ج اور ما = اجم ط + ب جب ط + ج$
تو ثابت کرو کہ $(لا، ا)$ ایک ثابت مخروطی پر واقع ہوتا ہے۔
یہاں ہمیں مساواتوں

$اوج ط + ب جب ط + ج - لا = اور اجم ط + ب جب ط + ج - ما =$ میں دو
ط کو ساقط کرنا ہے۔

تھوڑے عرصہ کے لئے $جم ط$ اور $جب ط$ کو دو جدا جدا غیر معلوم مقلدیں
تصور کر کے اوپر کی مساواتوں سے حاصل کرو

$$\frac{جم ط}{جب ط} = \frac{ب(ج-ا) - \{ا(ج-لا) - (ا(ج-ا) - ا(ب-ا)\}}{ب(ج-ا)}$$

لہذا چونکہ $جم ط + جب ط = ا$

$$\{ب(ج-ا) - ب(ج-لا)\} = \{ا(ج-لا) - ا(ج-ا)\} = \{ا(ب-ا)\}$$

جو درجہ دوم کی مساوات ہے اور جس سے اس یا پر ایک مخروطی کا طریق تعبیر
ہوتا ہے۔

دوسرے درجہ کی رقیں ہیں

$$(ب-ا) + (ب-لا) + (ا-ما) - (لا-ا)$$

اور اس کے اجزائے مخروطی خیالی میں یا میاری طریق کتابت کے موافق
 $ا ب$ کے $ا$ یا پس منحنی قطع ناقص ہے۔

مشقیں

۳۲۔ ناقص $\frac{۱۲}{۱۶} + \frac{۲}{۱۶} = ۱$ پر دو نقطے ہیں جن کے خارج المرکز زاوے بالترتیب ط، ذ، ہ ہیں، ان نقطوں پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کے محدث شکل ذیل میں معلوم کرو۔

$$۱۰۔ \frac{۱۲}{۱۶} - \frac{۲}{۱۶} = ۱ \quad ، \quad ۱۱۔ \frac{۱۲}{۱۶} - \frac{۲}{۱۶} = ۱ \quad ، \quad ۱۲۔ \frac{۱۲}{۱۶} - \frac{۲}{۱۶} = ۱$$

۳۳۔ اگر نقطہ بدربج ط کے نزدیک آتا آتا بالآخر اس پر منطبق ہو جائے تو ثابت کرو کہ عمادوں کا نقطہ تقاطع ہو جاتا ہے

$$۱۰۔ \frac{۱۲}{۱۶} - \frac{۲}{۱۶} = ۱ \quad ، \quad ۱۱۔ \frac{۱۲}{۱۶} - \frac{۲}{۱۶} = ۱ \quad ، \quad ۱۲۔ \frac{۱۲}{۱۶} - \frac{۲}{۱۶} = ۱$$

ط پر کے دو متصل عمادوں کا یہ نقطہ تقاطع اس نقطہ پر کا مرکز انخا کہلاتا ہے۔
۳۴۔ بتاؤ کہ ناقص کے مرکز سے جو چار عماد کھینچ سکتے ہیں ان کے پائے کہاں واقع ہوتے ہیں۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص کے محور اعظم پر کے نقطہ (سا، ۰) سے (محور اعظم کی سمتوں کے علاوہ) دو عماد کھینچ سکتے ہیں، نیز مس $\frac{۱}{۲}$ طہ کے لئے مساوات اس شکل

$$ت^۲ (سا + ۱ - ب) + (۱ - سا - ۱ + ب) = ۰$$

میں معلوم کرو۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ شکل ۷ کے خط ن ق کی سمت نقطہ ن کے مقام پر منحصر نہیں۔

۳۷۔ ایک ناقص کے محور اصغر کے نقطہ (۵، ۰) سے محور اصغر کی

دوستوں کے علاوہ دو اور عماد کھینچ سکتے ہیں، نیز ثابت کرو کہ ت کی مسادات کی دو اصلیں ± 1 محور اصغر کے سروں کے جواب میں ہیں اور باقی اصلیں مسادات

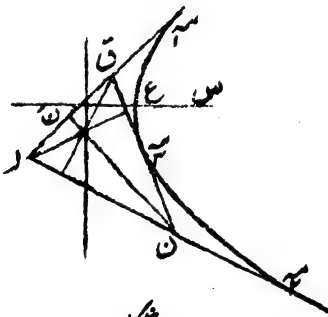
$$b \text{ حصہ } (t^2 + 1) + (t^2 - 1) \text{ (ب) حصہ } = 0$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔ اس سے حاصل کرو کہ باقی دو عماد صرف اسی صورت میں حقیقی ہونگے جبکہ حصہ کی قیمت $\frac{b}{t^2 - 1}$ سے تعداد کم ہو۔

توضیحی مثالیں

(۱) کسی مکانی کے تین ماسوں سے جو شلت بنتا ہے اس کا مرکز ہندسی مرتبہ پر واقع ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مکانی $MA = 4$ لا ہے، نیز نقاط M, m, m پر کے ماسوں سے شلت N ق ر بنتا ہے۔ اب ہمیں ان عمودوں کی مساداتیں معلوم کرنا ہے جو نقاط N ق ر سے مقابل کے اضلاع پر نکالے جائیں۔



شکل ۷۸

نقطہ R, m, m پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ہے، اس لئے اس کے محدد R, m, m $(m + m)$ ہیں (یکمشت و دفعہ) اس لئے اس نقطہ سے

N ق یعنی

لا۔ $m + 1$ $m + 1$ پر کاؤ

$$m \text{ (لا۔) } + m \text{ (م) } + (m + 1) \text{ (م) } = 0$$

یہ مرتب سے ملتا ہے جہاں لا۔ 1 اور اصلئے

$$= 0 \text{ (م) } + m \text{ (م) } - (m + 1) \text{ (م) } = 0$$

یا $\{م + م + م + م + م + م\} = ۱$ لیکن یہ $م$ ، $م$ ، $م$ کے لحاظ سے متشاکل ہے، اس لئے دوسرے عمود بھی مرتب سے اسی نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۲) اگر $\frac{ت^۲ + ۱}{(ت - ۱)(ت - ۲)} = ۱$ ، $\frac{ت + ۱}{(ت - ۱)(ت - ۲)} = ۱$ تو ثابت کرو کہ نقطہ (لا، ما) قطع زائد پر واقع ہے، اس کے متقارب دریافت کرو۔

ان مساواتوں میں سے حسب معمول $ت$ کو ساقط کرنے سے ہمیں لا اور ما میں درجہ دوم کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے۔
 متقارب مطلوبہ بمصلہ مساوات سے معلوم ہو سکتے ہیں لیکن ذیل طریقہ زیادہ سبق آموز ہے۔

لاتنا ہی پر کے نقطہ کے لئے لا اور ما دونوں لاتنا ہی ہوتے ہیں، لہذا قیمتوں $ت = ۱$ یا $ت = ۲$ سے معنی کے لاتنا ہی پر کے نقطے حاصل ہوتے ہیں۔

اب اگر $ل + م + ۱ = ۰$ ایک متقارب ہے تو یہ معنی سے لاتنا ہی پر کے دو نقطوں پر ملتا ہے۔

لا اور ما کی قیمتیں $ت$ کی رقوم میں درج کرنے سے

$$ل(ت + ۱) + م(ت + ۱) + ۱ = ۰ \quad (۱)$$

جس سے نقاط تقاطع کے لئے $ت$ کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ پس اگر $ل + م + ۱ = ۰$ ایک متقارب ہو تو مساوات بالا کی اصلیں یا ۱ ، ۱ ہو گئی یا ۲ ۔

مساوات بالا ہے: $ت(ل + ۱) + ت(م + ۳) + ل + م + ۲ = ۰$

اگر یہ مساوات $ت = ۲$ یا $ت = ۱$ ہو (جسکی اصلیں ۱ ، ۱ ہیں) تو

$$\frac{ل + ۱}{۱} = \frac{۳ + م}{۲} = \frac{ل + م + ۲}{۱}$$

۵۰۔ جن نقطوں کے خارج المرکز زاویے $A + B$ ، A - B ہیں
 اُن کو ملانے والے وتر کا طول $2c$ جب B سے جہاں $2c$ متوازی
 قطر ہے۔

۵۱۔ اگر ناقص $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$ کے نقطہ ن کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ن ہو تو ثابت کرو کہ ن ، ن پر کے عمود ایک ثابت دائرہ پر ملتے ہیں۔

۵۲۔ ثابت کرو کہ خواہ طہ کی کچھ ہی قیمت ہو ایک ایسے نقطہ کا طریق جس کے محدود شکل لاء $\frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{P_1}{P_1 + P_2}$ ، $\frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}$ میں لکھے جاسکتے ہیں ایک ناقص ہے۔

۵۳۔ وہ شرط معلوم کرو کہ ناقص $\frac{1}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} = 1$ میں طہ اور خبیثہ کے ماس علی القوائم ہوں۔ اگر تپ = مس طہ اور تپ = مس فیہ تو ثابت کرو کہ شرط مطلوبہ ب^۲ (ا-تپ) (ا-تپ) + ہم و ات تپ = صفر
۵۴۔ اگر ایک ناقص کے نقاط ع، ہ پر کے ماس نقطہ (ل، ل) پر ملیں و ثابت کرو کہ $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\text{جم}} (\text{ع} - \text{ہ})$ ، $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\text{ب}} (\text{ع} + \text{ہ})$
 $\frac{1}{\text{جم}} (\text{ع} - \text{ہ})$

نیز ثابت کرو کہ اسی صورت میں $\frac{1}{e}$ ، $\frac{1}{e}$ ، $\frac{1}{e}$ مساوات ذیل کی اصلیں ہیں :

$$2 - \left(1 + \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}.$$

۵۵۔ مشقوں ۵۳ اور ۵۴ سے ثابت کرو کہ اگر ناقص کے ماسر جو لام سے کہیںچے جائیں علی التوا تم ہوں تو (۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰) مرتب دائرہ پر واقع ہے۔

۵۶۔ اگر ایک ناقص پر کے دو نقاط ن اور ق کے خارج المرکز زاوے قائم ہوں تو ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے ماس ایک دوسرے کو امدادی دائرہ پر قطع کریں گے۔ بشرطیکہ

$$\frac{اجم}{فم} - \frac{فم}{فم} = \frac{اجم}{فم} + \frac{فم}{فم} + \frac{باجب}{فم} + \frac{فم}{فم}$$

۵۷۔ نیز ثابت کرو کہ مشق ۵۶ کی صورت میں اگر نقاط ن اور ق کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقاط ن'، ق' ہوں تو وتر ن' ق' ناقص سے اُس نقطہ پر مس کریگا جو ن اور ق پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کے جواب میں ناقص پر ہے۔

۵۸۔ اگر ایک ناقص کے ماس کے اُس حصہ کا طول جو دو محوروں کے درمیان منقطع ہوتا ہے اس کے نصف محوروں کے مجموعہ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ اُس عمود کا طول جو مرکز سے ماس مذکور پر کھینچا جائے نصف محوروں کے تناسب وسطی کے مساوی ہوگا۔

۵۹۔ اگر کسی منحنی پر کے ایک نقطہ کے محدود مساواتوں (طہ + عہ) اور ما = ب مس (طہ + بہ) سے معلوم ہوں جہاں طہ متغیر ہے تو ثابت کرو کہ منحنی قطع زائد ہے، اس کے متقابلوں کا مقام معلوم کرو۔

۶۰۔ ثابت کرو کہ ایک مکانی کے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع تک جو ماسکی نیم قطر کھینچ سکتا ہے وہ اس خط پر عمود وار ہوتا ہے جو ماس کے کو متناظر وتر اور مرتب کے نقطہ تقاطع سے وصل کرتا ہے۔

۶۱۔ مخروطی $\frac{۱۷}{۱۶} + \frac{۱۷}{۱۶} = ۱$ پر لا اور ب دو ایسے نقطے ہیں کہ ایک کے خارج المرکز زاویہ کا تین گنا دوسرے کے مکمل کے مساوی ہے ثابت کرو کہ لا ب کے قطب کا طریق

$$۱۷ = \frac{ب}{۱۶} + \frac{۱۷}{۱۶}$$

۶۲۔ ناقص $\frac{لا}{۲ا} + \frac{ما}{۲ب} = ۱$ پر کے دو نقطوں کے خارج المركز
زاوے ع + ب اور ع - ب ہیں، ثابت کرو کہ ان نقطوں کو ملانے والے
وتر کی مساوات $\frac{لا}{۲ا} + \frac{ما}{۲ب} = ۱$ جم ہے، نیز ثابت کرو کہ اس وتر اور
اس کے سروں پر کے ماسوں سے جو رقبہ گھرجاتا ہے وہ اب جب ب/ جم ب
کے مساوی ہے۔

۶۳۔ ایک منحنی پر کے کسی نقطہ کے محدود (لا، ما) کی مساواتیں

$$لا = لا^۲ + ب^۲، ما = لا^۲ + ب^۲$$

ہیں، منحنی کی مساوات معلوم کرو۔

۶۴۔ ایک ناقص کے نصف محور لا اور ب ہیں اور مرکز ج ہے
منحنی پر کے کسی نقطہ ن سے عا د ن ل کشینچا گیا ہے اور مرکز سے
اس عا د پر عمود ج ل نکالا گیا ہے، ن ل کو ت تک اتنا خارج
کیا گیا ہے کہ ن ل \times ن ت = اب، ثابت کرو کہ ت کا طریق
ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے اور نصف قطر لا - ب ہے۔

۶۵۔ ہم مرکز ناقص جن میں سے ہر ایک کا مرکز مبدأ پر ہے اور رقبہ
۲ ج کے مساوی ہے اسی طرح کھینچے گئے ہیں کہ ان کے اصلی محور
حوالہ کے ملی القوائم محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان
ناقصوں کے ان نقاط کا طریق جن پر سے ماس محور لا کے ساتھ زاویہ
ع بناتے ہیں لا ما (لا - مام ع) ج مام ع = ہے۔

$$۶۶۔ ناقص \frac{لا}{۲ا} + \frac{ما}{۲ب} = ۱ پر کے نقطوں سے دائرہ لا + ما = ۲ا$$

کے ماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اوتار تاس ناقص
لا + ما = ۲ا کو مس کرتے ہیں۔

اگر $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$ تو ثابت کرو کہ وہ خط جو مرکز کو دائرہ پر کے
نقاط تماس سے وصل کرتے ہیں دوسرے ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔

باب ہفتم

محروطی تراش کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو

محروطیوں کے متعلق بہت سے سوالوں میں اور خاص کر ان میں جو ایک ماسکہ سے متعلق ہوتے ہیں اس ماسکہ کو قطب مان کر قطبی محدودوں کو استعمال کرنا نہایت سہولت بخش ہوتا ہے۔

باب ہذا میں ہم محروطیوں کی مساواتیں محدودوں کے اس نظام میں معلوم کریں گے اور چند آسان نتیجوں پر جو ان سے مستنبط ہو سکیں گے کریں گے۔

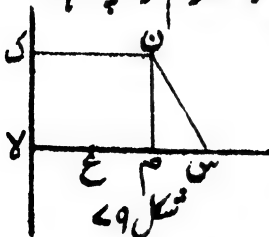
۲۲۴۔ محروطی کی قطبی مساوات دریافت کرو جبکہ ماسکہ کو قطب اور اس میں سے گزرنے والے محور کو ابتدائی خط مانا جائے۔

فرض کرو کہ ماسکہ M ہے، S لا مرتبہ کا عمود ہے اور Z خروج المرکز ہے، ہم ابتدائی خط کو سمت S سے لائیں گے۔

اگر N منحنی پر کا کوئی نقطہ ہو اور N M سے N کا بالترتیب S سے N اور مرتبہ پر عمود نکالے جائیں تو

$$S \text{ سے } N = R \text{ اور } N \text{ سے } S = \phi$$

پس ہمیں ان دو مقداروں R اور ϕ میں ربط معلوم کرنا چاہئے۔



$$\text{اب } S \text{ سے } N = Z \times N \text{ ک} = Z \times M \phi$$

$$= Z (S \phi - S M)$$

$$= Z (S \phi - S N \text{ جم } \phi)$$

$$\text{یا } R = Z \times S \phi - Z \times \text{جم } \phi$$

ہذا $r = (1 + \text{زجم طہ}) \times \text{س ل}$

$$\text{ل} = \frac{\text{ز} \times \text{س ل}}{1 + \text{زجم طہ}} \quad \text{جو مطلوبہ ربط ہے۔}$$

اس مساوات سے ہمیں فوراً معلوم ہوتا ہے کہ ل کی قیمت جبکہ طہ ۹۰ کے مساوی ہو $\text{ز} \times \text{س ل}$ ہے (کیونکہ اس صورت میں زجم طہ = ۰) یعنی $\text{ز} \times \text{س ل}$ کا نیم و تر خاص کے مساوی ہے (دفعہ ۶۲) اب اگر اس کو حسب معمول ل سے تعبیر کیا جائے تو مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\text{ل} = \frac{\text{ل}}{1 + \text{زجم طہ}}$$

یعنی $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{زجم طہ} \dots\dots\dots (۱)$

جو مطلوبہ قطبی مساوات کی عام شکل ہے۔
نتیجہ صریح - اگر ابتدائی خط محور سے نیچے کی طرف زاویہ عہ بنا
تو $\text{س م} = \text{س ل}$ (زجم طہ - عہ)
اور مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{زجم (طہ - عہ)} \dots\dots\dots (۲)$$

دراصل ہر نقطہ کے لئے محدود طہ بقدر زاویہ عہ کے بڑھا دیا گیا ہے۔
۲۲۵ - قطبی مساوات سے منحیوں کی شکل معلوم کرنا۔

اگر قطبی مساوات $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{زجم طہ}$ دی ہوئی ہو تو ہم
نہایت آسانی سے منحیوں کی شکل کا عام اندازہ لگا سکتے ہیں۔
اولاً ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ل کی قیمت لاتنا ہی اس وقت
ہوگی جبکہ

۱۔ زجم طہ =۔ یعنی جبکہ ججم طہ =۔ ۱/ز
 اگر ز کی قیمت ایک سے کم ہو تو اس سے طہ کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہیں ہوتی، پس منحنی لاتنا ہی لگے فرضی صورت میں پھیل سکتا ہے جبکہ ز ایک کے مساوی ہو یا ایک سے بڑی ہو۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ناقص ایک بند منحنی ہے اور مکانی کا قطر سمتی لاتنا ہی صرف اس صورت میں ہوتا ہے جبکہ ججم طہ =۔ ۱ یعنی طہ = ۱۸۰۔ قطع زائد کے سمتی نیم قطر دوستوں میں لاتنا ہی تک پہنچتے ہیں اور یہ سمتیں طہ کی ان دو قیمتوں سے تعبیر ہوتی ہیں جو مساوات ججم طہ =۔ ۱/ز سے حاصل ہوتی ہیں، ظاہر ہے کہ یہ سمتیں ابتدائی خط کے ساتھ اوپر اور نیچے مساوی زاوے بناتی ہیں۔

دفع ہو کہ یہ دو لاتنا ہی سمتی نیم قطر ایسے خط ہیں جو ماسکے میں سے گزرنے میں اور متقاربوں کے متوازی ہیں، (کیونکہ یہ منحنی سے لاتنا ہی پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں) اور صریحاً ان میں سے ہر ایک کلاس محدودہ کی سمت کے ساتھ زاویہ قطعاً (ز) بناتا ہے۔ بالفاظ دیگر مندرجہ بالا سے یہ مراد ہے کہ خروج المرکز متقاربوں کے درمیانی زاویہ کے نصف کے قاطع کے مساوی ہے۔

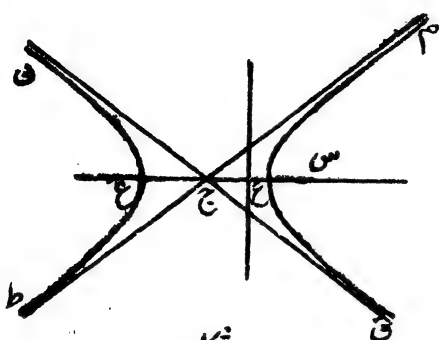
اب ہم زائد کے مرسم کرنے کی منسلکوں پر تفصیلی بحث کریں گے اور چونکہ ناقص اور مکانی کی صورتیں اصولاً ویسی ہی ہیں اور تفصیل کے لحاظ سے نسبتاً آسان ہیں اس لئے ہم ان کو طالب علم کے لئے مشق کے طور پر چھوڑ دیں گے۔ لیکن یاد رہے کہ طالب علم کو اس مشق پر حاوی ہونے میں کوتاہی نہیں کرنی چاہیے۔

طہ کی کسی قیمت کے جواب میں ر کی قیمت مساوات ذیل سے حاصل ہوئی ہے

$$R = \frac{L}{1 + \text{زجم طہ}}$$

اگر طہ = . تور = $\frac{ل}{۱+ز}$

فرض کرو کہ اس نقطہ کا مقام ع ہے۔



شکل ۸۰

جیسے طہ بڑھتا ہے
جسم طہ بتدریج کم ہوتا
ہے اور بنا بریں لڑ بڑھتا
ہے اور یہی ہوتا رہتا
ہے حتیٰ کہ جو وقت
ز لا متناہی ہو جاتا
ہے تو $۱+ز$ جسم طہ
صفر ہو جاتا ہے اس طرح

سے ہمیں دائیں جانب کی شاخ کے اوپر کا حصہ ع م حاصل ہوتا ہے
جس وقت طہ اس قیمت سے جو $۱+ز$ جسم طہ کو صفر بنا دیتی ہے
ذرا آگے بڑھتا ہے تو $۱+ز$ جسم طہ کی قیمت ایک نہایت ہی
قلیل منفی مقدار کے مساوی ہوتی ہے۔ پس ر فوراً ایک بہت
بڑی منفی مقدار کے مساوی ہو جاتا ہے لہذا نقطہ بائیں طرف کی
شاخ کے نچلے حصہ پر بہت دور واقع ہوتا ہے۔

جس وقت طہ بتدریج بڑھتے بڑھتے ۱۸۰ کی طرف جاتا ہے تو نسبت
جسم طہ (جو منفی ہے) بلحاظ عددی قیمت کے بڑھتی ہے، لہذا
جملہ $۱+ز$ جسم طہ جس کی مطلق قیمت (منفی ہونے کی وجہ سے)
گھٹتی ہے عددی قیمت میں بڑھتا ہے اس لئے ر کی عددی
قیمت بتدریج کم ہوتی جاتی ہے حتیٰ کہ بالآخر جس وقت طہ = ۱۸۰
تو ر کی متناظر قیمت ل / ۱- ز ہو جاتی ہے اس طرح ہم بائیں
طرف کی شاخ کا حصہ طہ ع مرسم کر لیتے ہیں۔

بعد ازاں جب طہ ۱۸۰ کے آگے بڑھتا ہے تو جسم طہ کی

عددی قیمت پھر گھٹنا شروع ہوتی ہے اور منفی ہوتی ہے، لہذا
 ۱۔ زجم طہ گھٹتا ہے۔ اور اس بنا پر کہ اس کی قیمت بڑھتی ہے
 جو بالآخر لامتناہی ہو جاتی ہے جبکہ ۱۔ زجم طہ = ۰۔
 پس طہ کی اس قیمت کے لئے جو صریحاً ۱۰ اور ۲۰ کے درمیان واقع ہوتی ہے
 نقطہ ترسیم بائیں جانب کی شاخ E کے اوپر کے حصہ میں
 لامتناہی پہنچ جاتا ہے۔ آخر میں جب طہ اس قیمت سے آگے
 ۳۶۰ تک جاتا ہے تو نقطہ ترسیم دائیں جانب کی شاخ Q کے
 نچلے حصہ پر لامتناہی فاصلہ سے چل کر پھر E پر آ جاتا ہے اور
 E پر آنے کے وقت طہ کی قیمت ۳۶۰ ہوتی ہے۔ اس طرح
 پورا دور مکمل ہو جاتا ہے۔

مثال۔ ایک مخروطی کا وتر خاص ۶ ہے اور خروج مرکز ۱،
 اس ماسکی وتر کا طول معلوم کرو جو محور اعظم کے ساتھ ۴۵ کا
 زاویہ بناتا ہے۔

یہاں ہم قطبی مساوات کو استعمال کرتے ہیں۔
 چونکہ نیم وتر خاص ۳ ہے اور خروج مرکز ۱، اس لئے

مساوات ہے $\frac{3}{r} = 1 + \frac{1}{r}$ جم طہ جہاں سمتی نیم قطر ہے

اگر n سے n ماسکی وتر ہو تو n کے لئے طہ کی قیمت
 n سے لا سے تعبیر ہوتی ہے جو ۴۵ کے مساوی ہے اور
 n کے لئے یہ زاویہ منسک E سے $n = ۲۲۵$ ہے۔

$$\text{پس } \frac{3}{\sin n} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sin n}} \quad \text{اس لئے } \sin n = \frac{374}{1+374}$$

$$\text{اسی طرح سے } \frac{3}{\sin n} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{\sin n}} \quad \text{اور } \sin n = \frac{374}{1-374}$$

اس لئے کل وتر = $\sin n + \sin n$

$$\left\{ \frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}} \right\} \sqrt{2} =$$

$$\left\{ \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \right\} \sqrt{2} =$$

$$4 \cdot \frac{2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

۲۲۶۔ کسی ماسکی وتر کے حصوں کا اوسط موسیقی نیم وتر خاص کے مساوی ہوتا ہے۔
اگر ن میں ن کوئی ماسکی وتر ہو تو ہمیں صرف یہ ثابت کرنا چاہئے کہ

$$\left(\text{ٹیوٹوریل الجبر دوم فہمہ ۲۱۰} \right) \frac{1}{\text{سن}} + \frac{1}{\text{سن}} = \frac{2}{\text{ل}}$$

اب فرض کرو کہ ن کے لئے طہ کی قیمت (یعنی ل سے سن) عہ
اور ن کے لئے یہ قیمت = $\pi + \text{عہ}$
اب چونکہ قطبی مساوات ہے

$$\frac{\text{ل}}{\text{سن}} = 1 + \text{زجم طہ}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{ل}}{\text{سن}} = 1 + \text{زجم عہ}$$

$$\frac{\text{ل}}{\text{سن}} = 1 + \text{زجم} (\pi + \text{عہ}) = 1 - \text{زجم عہ}$$

ان مساواتوں کو جمع کرنے سے فوراً

$$2 = \frac{\text{ل}}{\text{سن}} + \frac{\text{ل}}{\text{سن}}$$

$$\text{یعنی } \frac{2}{\text{ل}} = \frac{1}{\text{سن}} + \frac{1}{\text{سن}} \dots \dots \dots (۳)$$

مشقیں

۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ جسم طہ ایک مخروطی کو تعبیر

کرتی ہے جس میں $l = \frac{1}{r}$ اور $z = \frac{1}{r}$

۲۔ ثابت کرو کہ مکانی کی قطبی مساوات کو شکل $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ طہ $\frac{1}{r}$ میں لکھا جاسکتا ہے جہاں z وتر خاص ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ مساوات $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ جسم طہ z جب طہ

کو ہمیشہ $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ زجم (طہ - عہ) کی شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ لہذا اس مساوات سے ہمیشہ ایک مخروطی تعبیر ہوتی ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ مساواتوں $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ زجم طہ اور

$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ زجم طہ - اسے ایک ہی منحنی تعبیر ہوتا ہے۔

۵۔ ایک مخروطی کا وتر خاص ۵ ہے اور خروج المکرز $\frac{1}{r}$ ہے اس ماسکی وتر کا طول معلوم کرو جو محور اعظم کے ساتھ 40° کا زاویہ بناتا ہے۔

۶۔ منحنیات ذیل کو مرتب کرو۔

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ جسم طہ } \frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ جسم طہ}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ جسم طہ } \frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ جسم طہ}$$

۷۔ اگر n س ن ایک مخروطی کا ماسکی وتر ہو جو محور کے ساتھ

زاویہ طہ بنائے تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ اور

$$+ (1 + \text{زجم} - \text{عہ} - \text{بہ}) \text{جب} (\text{طہ} - \text{عہ} - \text{بہ}) = 0$$

اب - جب (طہ - عہ + بہ) + جب (طہ - عہ - بہ) = ۲ زجم (طہ - عہ) جب

اور ز (جم - عہ - بہ جب طہ - عہ - بہ - جم عہ + بہ جب طہ - عہ - عہ + بہ)

$$= \frac{1}{2} \text{ ز } \{ \text{جب} (\text{طہ} - ۲\text{بہ}) + \text{جب} (\text{طہ} - ۲\text{عہ}) - \text{جب} (\text{طہ} + ۲\text{بہ}) \text{جب} (\text{طہ} - ۲\text{عہ}) \}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ز } \{ \text{جب} (\text{طہ} - ۲\text{بہ}) - \text{جب} (\text{طہ} + ۲\text{بہ}) \} = - \text{زجم} \text{ طہ جب } ۲\text{بہ}$$

خط مستقیم کی مساوات میں درج کرنے سے

$$\frac{1}{2} \text{ جب } ۲\text{بہ} - ۲ \text{جم} (\text{طہ} - \text{عہ}) \text{جب بہ} - \text{زجم} \text{ طہ جب } ۲\text{بہ} = 0$$

$$\text{یا } \frac{1}{2} = \text{زجم} \text{ طہ} + \text{طہ} - \text{عہ} \dots\dots\dots (۴)$$

۲۲۸ - متبادل ثبوت - دفعہ گذشتہ کا عمل غالباً طویل ہے

اس کی بجائے مختصر طریقوں سے کام لے سکتے ہیں، لیکن اس

میں فائدہ یہ ہے کہ یہ بالکل صاف اور سیدھا طریقہ ہے، اس میں

ہم خط مستقیم کی مساوات سب سے زیادہ طبعی شکل میں لیتے

ہیں اور پھر معمولی طریقوں سے محصلہ خطی مساواتوں کو حل کرتے ہیں

مساوات (۴) کی شکل کو دیکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ عمل میں اختصار

ہو سکتا ہے اگر ابتدا میں ہی ہم خط کی مساوات کی شکل

$$\frac{1}{2} = \text{ججم} (\text{طہ} - \text{عہ}) + ۱ \text{جم} \text{ طہ} \text{فرض کریں۔}$$

[نوٹ یہ مساوات ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ ضرب دینے اور

کارٹیزیائی محددوں میں بدلنے کے یہ درجہ اول کی مساوات ہو جاتی ہے]

تب اس مساوات اور $\frac{1}{2} = 1 + \text{زجم} \text{ طہ}$ دونوں سے رکی

وہی قیمت حاصل ہوگی جبکہ $\text{طہ} = \text{عہ} + \text{بہ}$ اور نیز $\text{طہ} = \text{عہ} - \text{بہ}$ لہذا $۱ + \text{زجم} (\text{عہ} + \text{بہ}) = \text{ججم} + \text{بہ} + \text{دجم} (\text{عہ} + \text{بہ})$ اور $۱ + \text{زجم} (\text{عہ} - \text{بہ}) = \text{ججم} + \text{بہ} + \text{دجم} (\text{عہ} - \text{بہ})$ تفریق کرنے سے فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\text{ز} = \text{د}$$

اور یہ قیمت درج کرنے سے $\text{ج} = \text{قط بہ}$

پس مطلوبہ مساوات ہے $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{زجم طہ} + \text{قط بہجم} (\text{طہ} - \text{عہ})$

۲۲۹۔ نقطہ عہ پر کے مماس کی مساوات۔

اگر ہم $\text{عہ} + \text{بہ}$ اور $\text{عہ} - \text{بہ}$ کو ملانے والے وتر کی مساوات میں بہ کو چھوٹا کرتے جائیں اور بالآخر اسے صفر بنا دیں تو اس صورت میں یہ مساوات عہ پر کے مماس کو تعبیر کرے گی۔ اس لئے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{زجم طہ} + \text{قط بہجم} (\text{طہ} - \text{عہ})$$

میں $\text{بہ} = ۰$ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ مساوات مطلوبہ یہ ہے

$$\text{یعنی } \frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{زجم طہ} + \text{جم} (\text{طہ} - \text{عہ}) \dots \dots (۵)$$

انتباہ۔ جب مماس کی مساوات دریافت کرنا مطلوب ہو تو دفعتاً

۲۲۸ یا ۲۲۸ کے ضروری حصے ثبوت میں پہلے دئے جانے چاہئیں۔

۲۳۰۔ مماس کی قطبی مساوات معلوم کرنے کا متبادل طریقہ۔

ذیل کا عمل علم آموز ثابت ہوگا۔

کارٹینری محدودوں میں بدلنے سے مماس کی مساوات آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔

منحنی ہے $\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم طہ یا ر} = L - \text{ز رجم طہ}$
 مربع لینے سے $L + M = (L - \text{ز لا})$ جو مخروطی کی مساوات ہے
 اس مساوات کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے :-
 $L(1 - \text{ز}) + M + \text{ز} = L - \text{ز لا} - L = 0$
 لہذا $(L + M)$ پر کے ماس کی مساوات ہے
 $L(1 - \text{ز}) + M + \text{ز} = L - \text{ز لا} - L = 0$

یا $L + M = L - \text{ز} (L + \text{لا}) + \text{ز لا} = (L - \text{ز لا}) (L - \text{ز لا})$
 اب فرض کر دو کہ $(L + M)$ کے قطبی محدود، عہ ہیں، پھر واپس قطبی
 محدودوں میں تبدیل کرنے سے اوپر کی مساوات ہو جاتی ہے
 $L + \text{زجم طہ} = \text{زجم طہ} + \text{عہ} = (L - \text{ز رجم طہ}) + \text{ر}$
 کیونکہ $L = L - \text{ز لا}$ چونکہ $(L + M)$ منحنی پر ہے

$\text{ز رجم طہ} = (L - \text{ز رجم طہ}) = L - \text{ز رجم طہ}$

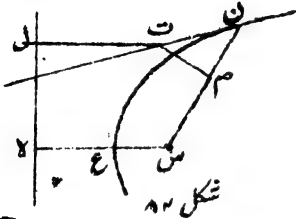
$L = \text{ز} \{ \text{ز رجم طہ} + \text{زجم طہ} \} = (L - \text{عہ})$

جس سے حسب سابق حاصل ہوتا ہے $\frac{L}{r} = \text{ز رجم طہ} + \text{زجم طہ} = (L - \text{عہ})$

۲۴۱۔ ماس کی مساوات کی ہندسی تعبیر۔

فرض کر دو کہ نقطہ N کا قطبی زاویہ عہ ہے اور N پر کے ماس
 پر t کوئی اور نقطہ ہے جس کے محدود $(L + \text{طہ})$ ہیں، N
 پر عمود t م نکالو اور t مرتبہ پر عمود نکالو۔
 تب چونکہ $L + \text{عہ} = N = \text{عہ}$ اور $L + \text{عہ} = t = \text{طہ}$
 اس لئے t $N = \text{عہ} - \text{طہ}$

اب ماس کی مساوات ہے $\frac{ل}{ر} = زجم طہ + جم طہ - عہ$
 یال - زرجم طہ = رجم طہ - عہ = مس تجم ت سن = مس م
 اور ل - زرجم طہ = رجم طہ - عہ = ز (سن لا - رجم طہ)
 $ز \times ت ل =$



شکل ۸۷

لہذا مس م = ز ت ل
 اسلئے مس م : ت ل = مس ع : ع لا
 پس اگر ماس کی قطبی مساوات کو
 ہندسی طریق پر تبخیر کیا جائے تو
 محروطی تراشوں کی وہ مشہور خاصیت حاصل ہوتی ہے جسے
 آدم نے دریافت کیا - یہ اوپر مندرج ہے -

مشقیں

۹- ثابت کرو کہ نقطہ عہ پر کے ماس کی مساوات کارٹیسزنی محدود
 میں تبدیل کرنے سے ہو جاتی ہے لا (ز + جم عہ) + واجب عہ ل
 ۱۰- اگر مس میں سے نقطہ عہ پر کے ماس پر عمود نکالا جائے
 تو ثابت کرو کہ اس عمود کی مساوات ہوگی

لا جب عہ - ما (ز + جم عہ) = ۰

۱۱- ثابت کرو کہ اگر مس میں سے محروطی کے ماس پر عمود نکالا
 جائے تو اس عمود کے پایہ کا طریق گزشتہ دو مشقوں کی مساواتوں
 میں سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے، اس لئے
 ثابت کرو کہ طریق کی مساوات ہے :-

$$(ل - ز لا) + ز ما = لا + ما$$

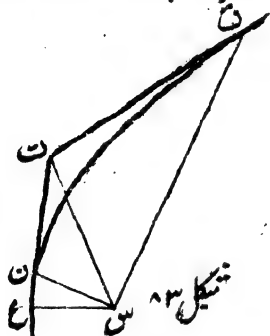
اس مساوات سے کیا تبخیر ہوتا ہے ؟

توضیحی مثالیں

۱۔ اگر کسی نقطہ سے مخروطی کے ماس کھینچے جائیں تو متناہت کر دے کہ ان کے مجاذبی ماسکہ پر مساوی زاوے بنتے ہیں۔

ت پر ملتے ہیں، تب ہمیں یہ ثابت کرنا چاہئے کہ ت میں فراویہ ن س ق کی تنصیف

فرض کرو کہ نقاط ن اور ق
کے قطبی زاوے عہ اور بہ
ہیں، تب مماسوں ت ن اور
ت ق کی مساواتیں ہیں



$$\frac{L}{r} = \text{زجم طه} + \text{جم (طه - عه)}$$

اور $\frac{L}{r} = \text{زخم طہ} + \text{حجم (طہ - ہ)}$

نقطہ ت کے محدود معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان مساواتوں کو اور ط کے لئے حل کرنا چاہئے، تفسیق کرنے سے ہمیں حال ہوتا ہے

جَمْ (طہ - عہ) = جَمْ (طہ - بہ)

اب یہ زاوے مساوی نہیں ہوسکتے کیونکہ اس صورت میں
عم = یہ / ہندا

طه - عه = (طه - به) یا طه - عه = به - طه

پس $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ - $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ - $\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ - $\frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$ - $\frac{1}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$ - $\frac{1}{64} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{128}$ - $\frac{1}{128} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{256}$ - $\frac{1}{256} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{512}$ - $\frac{1}{512} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1024}$ - $\frac{1}{1024} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2048}$ - $\frac{1}{2048} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4096}$ - $\frac{1}{4096} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8192}$ - $\frac{1}{8192} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16384}$ - $\frac{1}{16384} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32768}$ - $\frac{1}{32768} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{65536}$ - $\frac{1}{65536} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{131072}$ - $\frac{1}{131072} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{262144}$ - $\frac{1}{262144} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{524288}$ - $\frac{1}{524288} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1048576}$ - $\frac{1}{1048576} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2097152}$ - $\frac{1}{2097152} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4194304}$ - $\frac{1}{4194304} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8388608}$ - $\frac{1}{8388608} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16777216}$ - $\frac{1}{16777216} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{33554432}$ - $\frac{1}{33554432} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{67108864}$ - $\frac{1}{67108864} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{134217728}$ - $\frac{1}{134217728} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{268435456}$ - $\frac{1}{268435456} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{536870912}$ - $\frac{1}{536870912} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1073741824}$ - $\frac{1}{1073741824} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2147483648}$ - $\frac{1}{2147483648} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4294967296}$ - $\frac{1}{4294967296} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8589934592}$ - $\frac{1}{8589934592} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{17179869184}$ - $\frac{1}{17179869184} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{34359738368}$ - $\frac{1}{34359738368} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{68719476736}$ - $\frac{1}{68719476736} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{137438953472}$ - $\frac{1}{137438953472} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{274877906944}$ - $\frac{1}{274877906944} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{549755813888}$ - $\frac{1}{549755813888} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1099511627776}$ - $\frac{1}{1099511627776} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2199023255552}$ - $\frac{1}{2199023255552} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4398046511104}$ - $\frac{1}{4398046511104} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8796093022208}$ - $\frac{1}{8796093022208} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{17592186044416}$ - $\frac{1}{17592186044416} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{35184372088832}$ - $\frac{1}{35184372088832} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{70368744177664}$ - $\frac{1}{70368744177664} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{140737488355328}$ - $\frac{1}{140737488355328} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{281474976710656}$ - $\frac{1}{281474976710656} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{562949953421312}$ - $\frac{1}{562949953421312} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1125899906842624}$ - $\frac{1}{1125899906842624} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2251799813685248}$ - $\frac{1}{2251799813685248} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4503599627370496}$ - $\frac{1}{4503599627370496} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9007199254740992}$ - $\frac{1}{9007199254740992} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18014398509481984}$ - $\frac{1}{18014398509481984} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36028797018963968}$ - $\frac{1}{36028797018963968} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{72057594037927936}$ - $\frac{1}{72057594037927936} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{144115188075855872}$ - $\frac{1}{144115188075855872} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{288230376151711744}$ - $\frac{1}{288230376151711744} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{576460752303423488}$ - $\frac{1}{576460752303423488} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1152921504606846976}$ - $\frac{1}{1152921504606846976} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2305843009213693952}$ - $\frac{1}{2305843009213693952} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4611686018427387904}$ - $\frac{1}{4611686018427387904} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9223372036854775808}$ - $\frac{1}{9223372036854775808} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18446744073709551616}$ - $\frac{1}{18446744073709551616} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36893488147419103232}$ - $\frac{1}{36893488147419103232} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{73786976294838206464}$ - $\frac{1}{73786976294838206464} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{147573952589676412928}$ - $\frac{1}{147573952589676412928} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{295147905179352825856}$ - $\frac{1}{295147905179352825856} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{590295810358705651712}$ - $\frac{1}{590295810358705651712} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1180591620717411303424}$ - $\frac{1}{1180591620717411303424} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2361183241434822606848}$ - $\frac{1}{2361183241434822606848} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4722366482869645213696}$ - $\frac{1}{4722366482869645213696} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9444732965739290427392}$ - $\frac{1}{9444732965739290427392} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18889465931478580854784}$ - $\frac{1}{18889465931478580854784} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{37778931862957161709568}$ - $\frac{1}{37778931862957161709568} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{75557863725914323419136}$ - $\frac{1}{75557863725914323419136} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{151115727451828646838272}$ - $\frac{1}{151115727451828646838272} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{302231454903657293676544}$ - $\frac{1}{302231454903657293676544} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{604462909807314587353088}$ - $\frac{1}{6044629098073145873530$

جس سے ظاہر ہے کہ t سے زاویہ n سے q کی
تخصیص کرتا ہے۔

(۲) m سے q کے اُس حصہ کے معادلی جو نقطہ t سے m اور مرتب کے
درمیان منقطع ہوتا ہے ماسکہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

فرض کر دو کہ n پر کا m سے مرتب سے t پر ملتا ہے،
تب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ زاویہ n سے t قائمہ ہے۔
مرتب پر کے کسی نقطہ کے لئے

$$r \text{ حجم طہ} = s = \frac{L}{r}$$

$$\text{یعنی } \frac{L}{r} = r \text{ حجم طہ کیونکہ}$$

$$L = r \times s = r \times \frac{L}{r} \dots \dots \text{(دفعہ ۶۱ کی رو سے)}$$

اب نقطہ e پر کا m سے ہے

$$\frac{L}{r} = r \text{ حجم طہ} + r \text{ حجم (طہ - عہ)} \text{ اور جس نقطہ پر یہ مرتب سے}$$

ملتا ہے اُس کے لئے

$$\frac{L}{r} = r \text{ حجم طہ}$$

t کے مجدد معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان دو مساواتوں کو
 r اور طہ کے لئے حل کرنا چاہئے۔ تفریق کرنے سے

$$\text{حجم (طہ - عہ)} = 0$$

$$\frac{\pi}{2} - \text{طہ} - \text{عہ} = \pm \frac{\pi}{2}$$

جس سے ظاہر ہے کہ

$$\angle n \text{ سے } t = \angle n \text{ سے } e - \angle t \text{ سے } e = \text{طہ} - \text{عہ} = \pm \frac{\pi}{2}$$

جس سے نتیجہ مطلوبہ ثابت ہوا۔

باب ہفتم پر متفرق مشقیں

۱۲۔ اگر ایک مکانی کے دو ماسکی وتر n اور q قی علی التوالم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

۱۳۔ اگر مخروطی $\frac{1}{r} = 1 + \text{زجم طہ}$ ایک ناقص ہو اور $\frac{1}{r}$ اور $\frac{1}{r}$ اس کے محورا عظم اور محورا صغر کے طول ہوں تو ثابت

$$\frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{r} \text{ اور } \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

۱۴۔ زائد کے لئے متناظر نتیجہ حاصل کرو۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ مخروطی $\frac{1}{r} = 1 + \text{زجم طہ}$ کے امدادی دائرہ

کی قطبی مساوات $r^2 (1 - \cos \theta) = 2r \text{ زجم طہ} + 1 = 0$ ہے۔

۱۶۔ ان تمام مخروطیوں کی عام مساوات جن کا ماسکہ اور مرتب

وہی ہو $\frac{1}{r} = 1 + \text{زجم طہ}$ ہے جہاں θ اس نظام کی تمام

مخروطیوں کے لئے وہی ہے۔

۱۷۔ ناقص کے تین ایسے ماسکی نیم قطر معلوم کرو جن کے طول

سلسلہ موسیقہ میں ہوں اور جن کے زائد یعنی محدد سلسلہ حسابیہ

میں ہوں۔

۱۸۔ اگر ایک مکانی کے ماسکہ کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچا جا

جو مکانی کے رأس میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ ہر ماسکی وتر

کے لئے ان مقطوعات کا حاصل ضرب جو دائرہ اور مکانی کے

درمیان منقطع ہوں مستقل ہوتا ہے۔
 ۱۹۔ نقاط عہ اور یہ پر ایک مخروطی تراش کے ماس کھینچے گئے ہیں، ان کے نقطہ تقاطع کے قطبی محدود معلوم کرو اور ان کی بناء پر ثابت کرو کہ اگر ایک مکانی کے نقاط n اور q پر کے ماس t پر ہیں تو $n \times t = n \times q$ ۔
 ۲۰۔ کیا شرط پوری ہو کہ خط $\frac{1}{r} = \text{اجم طہ} + \text{ب جب طہ}$ مخروطی $\frac{1}{r} = 1 + \text{اجم طہ کو س کرے}$ ۔

۲۱۔ دو مخروطیوں کے ماس کے اور مرتب دہی ہیں، اگر ایک کا کوئی ماس دوسری کو n اور q پر کاٹے تو ثابت کرو کہ $\frac{n}{n} = \frac{q}{q}$ ۔
 ۲۲۔ مخروطیوں کے ایک نظام کا ماس کے اور وتر خاص دونوں وہی ہیں، ثابت کرو کہ ماس کے میں سے گزرنے والے ایکس ثابت خط مستقیم کے سب نقطوں پر کے ماس محدودہ وتر کا کو ماس سے ایک ہی فاصلہ پر قطع کرتے ہیں۔

۲۳۔ دو مکافیوں کا مشترک ماس کے ہے اور ان کے راس بالترتیب ع اور ع ہیں، اگر $\text{ع خط مستقیم میں ع کا وسطی نقطہ ہو اور ق ق میں ن ن ایک ماس کی وتر ہو جو مکافیوں سے نقاط ق ق، ق، ن، ن پر ملے تو ثابت کرو کہ ق ق کی تنصیف ق پر ہوتی ہے اور مکافیوں کے نقاط ق اور ن پر کے ماس علی القواثم ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق بھی معلوم کرو۔$

۲۴۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مخروطی کے علی القواثم ماس کی وتروں کے سروں پر ماس کھینچے جائیں تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق

ایک ہم ماسکہ مخروطی تراش ہوگی۔

آزمائشی پرچہ ۵

۱۔ بغیر ثبات کرنے کے ایک مخروطی کے لحاظ سے قطب اور قطبی کے مشہور خواص بیان کرو۔ دو خط بلحاظ ایک دوسرے کے مزدوج کب ہوتے ہیں؟ ثبات کرو کہ اس خط کا قطب جو متقارب کے متوازی ہو متقارب پر واقع ہوتا ہے۔

۲۔ قطع زائد لا = ج کے لحاظ سے نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات معلوم کرو۔

۳۔ مخروطی ۹ لا - ۸ ما - ۱۲ لا + ۸ ما + ۴ = کے لحاظ سے خط ۳ لا - ۲ ما = کا قطب معلوم کرو۔

۴۔ ایک نقطہ ایک ناقص کے اندر واقع ہے، بتاؤ کہ اس نقطہ کا قطبی بلحاظ ناقص مذکور کے ہندسی طور پر کس طرح معلوم ہو سکتا ہے۔

۵۔ ایک نقطہ ن کا قطبی بلحاظ مکانی ما = ۴ لا کے کھینچا گیا ہے، اگر وہ عمود جو اس نقطہ سے قطبی مذکور پر کھینچا جائے ایسا ہو کہ ہمیشہ مکانی لا = ۴ ب ما کو مس کرے تو ثبات کرو کہ نقطہ ن خط ۲ لا + ۳ ما + ۴ = پر واقع ہوتا ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مکانی کے دو ماس محور کے ساتھ شتم زاوے بنائیں تو ان کا وتر تاس محور کو ایک ثابت نقطہ پر کاٹے گا۔

۷۔ کئی خط کھینچے گئے ہیں جو ناقص $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۳} =$ کو کاٹتے ہیں، ان خارج المرکز زاویوں کا حاصل جمع جن پر کوئی ایک

خط مستقیم ناقص کو قطع کرتا ہے مستقل رہتا ہے اور ۲ سے ۱ کے
مساوی ہے ثابت کرو کہ ان خطوط مستقیم کے قطبوں کا
طریق ۱ = ۲ = ۳ = ۴ ہے۔

۸۔ ناقص کے عماد کی مساوات خارج المرکز زاویہ کی رقوم میں
معلوم کرو۔

ثابت کرو کہ ایک معلومہ نقطہ سے ناقص کے چار عماد
کھینچ سکتے ہیں، نیز محور کے ساتھ عماد کے میلان کی مساوات
دریافت کرو۔

۹۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کا رقبہ ۲۲ اب ہے۔

۱۰۔ مکانی ما = ۳ لا کے مماس کی قطبی مساوات معلوم کرو
جبکہ ماسک کو قطب مانا جائے۔ اس کو

$$ر = ۲ \text{ ق } ۲ \text{ ق } (ط - ع)$$

کی شکل میں تحویل کرو، نیز ثابت کرو کہ مکانی کے ماسکی وتر
کے سروں پر کے مماس مرتب پر علی القوائم ملتے ہیں۔



باب ہندو ہم مخروطیوں کے نظام

۲۳۲۔ مختصر ترقیم۔ اس باب میں ہم مخروطیوں کی مساواتوں کے متعلق چند ضروری اصولوں کی تشریح کریں گے۔
ہم اکثر عام مساوات کو اس کی مختصر شکل
س = .

میں استعمال کریں گے جہاں س سے مراد ہے جملہ
و لا + ۲ ہ لا + ۲ ب + ۲ گ + ۲ ف + ۲ ج
ہم س = . سے اسی مساوات کو تعبیر کر سکتے ہیں جبکہ سروں پر زبریں
ہوں یعنی س = لا + ۲ ہ لا + ۲ ب + ۲ گ + ۲ ف + ۲ ج
اسی طرح سے ہم خط مستقیم کی مساوات کو بھی ایک ہی حرف سے
تعبیر کریں گے مثلاً

ی = .

جہاں ی صریحاً لا اور لا میں درجہ اول کا ایک جملہ ہے۔
پس ہم مساوات ل لا + ۲ م + ۲ ن = . کی بجائے
ی = . لکھ سکتے ہیں۔

۲۳۳۔ اگر دو مخروطیوں کی مساواتیں س = . اور س = . ہوں

تو مساوات $S + K = S$ ؛ K کی تمام قیمتوں کے لئے اس مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جو S اور S کے نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے۔
اولاً مساوات $S + K = S$ ۔ درجہ دوم کی مساوات ہے کیونکہ S اور S دونوں جداگانہ درجہ دوم کے جملے ہیں، پس یہ مساوات کسی نہ کسی مخروطی کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر $S = 0$ اور $S = 0$ کا ایک

نقطہ تقاطع A ہو تو A کے محدود

$S = 0$ اور $S = 0$ دونوں

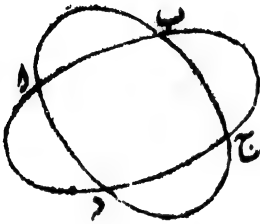
مساواتوں کو پورا کرتے ہیں گویا

اس کے محدود مساوات

$S + K = S$ ۔

کو پورا کرتے ہیں یعنی مخروطی $S + K = S$ ۔ نقطہ A میں

گزرتی ہے۔



شکل ۸۵

اسی طرح سے یہ $S = 0$ اور $S = 0$ کے باقی نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے۔ پس مساوات $S + K = S$ ۔ ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جو $S = 0$ اور $S = 0$ کے تمام نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے۔ طالب علم اس استدلال اور دفعہ ۳۱ کے استدلال کی مشابہت کو ملاحظہ کرے۔

مشقیں

- ۱۔ اگر $S = 0$ اور $S = 0$ دونوں کی مساواتیں ہوں تو مساوات $S + K = S$ سے ایک دائرہ تعبیر ہوتا ہے جو اول الذکر دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے۔
- ۲۔ اگر $S = 0$ اور $S = 0$ دونوں قائم زائد ہوں تو ثابت کرو کہ

نظام س + ک س = ۰ کی ہر ایک مخروطی قائم زائد ہے اس سے حاصل کرو کہ ”قائم زائدوں کے نقاط تقاطع میں سے جو مخروطی تراشیں کٹج سکتی ہیں وہ سب قائم زائد ہیں“

۲۳۴۔ دو مخروطی تراشیں ایک دوسرے کو چار نقاط حقیقی یا خیالی قطع کرتی ہیں ہم نے دفعہ ماقبل میں اس امر کے متعلق کچھ بھی فرض نہیں کیا کہ درجہ دوم کے دو منحنی ایک دوسرے کو کتنے نقاط پر قطع کرتے ہیں۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ درجہ دوم کے دو منحنی ایک دوسرے کو چار نقاط خیالی یا حقیقی پر قطع کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ان کی مساواتیں ہیں

$$۱) \text{ لا}^۲ + ۲\text{ لا} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + ۲\text{ گ} + \text{لا} + ۲\text{ ف} + \text{ا} + \text{ج} = ۰$$

$$۲) \text{ لا}^۲ + ۲\text{ لا} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + ۲\text{ گ} + \text{لا} + ۲\text{ ف} + \text{ا} + \text{ج} = ۰$$

ان کے نقاط تقاطع معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان مساواتوں کو لا^۲ کے لئے حل کرنا چاہیئے۔ اس غرض سے ہم دونوں کو لا^۲ میں درجہ دوم کی مساواتیں سمجھ کر ان کی رقوم کو لا کی صعودی قوتوں میں ترتیب دیتے ہیں، پھر ان مساواتوں سے لا کو ساقط کر کے ما کے لئے مساوات حاصل کرتے ہیں جو مساوات درجہ چہارم ہے اور اسلئے جس کی چار اصلیں حقیقی یا خیالی ہیں۔ پس

$$(۱) \left\{ \begin{aligned} &\text{لا}^۲ + ۲\text{ لا} + (\text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + ۲\text{ گ} + \text{لا} + ۲\text{ ف} + \text{ا} + \text{ج}) = ۰ \\ &\text{لا}^۲ + ۲\text{ لا} + (\text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + ۲\text{ گ} + \text{لا} + ۲\text{ ف} + \text{ا} + \text{ج}) = ۰ \end{aligned} \right.$$

حسب معمول عمل اسقاط سے

$$\{ ۲ \times (\text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + ۲\text{ گ}) - (\text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + ۲\text{ گ}) \}$$

$$\{ ۲(\text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + ۲\text{ گ}) - (\text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + ۲\text{ گ}) \}$$

$$= (\text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + ۲\text{ گ}) - (\text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + ۲\text{ گ})$$

اور یہ صریحاً مائیں درجہ چہارم کی مساوات ہے، جسکی چار اصلیں ہیں،

جو فرض کر کے 'ا'، 'ب'، 'م'، 'ن' ہیں (ٹیوٹوریل الجبرا، حصہ دوم، صفحہ ۳۷۱) چونکہ ہم مساوات (۱) سے 'ا' کو ساقط کر سکتے ہیں اور 'ا' کے لئے ایک خطی مساوات 'ا' کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اس لئے ظاہر ہے کہ 'ا' کی ہر ایک قیمت کے جواب میں 'ا' کی صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ پس اگر 'ا' کی چار متناظر قیمتیں 'ا'، 'ب'، 'م'، 'ن' ہوں تو ہم دیکھتے ہیں کہ نقاط تقاطع چار ہیں یعنی (۱، ۱)، (۱، ۱)، (۱، ۱)، (۱، ۱) (۱، ۱) نوٹ - ممکن ہے کہ ان چار نقطوں میں سے بعض خیالی ہوں یا یہ باہمی مساوات ہو سکتا ہے (دیکھو ٹیوٹوریل الجبرا صفحہ ۳۷۸) کہ کوئی خطی اصل کسی مساوات میں اکیلی واقع نہیں ہو سکتی، ایسی اصلیں ہمیشہ دو دو کے ہوں میں واقع ہوتی ہیں۔

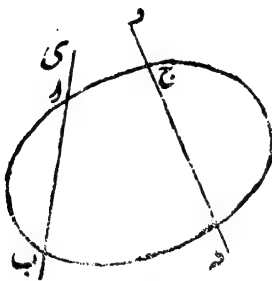
مشقیں

۳۔ اوپر کی تحلیل کو تسلیم کر لینے کے بغیر متذکرہ بالا مسئلہ کی صداقت کو ثابت کرو جبکہ ایک مخروطی تراکبش خطوط مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرے۔
۲۳۵۔ ایک مخروطی تراکبش دو معلومہ مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے، ثابت کرو کہ اس کے علاوہ وہ ایک اور صرف ایک اور شرط پوری کر سکتی ہے۔

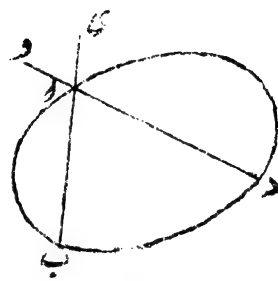
اگر $s = 0$ اور $s = 0$ دو مخروطیوں کی مساواتیں ہوں تو مساوات $s = 0$ سے ایک مخروطی تعبیر ہوتی ہے جو ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے، چونکہ اس مساوات میں ایک اختیاری مستقل شامل ہوتا ہے جس کی قیمت نا حال متعین نہیں کی گئی، اس لئے ہم اس مساوات پر ایک اور شرط عائد کر سکتے ہیں جس سے s کی قیمت متعین ہو جاتی ہے۔

۲۳۶۔ وہ صورت جس میں $s = 0$ خطوط مستقیم کے ایک زوج میں تحلیل ہو جاتی ہے۔
اگر $s = 0$ دو اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکے تو اس سے دو خطوط

مستقیم تعبیر ہوتے ہیں، فرض کرو کہ اجزائے مغربی میں تحلیل کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے $ی = د = تب$ خطوط $س = د$ میں سے ہر ایک $س = د$ سے دو نقاط پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ نقاط $ا$ ، $ب$ اور $ج$ ، $د$ ہیں تب مساوات $س + ک ی = د =$



شکل ۸۶، ا



شکل ۸۶، ب

سے ایک مخروطی تعبیر ہوتی ہے جو چار نقاط $ا$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ میں سے گزرتی ہے۔

$ا$ ، $ب$ فرض کرو کہ $د$ ساکن رہتا ہے اور خط $د =$ اس کے گرد اس طرح گردش کرتا ہے کہ $ج$ ، $ا$ کے قریب آتا جاتا ہے اور بالآخر $ا$ پر منطبق ہو جاتا ہے، تب مخروطی $س + ک ی = د$ سے $ا$ پر کے دو منطبقہ نقاط پر ملتی ہے یعنی اسے $س$ کرتی ہے۔

پس اگر خطوط مستقیم $ی = د$ اور $د =$ مخروطی $س = د$ پر ملیں تو ظاہر ہے کہ مخروطی $س + ک ی = د$ ، مخروطی $س = د$ سے اس نقطہ پر $س$ کرتی ہے جہاں $ی = د$ اور $د =$ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی $ا$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ سے قطع کرتے ہیں۔ اس کے نقاط تقاطع میں سے گزرے اور نیز

کے نقاط تقاطع میں سے کم از کم سبب میں سے گزرے۔

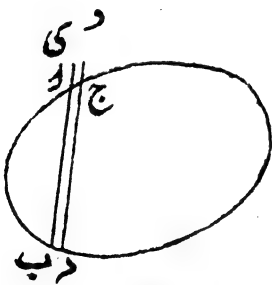
۶۔ ایک مخروطی، $لا + لاما + ما = ۳$ اور $۲لا + لاما - ما + ۳لا = ۰$ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے اور اس کا ایک متقارب محور $لا$ کے متوازی ہے، مخروطی کی مساوات معلوم کرو۔

(درجہ دوم کی رقوموں میں باجزو ضربی ہونا چاہیئے، دیکھو دفعہ ۱۱۰)۔
۷۔ ثابت کرو کہ دو مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع میں سے دو مکانی کھینچے جاسکتے ہیں۔

(یہاں محصلہ مساوات میں درجہ دوم کی رقوموں کو مربع کامل بنانا چاہئے۔)
۲۳۷۔ مساوات $س + ک + ی = ۰$ کی تعبیر

اب فرض کرو کہ نقاط $ج$ اور $د$ دونوں مخروطی پر اس طرح حرکت کرتے ہیں کہ $ج$ بدریج حرکت کرتے کرتے $د$ کے پاس آ جاتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جاتا ہے اور $د$ حرکت کرتے کرتے $ب$ کے پاس آ جاتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جاتا ہے۔

تب مخروطی $س + ک + ی = ۰$ ۔



شکل ۸۶

$س = ۰$ سے ایسے چار نقاط پر ملتی ہے جن میں سے دو بالآخر $د$ پر منطبق ہوتے ہیں، اور باقی دو $ب$ پر کو نیز اس انتہائی حالت میں $و = ۰$ بعینہ وہی ہے جو $ی = ۰$ ہے، پس ہم دیکھتے ہیں کہ مخروطی $س + ک + ی = ۰$ مخروطی $س = ۰$ ۔

کو ان دو نقاط پر $س$ کرتی ہے جہاں خط مستقیم $ی = ۰$ مخروطی $س = ۰$ کو قطع کرتا ہے۔

جب دو مخروطی تراشیں اس طرح سے ایک دوسرے کو دو نقاط پر

مس کریں تو اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ ان کا باہمی دوہرا تماس ہے۔
۲۳۸۔ حوالہ کے مخروطوں کو مس کرنے والی مخروطیاں۔

اگر ایک مخروطی، مس = کو ان نقاط پر مس کرے جہاں ی =
مس = کو قطع کرتا ہے تو اس کی عام مساوات
مس + لہ ی = ہوگی۔

اب فرض کر دو کہ مساوات مس = مخروطوں کو تعبیر کرتی ہے

یعنی مس = لا م =
تب ہم دیکھتے ہیں کہ اس مخروطی کی عام سے عام مساوات جو حوالہ
کے مخروطوں کو ان نقاط پر مس کرتی ہے جہاں خط لا م + م = ۱۔
محاورہ کو قطع کرتا ہے لا م + ل (لا م + م = ۱) = ہے۔

۱ = ۲ مہ رکھنے سے یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے
(لا م + م = ۱) ۲ + ۲ مہ لا م = (۱)

۲۳۹۔ حوالہ کے مخروطوں کو مس کرنے والا مکانی
اس مخروطی کی مساوات جو مخروطوں کو مس کرتی ہے اس شکل کی ہوتی ہے
(لا م + م = ۱) ۲ + ۲ مہ لا م =

اگر یہ مساوات قطع مکانی کو تعبیر کرے تو درجہ دوم کی رقبہ مربع کامل
بنائینگی۔ یہ رقبہ حسب ذیل ہیں

$$لا \times ل + ۲ لا م (لا م + م) + م^۲$$

انکے مربع کامل ہونے کے لئے ل م = (لا م + م) ۲ یا م = ۲ ل م
(اصل م = ناقابل تسلیم ہے کیونکہ اس سے دو منطبقہ خطوط مستقیم
لا م + م = ۱ تعبیر ہوتے ہیں۔)

پس چونکہ مہ کی صرف ایک قیمت ہے، اس لئے ہمیں صرف ایک

۱ لا + ۲ ھ لا + ۳ ما + ۴ گ لا + ۵ ف ما + ج

+ ل { (لا + لا + ھ + ما + گ) + (ما + ھ لا + ب + ما + ف) }

+ گ لا + ف ما + ج = ۱

۱ کی قیمت اس امر پر غور کرنے سے معلوم ہو سکتی ہے کہ اگر یہ مساوات م میں سے گزرنے والے ماسوں کو تعمیر کرے تو یہ م کے محدودوں (لا، ما) سے پوری ہوگی

۲ لا + ۳ ھ لا + ۴ ما + ۵ گ لا + ۶ ف ما + ج

+ ل { لا + ۲ ھ لا + ۳ ما + ۴ گ لا + ۵ ف ما + ج } = ۰

پس لہ -- لا + ۲ ھ لا + ۳ ما + ۴ گ لا + ۵ ف ما + ج

اور مطلوبہ مساوات ہے

(لا + ۲ ھ لا + ۳ ما + ۴ گ لا + ۵ ف ما + ج)

(لا + ۲ ھ لا + ۳ ما + ۴ گ لا + ۵ ف ما + ج)

= { لا + لا + ھ (لا + لا) + ب ما + گ (لا + لا) + ف (ما + ما) + ج } ۲

اسے ہم نے اس سے پہلے دفعہ ۱۳۸ میں بھی معلوم کیا ہے۔

مشقیں

۸۔ نقطہ (۱، ۱) سے مخروطی لا + لا + ما + ۵ کے ماس کھینچے گئے ہیں۔ ان ماسوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

ذیل کی مساواتوں پر دفعہ ۲۴۰ کا پورا عمل کرنے سے مخروطیوں کے ان ماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو نقطہ (لا، ما) سے کھینچے جاسکتے ہیں۔ اور اس امر کی تصدیق کرو کہ جوابات ان نتائج کے مطابق ہیں

جوان خاص صورتوں میں عام ضابطہ کو استعمال سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$۹ - لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ۱ ج = ۰$$

$$۱۰ - لا - ۲ ما + لا = ۰$$

$$۱۱ - لا + ۲ ما - ۱ = ۰ \quad ۱۲ - لا - ۲ ما - ۱ = ۰$$

۱۳ - مثلہ ۹ تا ۱۲ کے مساوات کے باہم علی القوائم ہونے کی شرائط لکھو اور ان سے مرتب دائروں کی مساواتیں مستنبط کرو۔ قطع مکانی کی صورت میں مرتب دائرہ کیا ہو جاتا ہے؟

۱۴ - اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرے اور مخروطی ۳ لا - لا + ما + ۲ ما + لا + ۱ = ۰ سے اُن نقاط پر دوہراتا جس کے جہاں محور لا اس مخروطی کو قطع کرتا ہے۔

۱۵ - اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ میں سے گزرے اور نیز اُن نقاط میں سے گزرے جہاں خطوط مستقیم لا + ما + ۱ = ۰، لا + ما + ۳ = ۰ مخروطی ۲ لا + ما + ۳ = ۰ سے ملتے ہیں۔

۱۶ - ثابت کرو کہ ایک ہی ایسا مکانی کھینچ سکتا ہے جو ایک مفروضہ مخروطی کو دو نقاط پر مس کرے۔

(فرض کرو کہ لا + ما + ن = ۰ اس خط کی مساوات ہے جو نقاط تا س کو ملاتا ہے، پھرک کی وہ قیمت معلوم کرو جس کے لئے محصلہ مخروطی ایک مکانی کو تعبیر کرے)

۱۷ - ثابت کرو کہ ایک اور صرف ایک ہی قائم قطع ناکہ کھینچ سکتا ہے جو ایک مفروضہ مخروطی کو دو نقاط معلومہ پر مس کرے۔

۱۸ - ایک مکانی محاذ کو نقاط لا اور ب پر مس کرتا ہے جن کا فاصلہ مبدأ سے لا، ب کے مساوی ہے، ثابت کرو کہ مکانی

$$\text{کی مساوات شکل } \pm \sqrt{\frac{لا}{ب}} \pm \sqrt{\frac{ب}{لا}} = ۱ \text{ میں تحویل}$$

ہو سکتی ہے۔
 ۱۹۔ نیز ثابت کرو کہ (۱) مشق ۱۸ کے مکانی کے اُس حصہ کے لئے جو
 مشابہت و ارب کے اندر واقع ہوتا ہے مساوات کی دونوں علامتیں
 مثبت ہونی چاہئیں۔ (۲) جو حصہ نقطہ اُسے پر واقع ہے اس
 کے لئے علامتیں + اور - ہونی چاہئیں اور جو حصہ ب سے پر
 واقع ہے اس کے لئے علامتیں - اور + ہونی چاہئیں۔

۲۰۔ ایک مکانی کے وتر خاص کے سروں پر ماس کھینچے گئے ہیں ان
 ماسوں کو محور مان کر مکانی کی مساوات معلوم کرو۔ [واضح ہو یہ ماس علی التوائم ہیں]
 ۲۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right)$ کی تمام قیمتوں کے واسطے مساوات

لاجم عم + ماحجم عم - ع + لاججم عم + ماحجم عم - ع
 سے وہ محروطی تعبیر ہوتی ہے جو تین خطوط مستقیم لاججم عم + ماحجم عم - ع = ۰ وغیرہ
 کے تین نقاط تقاطع میں سے گذرتی ہے۔

(دیکھو کہ یہ درجہ دوم کی مساوات ہے اور کسی دو خطوط کا نقطہ تقاطع
 اس پر واقع ہوتا ہے۔)

۲۲۔ وہ شرائط معلوم کرو کہ مشق ماقبل کی محروطی ایک دائرہ کو تعبیر کرے
 اور ثابت کرو کہ یہ شرائط اس طرح لکھی جاسکتی ہیں۔

$$\frac{1}{2} \text{جم} (\text{عم} + \text{عم}) + \frac{1}{2} \text{جم} (\text{عم} + \text{عم}) + \frac{1}{2} \text{جم} (\text{عم} + \text{عم}) = ۰$$

$\frac{1}{2} \text{جب} (\text{عم} + \text{عم}) + \frac{1}{2} \text{جب} (\text{عم} + \text{عم}) + \frac{1}{2} \text{جب} (\text{عم} + \text{عم}) = ۰$
 (لا اور م کے سروں کو مساوی رکھو اور لا کا سر صفر بناؤ) محور قائم
 فرض کرو۔

۲۳۔ اوپر کی مساواتوں کو $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right)$ کے لئے حل کرنے سے
 ثابت کرو کہ بیرونی دائرہ کی مساوات حسب ذیل شکل میں بھی لکھی
 جاسکتی ہے

$$\frac{\text{جب (عم - عم) (عم - عم)}}{\text{لاجم عم + ماجب عم - ع}} + \frac{\text{جب (عم - عم) (عم - عم)}}{\text{لاجم عم + ماجب عم - ع}} + \frac{\text{جب (عم - عم) (عم - عم)}}{\text{لاجم عم + ماجب عم - ع}} = 0$$

۲۴۱۔ پانچ نقاط معلومہ میں سے ایک اور صرف ایک ہی مخروطی کھینچ سکتی ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ دو مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع اور ان کی سطح مستوی پر کے ایک اور نقطہ میں سے ایک مخروطی کھینچ سکتی ہے، اس طرح سے ہمیں ایک مخروطی حاصل ہوتی ہے جو پانچ نقاط معلومہ میں سے گزرتی ہے اور یہ عمل ہمیشہ ہو سکتا ہے۔

اگر ا، ب، ج، د، ع پانچ نقطے ہوں تو نقاط ا، ب، ج، د میں سے مخروطیوں کا ایک نظام گزرتا ہے اور اس نظام میں سے ایک مخروطی خطوط ا، ب، ج، د پر مشتمل ہے اور ایک اور مخروطی خطوط

ان کے نقاط مشترکہ ا، ب، ج، د میں سے گزرنے والی کسی مخروطی کی مساوات $س + ک ت = 0$ ہے جہاں $س = 0$ خطوط ا، ب اور ج، د کی مساوات ہے اور $س = 0$ خطوط ب، ج اور د، د کی مساوات ہے۔ اب ہم ک کی ایسی قیمت معلوم کر سکتے ہیں کہ مخروطی $س + ک ت = 0$

نقطہ ع میں سے گزرے، چونکہ بلحاظ ک کے یہ مساوات درجہ اول ہے اس لئے صرف ایک ہی ایسی مخروطی کھینچ سکتی ہے۔ مندرجہ بالا نتیجہ پر ہم حسب ذیل طریقہ سے بھی پہنچ سکتے ہیں۔ مخروطی کی مساوات ہمیشہ اس شکل کی ہوتی ہے

$$0 = لا + ۲ ا + ب + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = 0$$

چونکہ مساوات کی سب رقموں کو ہم کسی ایک سر پر تقسیم کر سکتے ہیں اس لئے یہ سمجھنا

چاہیئے کہ مساوات بالا میں چھ سر نہیں بلکہ درحقیقت پانچ سر ہیں۔
پس چونکہ مساوات میں فی الحقیقت پانچ سر ہیں، اس لئے ایک
مخروطی سے پانچ شرطیں پوری کرائی جاسکتی ہیں بعینہ اسی طرح جیسے کہ
ایک خط مستقیم سے دو شرطیں پوری کرائی جاسکتی ہیں۔
اگر پانچ نقطے دیئے ہوں تو ان کے محدود مساوات

$$لا + ۲ھ + ۲ب + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰$$

میں مندرج کرنے سے ہیں سروں کی نسبتیں معلوم کرنے کے لئے درجہ
اول کی پانچ ہمزاد مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور یہ ان نسبتوں کو معلوم
کرنے کے لئے کافی ہیں۔

ظاہر ہے کہ بالعموم جب ایک مخروطی کوئی شرط پوری کرے تو اس کی مساوات
کے سر بھی ایک خاص ربط پورا کریں گے۔

عملی طور پر اس دفعہ کا پہلا قاعدہ زیادہ موجب سہولت ہوتا ہے۔

۲۴۲۔ چار نقاط معلومہ میں سے گزرنے والی مخروطیاں۔

فرض کرو کہ نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں، 'ا'، 'ب' اور 'ج' کو ملاؤ اور
ان کو اتنا خارج کرو کہ یہ 'و' پر ملیں، خطوط 'ا'، 'ب'، 'و' ج' کو ملا
اور 'ا' کے محور مانو۔

فرض کرو کہ 'ا' = 'ع'، 'ب' = 'ہ'، 'ج' = 'جہ'، 'د' = 'دہ'

تب 'ا'، 'ج' کی مساوات ہے

$$۱ = \frac{لا}{جہ} + \frac{ب}{ج}$$

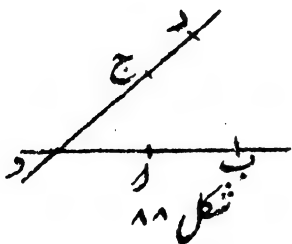
اور 'ب'، 'د' کی مساوات ہے

$$۱ = \frac{ب}{د} + \frac{لا}{جہ}$$

نیز 'ا'، 'ب' ہے 'ما' =

اور 'ج'، 'د' ہے 'لا' =

پس ان چار نقاط میں سے گزرنے والی دو مخروطی تراشیں ہیں۔



$$لا = ۰ \text{ اور } (لا + \frac{۱}{۲} - ۱) (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - ۱) = ۰$$

لہذا ان چار نقطوں میں سے گزرنے والی کوئی اور محزوطی ہے

$$(لا + \frac{۱}{۲} - ۱) (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - ۱) + (۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}) = لا = ۰$$

جہاں نہ کی قیمت کچھ ہی ہو سکتی ہے۔

مشقیں

۲۳۔ اس محزوطی کی مساوات معلوم کرو جو نقاط ذیل میں سے گزرے

$$(۰، ۰)، (۰، ۱)، (۱، ۰)، (۱، ۱)، (۱، ۲)، (۲، ۱)، (۲، ۰)، (۰، ۲)$$

۲۵۔ اس محزوطی کی مساوات معلوم کرو جو نقاط ذیل میں سے گزرے

$$(۰، ۰)، (۰، ۱)، (۱، ۰)، (۱، ۱)، (۱، ۲)، (۲، ۱)، (۲، ۰)$$

۲۶۔ مساوات (۳) سے جو محزوطیاں تعبیر ہوتی ہیں ان میں سے ایک ہے

$$۰ = (لا + \frac{۱}{۲} - ۱) (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - ۱)$$

نہ کی وہ قیمت معلوم کرو جس سے یہ محزوطی حاصل ہوتی ہے۔

۲۳۲۔ ہم ماسکہ محزوطی تراشیں۔

اب ہم محل طور پر چند ایسی محزوطیوں کے ایک نظام کے خواص پر بحث کریں گے جن کے مانگے وہی ہوں۔

اس قسم کی محزوطیاں ہم ماسکہ محزوطیاں کہلاتی ہیں ان کے بہت سے خواص خاص ہندسی طریقوں سے بھی حاصل ہو سکتے ہیں، لیکن یہاں ہم محض تحلیلی طریقوں کو تہ نظر رکھیں گے۔

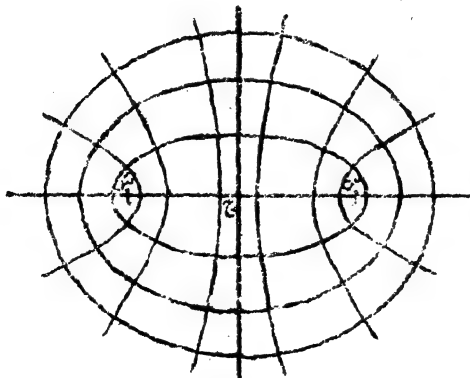
۲۳۳۔ ہم ماسکہ نظام کی مساوات۔

$$\begin{aligned} \text{ایک محروطی کی عام سے عام مساوات جس کے} \\ \text{اسکے وہی ہوں جو } \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} = 1 \text{ کے ہیں} \\ 1 = \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} \end{aligned}$$

جہ جہاں لم مستقل ہے۔
اولاً اگر ایک محروطی کے اسکے س اور س وہی ہوں جو ایک معلوم

محروطی $\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} = 1$ کے ہیں تو اس کا مرکز بھی وہی ہوگا جو معلوم
محروطی کا ہے اور اس کے محور بھی بنیاد سمت کے معلوم محروطی کے محوروں
پر منطبق ہونگے۔ اس کی وجہ ظاہر ہے کیونکہ س س سب محروطیوں
کے محوراظم کی مشترک سمت ہے اور اگر س س کے وسطی نقطہ میں
سے ایک خط محوراظم پر عمود دار کھینچا جائے تو یہ خط سب محروطیوں کا
محور اصغر ہوگا۔

پس اسکے مرکز، محوروں کی سمتیں سب محروطیوں کے لئے وہی ہیں



شکل ۸۶

اس سے معلوم ہوا کہ اس نظام کی کسی اور مخروطی کی مساوات یہ ہو سکتی ہے

$$1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2}$$

لیکن ج س = ا ز = و - ب (دیکھو دفعہ ۶۱)

$$\therefore و - ب = ا - ب$$

پس اگر و = ا + لہ تو

$$ب = ب + لہ$$

اور مساوات ہو جاتی ہے

$$1 = \frac{y^2}{b^2 + لہ} + \frac{z^2}{ا + لہ} \dots\dots (۴)$$

۲۴۵ - طالب علم امور ذیل کی ہرسانی سے تصدیق کر سکتا ہے -

اگر ا بڑا ہو ب اسے تو مخروطی تراشیں

$$1 = \frac{y^2}{ب + لہ} + \frac{z^2}{ا + لہ}$$

(۱) قطع ناقص ہوگی جبکہ لہ مثبت ہو یا جبکہ لہ منفی ہو اور تعداداً

ب سے کم ہو یعنی جبکہ لہ < - ب

(۲) خط مستقیم = ۰ (یعنی لا کا محور) ہوگی جبکہ لہ = - ب

(۳) قطع زائد ہوگی جبکہ لہ > - ب اور لہ < - ا

(۴) خط مستقیم لا = ۰ ہوگی (یعنی لا کا محور) ہوگی جبکہ لہ = - ا

(۵) ایک نچیا کی قطع ناقص ہوگی جبکہ لہ > - ا

۲۴۶ - سطح مستوی پر کے کسی نقطہ میں سے ایک ہم ماسکہ نظام کی دو مخروطیاں کھینچ سکتی ہیں -

فرض کر دو کہ (لا، لم) کوئی نقطہ ہے، تب ہمیں لہ کی وہ قیمت

معلوم کرنی چاہیے جس سے مخروطی

$$\frac{لا}{لا+ل} + \frac{با}{با+ل} = ۱ \text{ نقطہ (لا، با) میں سے گزرے۔}$$

$$\text{لہذا } ۱ = \frac{لا}{لا+ل} + \frac{با}{با+ل}$$

$$\text{یا } لا(با+ل) + با(لا+ل) = (لا+ل)(لا+ل)$$

$$\text{یعنی } لا+ل = (لا+ل)(لا+ل) + (لا+ل) - لا(لا+ل) - با(لا+ل) = ۰$$

لہٰذا یہ درجہ دوم کی مساوات ہے اور اس لئے لہ کی دو قیمتیں ملتی ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کے جواب میں جو ہم ماسکہ حاصل ہوگا وہ نقطہ (لا، با) میں سے گزریگا۔

مثال - وہ محزوطیاں دریافت کرو جو $\frac{لا}{لا+ل} + \frac{با}{با+ل} = ۱$ کے ساتھ ہم ماسکہ ہوں اور نقطہ (۱، ۱) میں سے گزریں۔
یہاں لہ کے لئے مساوات ہے

$$\frac{لا}{لا+ل} + \frac{با}{با+ل} = ۱ \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{لا+۱} + \frac{۱}{با+۱} = ۱$$

$$\text{یعنی } لا+ل = ۱ = ۰ \quad \text{یا } ل = \frac{۱}{۱} = (۱-۱) \text{ ماسکہ}$$

پس مطلوبہ محزوطیاں یہ ہیں

$$۱ = \frac{لا}{(لا+۱)\frac{۱}{۱}-۱} + \frac{با}{(با+۱)\frac{۱}{۱}-۱}$$

$$۱ = \frac{لا}{(لا-۱)\frac{۱}{۱}-۱} + \frac{با}{(با-۱)\frac{۱}{۱}-۱} \quad \text{اور}$$

$$۱ = \frac{لا^۲}{۱+لا} + \frac{با^۲}{۳+با} \quad \text{اور} \quad ۱ = \frac{لا^۲}{۱-لا} - \frac{با^۲}{۱-با} \quad \text{یعنی}$$

ان میں سے پہلی محزوطی صریحاً قطع دائرہ ہے اور دوسری قطع ناقص۔

۲۴۷۔ ایک نقطہ میں سے جو دو ہم واسکے کینچ سکتے ہیں ان میں سے ایک قطع ناقص ہوتا ہے اور دوسرا قطع زائد۔
فرض کرو کہ $b = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$ اگر یہ معنی ہو تو مخروطی

میر کا قطع زائد ہوگی اور اگر یہ مثبت ہو تو مخروطی ناقص ہوگی۔
مساوات یوں بھی لکھی جاسکتی ہے

$$1 = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$$

پس اگر مخروطی نقطہ (لا، با) میں سے گزرے تو یہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$1 = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$$

یا $b = (a - b) + (a - b) + (a - b)$
یعنی $b = (a - b) + (a - b) + (a - b)$

اب اس کے ب لہذا اصولوں کا حاصل ضرب منفی ہے۔
(یوٹوریل الجبر حصہ دوم صفحہ ۱۵۶)

پس اصلیں حقیقی ہیں جن میں سے ایک مثبت ہے اور دوسری منفی۔
پس ایک مخروطی ناقص ہے اور دوسری زائد۔

۲۴۸۔ دو ہم واسکے مخروطیاں ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتی ہیں۔
فرض کرو کہ مخروطیاں یہ ہیں

$$1 = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \text{ اور } 1 = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$$

اور ان کا نقطہ تقاطع (لا، ما) ہے، تب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ ان مخروطیوں کے نقطہ (لا، ما) پر کے تماس ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنتے ہیں اب دو تماس حسب ذیل ہیں

$$\frac{لا}{۱} = \frac{ما}{ب} + \frac{لا}{۱+ل} \quad \text{اور} \quad ۱ = \frac{ما}{ب} + \frac{لا}{ل+ل}$$

یہ علی القواثم ہونگے اگر

$$۰ = \frac{ما}{ب(ب+ل)} + \frac{لا}{ل(ل+ل)} \quad (\text{حصہ اول کو دفعہ ۱۹})$$

$$۱ = \frac{ما}{ب} + \frac{لا}{ل+ل} \quad \text{اور} \quad ۱ = \frac{ما}{ب} + \frac{لا}{ل}$$

تفریق کرنے سے

$$۰ = \left(\frac{۱}{ب} - \frac{۱}{ب+ل} \right) ما + \left(\frac{۱}{ل} - \frac{۱}{ل+ل} \right) لا$$

$$۰ = \frac{ما}{ب(ب+ل)} + \frac{لا}{ل(ل+ل)}$$

$$۰ = \frac{ما}{ب(ب+ل)} + \frac{لا}{ل(ل+ل)}$$

لیکن یہ شرط بعینہ وہی ہے جو تماسوں کے علی القواثم ہونے کی شرط ہے پس ہم ماسکہ تراشیں اپنے نقاط تقاطع پر ایک دوسرے کو علی القواثم قطع کرتی ہیں۔

۲۲۹۔ ایک معلوم نظام کی صرف ایک ہی مخروطی ایسی ہو سکتی ہے جو ایک دے ہوئے خط مستقیم کو مس کرے۔ فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات یہ ہے

$$ل لا + م ما = ۱$$

اس کے لئے شرط کہ یہ خط مخروطی $\frac{لا}{لا+لا} + \frac{ما}{ب+لا} = ۱$ کو مس کرے

$$(۱+لا)ل + (ب+لا)م = ۱ \quad (دفعہ ۱۴۱)$$

ہے اور یہ لہ میں درجہ اول کی مساوات ہے جس کی صرف ایک ہی اصل ہے۔ پس معلوم ہوا کہ صرف ایک ہی ہم ماسکہ ایک دئے ہوئے خط مستقیم کو مس کرتا ہے۔

مشقیں

۲۷۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۲، ۱) میں سے مخروطی $۲لا + ما = ۱$ کے جو ہم ماسکے کھینچ سکتے ہیں ان میں سے ایک ناقص ہے اور دوسرا زائد۔
۲۸۔ $مسن + سن = مستقل$ ، اس خاصیت سے ثابت کرو کہ صرف ایک ہی ایسا ناقص کھینچ سکتا ہے جسکے ماسکے دئے ہوئے ہوں اور جو ایک نقطہ معلومہ میں سے گزرے۔

قطع زائد کے لئے بھی یہی خاصیت ثابت کرو۔
۲۹۔ اس امر کو مد نظر رکھ کر کہ ایک مرکز دار مخروطی کے کسی نقطہ پر کا ماس اس کے ماسکی فاصلوں کے درمیان کے داخلی یا خارجی زاویوں کی تصدیق کرتا ہے۔ دفعہ ۲۴۸ کا نتیجہ حاصل کرو۔

۳۰۔ ثابت کرو کہ وہ مخروطی جو $\frac{لا}{لا+لا} + \frac{ما}{ب+لا} = ۱$ کے ساتھ ہم ماسکہ ہے اور $لا + لا = ۱$ کو مس کرتی ہے $\frac{لا}{لا+لا} + \frac{ما}{ب+لا} = ۱$ ہے

۳۱۔ اس زائد کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتا ہے اور ناقص $\frac{لا}{لا+لا} + \frac{ما}{ب+لا} = ۱$ کے ساتھ ہم ماسکہ ہے۔

۲۵۰۔ مخروطیوں کے ایک ہم ماسکہ نظام کے لحاظ سے ایک معلومہ خط مستقیم کے قطبوں کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{لا}{لا + ل} + \frac{ما}{ب + ل} = ۱$ (۱)

ہم ماسکہ مخروطیوں کے نظام میں سے ایک مخروطی ہے اور معلومہ خط مستقیم ل لا + م ما = ا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی (۱) کے لحاظ سے خط مذکورہ کا قطب (ب، ما) ہے، تب نقطہ (لا، ما) کا قطبی یعنی

$$\frac{لا}{لا + ل} + \frac{ما}{ب + ل} = ۱ \text{ (دفعہ ۱۸۹)}$$

وہی خط ہے جو ل لا + م ما = ا سے تعبیر ہوتا ہے۔

پس سروں کا مقابلہ کرنے سے $\frac{لا}{لا + ل} = ل$ اور $\frac{ما}{ب + ل} = م$

اس لئے لا = (لا + ل) ل، ما = (ب + ل) م
قطبوں کا طریق معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان مساواتوں میں سے ل
کو ساقط کرنا چاہیے۔

$$اب \frac{لا}{ل} - \frac{ما}{م} = \frac{لا}{لا + ل} - \frac{ما}{ب + ل} = (ب + ل) - لا = ب$$

پس طریق کی مساوات ہے

$$\frac{لا}{ل} - \frac{ما}{م} = ب$$

پس مطلوبہ طریق ایک خط مستقیم ہے جو مفروضہ خط مستقیم پر عمود وار ہے

اب مفروضہ خط مستقیم ماسکہ مخروطیوں میں سے ایک کو مس کرتا ہے،

فرض کرو کہ نقطہ تا س ن ہے اور ن ت مفروضہ خط مستقیم ہے، تب

مس کرنے والے ہم ماسکہ کے لحاظ سے ن قطب ہے۔ لکس مطلوبہ

طریق خط مستقیم گ ہے جو ن میں سے ن ت پر عمود کھینچا گیا ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر ن ت کے قطبوں کا طریق ن گ ہو تو ن گ کے

قطبوں کا طریق ن ت ہوگا۔
 چونکہ ن میں سے گزرنے والے دوہم ماسکے ایک دوسرے
 کو علی القوام قطع کرتے ہیں اور ن ت ایک محزوطی کا مماس ہے
 اس لئے ن اگ دوسری محزوطی کا مماس ہوگا، پس ن گ کے
 قطبوں میں سے ایک قطب ن ہے اور چونکہ طریق مطلوبہ خط مستقیم
 ن گ پر عمود وار ہے اس لئے یہ طریق خط ن ت ہی ہے۔

مشقیں

۳۶۔ محزوطی ۲ لا + ۳ ما = ۶ کی ہم ماسکے محزوطیوں کے لحاظ سے
 خط لا + ما = ۵ کے قطبوں کا طریق معلوم کرو۔

۳۷۔ اگر ل لا + م ما = ۱ کے قطبوں کا طریق بلحاظ ہم ماسکے

نظام $\frac{لا}{لا+ما} + \frac{ما}{ما+لا} = ۱$ کے ل لا + م ما = ۱ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ا-ب) (ل-ل) = (ب-لا) م م = ۱$$

۳۸۔ مشتاق قبل سے ثابت کرو کہ ان دو خطوط مستقیم کا باہمی ربط مکافی ہے

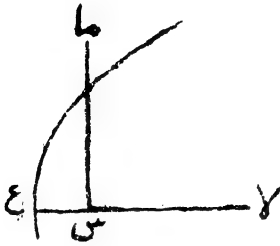
۳۹۔ ہم ماسکے مکافی۔ اب تک ہم نے اپنی توجہ ہم ماسکے
 مرکز وار محزوطیوں تک ہی محدود رکھی ہے۔ یہاں ہم ہم ماسکے مکافیوں
 کے متعلق بھی چند الفاظ سپرد قلم کرنا چاہتے ہیں۔

چونکہ مکافی میں ایک ہی ماسکے ہوتا ہے اس لئے یہ صورت
 پہلی صورت سے مختلف ہے۔

اگر دو مکافیوں کا ماسکے اور محور دونوں ایک ہی ہوں تو ان کو

ہم ماسکے مکافی کہتے ہیں۔

۴۰۔ مکافیوں کے ہم ماسکے نظام کی مساوات
 مشترک ماسکے مں کو مبدأ مانو اور مشترک محور کو لا کا



شکل ۹۰

محور فرض کرو۔ تب ہم جانتے ہیں کہ اگر راس ع کو مبدأ مانا جائے تو مکانی کی مساوات کی شکل یہ ہوتی ہے

$ما = س لا$ جہاں $لا = س ع$
پس مبدأ کو س پر منتقل کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$ما = س لا$ (لا لا) (۵)

اور یہ عام مساوات مطلوبہ ہے۔

ہم ماسکہ مکافیوں کے مندرجہ ذیل خواص کو ہم طالب علم کے لئے مشتق کیے طور پر چھوڑتے ہیں۔ مرکز دار مخروطیوں کی متناظر خاصیتوں کے چل کرنے سے جو طریقے ہیں ان سے ان مسائل کے حل کرنے کی ترکیب کا پتہ چلتا ہے۔

مشتقیں

۳۵۔ کسی معلوم نقطہ میں سے دوہم ماسکہ مکانی کھینچ سکتے ہیں۔
۳۶۔ کسی معلوم نقطہ میں سے گزرنے والے دوہم ماسکہ مکافیوں کے قمر مقابل سمتوں میں ہوتے ہیں۔ (یہ نتیجہ اس امر پر غور کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ اس مساوات درجہ دوم کی اصلیں مختلف علامت

ہیں۔)
۳۷۔ دوہم ماسکہ مکانی ایک دوسرے کو علی التوائم قطع کرتے ہیں۔
۳۸۔ خط مستقیم $لا + م = ا$ کے قطب کا طریق بلحاظ ہم ماسکہ مکافیوں $ما = س لا$ (لا لا) کے خط مستقیم $م لا$ ۔ $ک + م = ل$ ہے۔
[فرض کرو کہ خط مذکور کا قطب بلحاظ $ما = س لا$ (لا لا) کے (لا لا) ہے، تب معلوم خط مستقیم وہی ہوگا جو $ما = س لا$ (لا لا) ہے۔]

ہے، اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ۔ $\left[\frac{1}{2} \right]$

۳۹۔ اگر دو خطوط مستقیم میں سے پہلا خط دوسرے کے قطب کا طریق ہو تو دوسرا پہلے کے قطب کا طریق ہوگا۔

باب ہندسہ چہم پر متفرق مشقیں

۴۰۔ اگر دو قائم قطع زائدوں کے چار نقاط تقاطع a, b, c, d ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کے ازواج b, c, d, a اور c, d, a, b اور a, b, c, d میں سے ہر ایک کے خط عمودی القوائعم ہیں، اس سے حاصل کرو کہ ان چار نقطوں میں سے کسی تین کو ملانے سے جو مثلث بننا ہے اس کا مرکز عمودی چوتھا نقطہ ہے۔

۴۱۔ a, b, c ایک مثلث ہے، d سے b, c پر عمود کھینچا گیا ہے اور n اس مثلث کا مرکز عمودی ہے، ثابت کرو کہ $dn \times da = db \times dc$ ۔ a, b, c کو سبڈمان کر اس سے حاصل کرو کہ ایک مثلث کے رائسوں میں سے گزرنے والے تمام قائم زائد اس کے مرکز ہندسی میں سے بھی گزرتے ہیں۔

۴۲۔ مشق ماقبل کے قائم زائدوں کے مرکوزوں کا طریق ایک دائرہ ہے جو خطوط b, c, d, a اور c, d, a, b اور a, b, c, d کے وسطی نقطوں میں سے اور عمودوں کے پایوں میں سے گزرتا ہے (اس دائرہ کو نقطہ دائرہ کہتے ہیں)۔

۴۳۔ ایک دائرہ پر کے چار نقطوں میں سے گزرنے والی سب مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق قائم قطع زائد ہے۔

۴۴۔ ثابت کرو کہ مخروطی $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right) + m - la =$ کے لحاظ سے مبداء کے قطبی کی مساوات ہے

$$= 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2$$

۴۵۔ خطوط مستقیم لا ۱، ۲، ۱+۱=۱-، لا ۱+۱=۰ سے جو مثلث بننا ہے اس کے راسوں میں سے گزرنے والی مخروطی کی عام مساوات دریافت کرو۔

۴۶۔ - ایک ناقص اس طرح حرکت کرتا ہے کہ یہ ہمیشہ دو ثابت علی الاطلاق خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے۔ اس کے مرکز کا طریق دریافت کرو۔

۳۸۔ مخروطی $(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1) = 2$ تک لاما کے مرکز کے محدود معلوم کرو۔

۴۹۔ اگر $S =$ اور $s =$ دو مخروطیوں کی مساواتیں ہوں
تو ثابت کرو کہ نقطہ (λ, μ) کا قطبی بلحاظ $S + \lambda S_1$ کے
 $S + \lambda S_1$ کے ہے جہاں $S_1 =$ قطبی ہے بلحاظ S کے اور $\lambda =$
قطبی ہے بلحاظ S کے۔

۵۰۔ محزوظیوں اور لاۓ ۲ لاۓ ۱ ب ما = ۱ کے نظام کو شکل میں دکھاؤ جبکہ ۵ اور ب مستقل ہوں اور لا متغیر ہو۔

۵۱۔ اُن نقطوں کے مجموعہ معلوم کرو جن پر ناقص $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ہو۔

۵۲۔ ہم ماسک مخروطیوں کا ایک نظام دیا ہوا ہے اور اس کے محور اعظم پر کے ایک ثابت نقطہ سے مخروطیوں کے پاس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ نقاط تماس کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز محور اعظم پر ہے۔

۵۳۔ دوہم سلسلہ محروٹیوں کے دو متوازی ماسوں پر مرکز سے عمود نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان عمودوں کے مربعوں کا فرق

مستقل ہے۔

۵۳۔ سائر ثابت نقطوں میں سے محزوطیوں کا جو نظام گزرتا ہے اسکے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ سب قطبی ایک اور ثابت نقطہ ق میں سے گزرتے ہیں، نیز ق کے قطبی ن میں سے گزرتے ہیں۔

۵۵۔ دائرہ کے اندر ایک ذواربع الاضلاع بنایا گیا ہے اس کے مقابل کے اضلاع کی مساواتیں

$$۱ا + ۲ا = ۵ا + ۲ا + ۱ب + ۲ب + ۱گ + ۲گ + ۱ف + ۲ف + ۱ج = ۰$$

$$اور ۱ا + ۲ا = ۲ا + ۱ب + ۲ب + ۱گ + ۲گ + ۱ف + ۲ف + ۱ج = ۰$$

ہیں۔ ثابت کرو کہ ھ = (ب - ۱) = ھ (ب - ۱)

۵۶۔ اگر دو محزوطیاں دو نقاط تماس رکھتی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ کسی اور نقطہ پر نہیں مل سکتیں۔

۵۷۔ کسی ثابت سمت میں ہم اسکے محزوطیوں کے ایک نظام کے تماس پھینچے گئے ہیں، ان تماسوں کے نقاط تماس کا طریق معلوم کرو۔

$$۵۸۔ اگر ۱س = ۱ا + ۲ا + ۱ب + ۲ب + ۱گ + ۲گ + ۱ف + ۲ف + ۱ج = ۰$$

$$اور ۱س = ۱ا + ۲ا + ۱ب + ۲ب + ۱گ + ۲گ + ۱ف + ۲ف + ۱ج = ۰$$

تو ثابت کرو کہ ک کی وہ قیمتیں جن کے لئے ۱س + ک = ۰

ایک نقطہ کو تعبیر کرتا ہے مساوات درجہ دوم

$$(۱ا + ۲ا - ج) + (۱ب + ۲ب - گ) + (۱ف + ۲ف - ج) + (۱ک + ۲ک - ج) = ۰$$

کی اعلیٰ ہیں۔

۵۹۔ ایک مکانی محاورہ کو نقاط (۱، ۰)، (۰، ۱)، (۰، ۰) پر مس کرتا ہے

وہ شرط معلوم کرو کہ خط مستقیم $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} = ۱$ اس مکانی کو مس کرے۔

۶۰۔ ا، ب، ج، د ایک محروطی پر کے چار نقطے ہیں، ا و ب ج د کا نقطہ تقاطع ع ہے، ا ج و ب د کا تقاطع ف ہے، ج ب و ا د کا تقاطع گ ہے، مشق ۴۴ سے حاصل کرو کہ ع کا قطبی لمحاظ اس محروطی کے ف اور گ دونوں میں سے گزرتا ہے اس سے مستنبط کرو کہ مثلث ع ف گ ایسا ہے کہ اس کا ہر ایک ضلع مقابل کے رأس کا قطبی ہے (یعنی مثلث مزدوج بالذات ہے) ۶۱۔ ثابت کرو کہ ان محروطیوں کے مرکوزوں کا طریق جو دو قائم زاویوں کے چار نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہیں ایک دائرہ ہے۔

۶۲۔ ایک ناقص کے کوئی دو متوازی مماس ایک ایسے ثابت دائرہ کو قطع کرتے ہیں جو ناقص کے ساتھ ہم مرکز ہے، ثابت کرو کہ نقاط تقاطع کو ملانے سے جو مستطیل بنتا ہے اس کے باقی دو اضلاع ایک ہم ماسکہ محروطی کو مس کرتے ہیں۔

۶۳۔ ایک نقطہ کے محدود مساواتوں $لا = اجم ط$ ، $ا = ب جب ط$ کی شکل میں دئے ہوئے ہیں، ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک ایسے مکانی کا حصہ ہے جو محوروں کو مس کرتا ہے، اگر ط معلوم ہو تو اس سے جو نقطہ متعین ہوتا ہے اس پر کے مماس کی مساوات معلوم کرو۔

۶۴۔ اگر خط مستقیم $لاجم ط + ا جب ط = ع$ دو ناقصوں

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ب} = ۱ \text{ اور } \frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ب} = ۱ \text{ کو قطع کرے}$$

اور ان محروطیوں کے لمحاظ سے خط مذکورہ کے قطب م اور م

ہوں تو ثابت کرو کہ $م = م$

۶۵۔ ثابت کرو کہ ہم ماسکوں $(لا + ل) / (ا + ب) = ۱$ کے لمحاظ سے نقطہ $(ا، ب)$ کے قطبی محروطی $م لا لا + م ا - م ا$ + $م ا - ب = ۰$ کو مس کرتے ہیں۔

باب نوزدہم

لفاف

۲۵۳۔ لفاف۔ فرض کرو کہ کسی منحنی کی مساوات میں رقوم کے سر
ایک ایسی مقدار پر موقوف ہیں جو بدل سکتی ہے، تب ظاہر ہے کہ
اگر وہ کو کوئی خاص قیمت دی جائے تو اس سے ایک خاص منحنی حاصل
ہوتا ہے اور وہ کی قیمت میں تغیر کرنے سے منحنیوں کا ایک نظام حاصل
ہوتا ہے۔

اس خیال کے ادراک کی غرض سے شاید چند مثالیں طالب علم
کے لئے زیادہ مفید ثابت ہونگی۔
خط مستقیم کی مساوات

(ا + لا + ب + ج) = مہ (ا + لا + ب + ج) = ۰
مقدار مہ پر موقوف ہے۔ جب مہ بدلتا ہے تو ہمیں خطوط مستقیم
کا ایک نظام یا قبیل حاصل ہوتا ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ سب
خطوط مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
(دیکھو حصہ اول دفعہ ۲۸)

نیز اگر ہم مساوات

$$۱ = مہ لا + \frac{۱}{مہ}$$

میں نہ کو مختلف قیمتیں دیں تو ہمیں خطوط مستقیم کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے اور اس سلسلہ کا ہر ایک خط مکانی ما = ۴۴ لا کو مس کرتا ہے (دیکھو دفعہ ۲۸)۔
ایک اور مثال یہ ہے کہ مساوات

$$1 = \frac{لا}{۲۱} + \frac{۲۱}{۲۱ + ۲۱}$$

ہم ماسکہ مخروطیوں کے ایک نظام کو تعمیر کرتے ہیں۔
مقتبذ - مقدار مہ کو متبذل آکھتے ہیں اور منحنیوں کے نظام کے متعلق یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ ایک متبذل پر موقوف ہے۔
۲۵۴ - انتہائی تقاطع - اگر ہم مہ کو کوئی خاص قیمت مہ دیں تو ہمیں ایک خاص منحنی حاصل ہوتا ہے جس کا ناپ اور مقام وغیرہ پورے طور پر متعین ہو جاتا ہے۔ اب اگر ہم مہ کو ایک اور قیمت ایسی دیں جو مہ سے بقدر ایک نہایت چھوٹی مقدار د کے مختلف ہو یا بالفاظ دیگر مہ کی بجائے مہ + د رکھیں جہاں د بہت چھوٹا ہے تو ہمیں ایک اور منحنی حاصل ہوگا جو پہلے منحنی سے ذرا سا ہٹا ہوا ہوگا۔ یہ دو منحنی ایک دوسرے کو چند نقطوں پر قطع کرتے ہیں اور اگر د کو لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائے تو یہ نقطے منحنیات کے انتہائی تقاطع کہلاتے ہیں۔

$$\text{مثلاً نظام } 1 = مہ لا + \frac{لا}{مہ} \text{ میں}$$

ایک خاص خط مستقیم

$$1 = مہ لا + \frac{لا}{مہ}$$

ہے، اگر ہم مہ کو ایک اور قیمت مہ + د دیں جو مہ سے بقدر ایک نہایت چھوٹی مقدار کے مختلف ہو تو ہمیں پہلے خط کے نہایت قریب ایک اور خط حاصل ہوتا ہے جو 1 = (مہ + د) لا + \frac{لا}{مہ + د} ہے۔

اب یہ دونوں خط مکانی $MA = ۴$ والا کے ماس ہیں اور چونکہ ایک منحنی کے دو متصل ماس ایک دوسرے سے منحنی پر ملتے ہیں اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ موجودہ صورت میں انتہائی تقاطع کے نقطے اس مکانی پر واقع ہوتے ہیں جس کو خط MA مستقیم کرتے ہیں۔ ہم ابھی دیکھ چکے کہ یہ عام طور پر درست ہے۔

۲۵۵۔ انتہائی تقاطع کا طریق

اگر ہم ایک نظام کے سب منحنی لیں اور ہر ایک منحنی کے نقاط تقاطع اس منحنی کے ساتھ معلوم کریں جو اس کے نہایت قریب واقع ہوتا ہے تو ہمیں تقاطع کے لائنیاں نقطے حاصل ہوں گے اور یہ سب کے سب ایک منحنی پر واقع ہوں گے جس کو انتہائی تقاطع کا طریق کہتے ہیں۔

مثلاً شکل ۹۱ میں فرض کرو کہ منحنی خطوط $۲، ۱، ۳، ۴، ۵$ ایک نظام کے پاس پاس کے پانچ منحنیوں کے حصے ہیں، نیز فرض کرو کہ $۲، ۱$ سے نقطہ N پر ملتا ہے اور $۳، ۴$ سے Q پر اور $۳، ۴$ سے R پر اور $۴، ۵$ سے S پر ملتا ہے، تب $N، Q، R، S$ سب انتہائی تقاطع کے طریق پر واقع ہوں گے جب کہ ان منحنیات کو ایک دوسرے کے لائنیاں قریب لایا جائے۔

۲۵۶۔ ابتدائی منحنیات میں سے ہر ایک انتہائی تقاطع کے طریق کو مس کر سکتا ہے۔

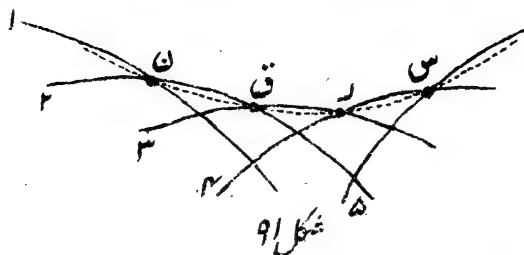
منحنی ۲ (شکل ۹۱) پر غور کرو۔ یہ انتہائی تقاطع کے طریق سے جس کو منقوط خط کے ذریعہ دکھایا گیا ہے ان نقطوں پر ملتا ہے جہاں

(۱) یہ ۱ سے ملتا ہے یعنی N پر

(۲) یہ ۳ سے ملتا ہے یعنی Q پر

اب اگر یہ تین منحنی $۲، ۱، ۳$ ایک دوسرے کے نہایت قریب آجائیں تو $N، Q، R$ کے نزدیک آجاتا ہے۔ پس انتہائی تقاطع

کے نقاد کا طریق معنی ۲ سے دو منطبقہ نقاط پر ملتا ہے اور بنائے علیہ اس کو مس کرتا ہے۔



اسی طرح سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ انتہائی تقاطع کے نقطوں کا طریق تبدیل
منحنیات میں سے ہر ایک کو مس کرتا ہے۔ اس بنا پر اس طریق کو نظام
مذکور کا لفافہ کہتے ہیں۔

مثال: ہم ابتدائی اصولوں سے خطوط مستقیم کے نظام

$$6 = 3 + 3 \quad \text{یا} \quad 6 = 2 + 4 \quad \text{یا} \quad 6 = 1 + 5$$

پر غور کرنے ہیں۔ مگر کوہ خاص قیمتیں مہم، مہم دینے سے

نہیں دو خطوط مستقیم سے $a + b = 1$ اور $a - b = 1$ سے ملے گا۔

حاصل ہوتے ہیں۔ یہاں تفریق کرنے سے اُن کے نقطہ تقاطع پر

$$= 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}) = 1 - \frac{1}{2}(\frac{2}{m}) = 1 - \frac{1}{m}$$

پس اگر ہم فرض کریں کہ وہ بلحاظ قیمت مہ کے ہنایت قریب آجاتا ہے
تو آخر الذکر مساوات ہو جاتی ہے۔

• = 1 - 2 - 3 - 4

جوانتہائی تقاطع کے نقطہ کے محدودوں سے پوری ہوتی ہے۔
(یہ بات قابل غور ہے کہ مہ - مہ پر تقسیم کرنے سے حجم وائیں جانب
کے رکن کو مطلقاً صفر ہونے سے بچا لیتے ہیں اور اس طرح مہ کو مہ کے
مسادی رکھ سکتے ہیں)

لیکن $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$

پس انتہائی تقاطع کا طریق معلوم کرنے کے لئے ہمیں مساواتوں
 $m^2 - 1 = m + 1 = 0$ اور $2m - 1 = m + 1 = 0$
 سے m کو ساقط کرنا چاہیئے۔
 دوسری مساوات سے

$$m = \frac{1}{2}$$

$$\text{لہذا } m - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 = 1 = 0$$

یعنی
 اور صفات بالا کی بناء پر ہمیں اسی جواب کی توقع تھی۔
 ۲۵۷۔ ایک منحنی کی مساوات یہ ہے

$m^2 + n + m + q + r = 0$
 جہاں n, q, r اور r متغیرات 1 اور m کے تفاعل ہیں اور m
 ایک متبدل ہے، اس منحنی کا لفاف معلوم کرو۔

ہمیں انتہائی تقاطع کے نقطوں کا طریق معلوم کرنا چاہیئے۔ اس
 نظام کے دو منحنی

$$m^2 + n + m + q + r = 0 \text{ اور } m^2 + n + m + q + r = 0$$

(۱)

ہیں۔ ان کے نقاط تقاطع کے محدود دونوں مساواتوں (۱) کو پورا
 کرتے ہیں۔ لہذا تقریباً کرنے سے یہ $n (m^2 - 1) + q (m - 1) = 0$
 کو یعنی $n (m + 1) + q = 0$ کو پورا کرتے ہیں۔

اب اگر ہم m کو بلحاظ قیمت کے m کے نہایت ہی قریبے جائیں
 یعنی ان کے فرق کو نہایت ہی کم کر دیں تو ان منحنیات کے تقاطع
 نقاط لفاف پر کے نقطے بن جاتے ہیں، لہذا m کو m کے مساوی
 رکھنے سے بالآخر حاصل ہوتا ہے

$$2m + n + q = 0$$

پس مطلوبہ طریق حاصل کرنے کے لئے ہمیں
 $۲م + ن + ق = ۰$ اور $۲م + ن + م + ق + ر = ۰$
 میں سے $م$ کو ساقط کرنا چاہیے۔

$$\frac{ق}{ن} = \frac{۲م + ن + ق}{۲م + ن + م + ق + ر} = ۰$$

یعنی $ق = ۲م + ن + ق$ (۱)
 اس طرح لفاف کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہمیں ذیل کا کلیہ
 حاصل ہوتا ہے۔

کلیہ۔ متبادل کے لحاظ سے جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے
 اس کی اصلوں کے باہم مساوی ہونے کی شرط لکھو یہ شرط لفاف کی
 مساوات ہوگی۔

۲۵۸۔ دفعہ ماقبل کے نتیجہ کو تعبیر کرنے کا ایک اور نہایت دلچسپ
 طریقہ ذیل میں درج کیا جاتا ہے۔

نظام زیر بحث کے اُن شئیات پر غور کرو جو ایک نقطہ معلومہ
 میں سے گزرنے ہیں، ایسے منحنی سر نیچا دو ہیں کیونکہ $ن$ ، $ق$ ، $ر$
 میں محدود لا، $م$ درج کرنے سے مساوات
 $۲م + ن + م + ق + ر = ۰$

حاصل ہوتی ہے اور چونکہ یہ $م$ میں درجہ دوم کی مساوات

ہے اس لئے نقطہ (لا، $م$) میں سے گزرنے والے صرف دو منحنی ہیں

اب اگر (لا، $م$) میں سے گزرنے والے دو منحنی ایک دوسرے پر
 منطبق ہو جائیں تو نقطہ (لا، $م$) لفاف پر واقع ہوگا اور منحنیوں سے
 ایک دوسرے منطبق پر ہونے کی شرط یہ ہے کہ $م$ کی مساوات درجہ دوم

میں مہ کی دو قیمتیں مساوی ہوں یعنی

$$ق^۲ = ۴ ن$$

اور یہی شرط دفعہ ۲۵۷ میں معلوم کی گئی ہے۔

مثال۔ ہم ماسکہ مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک نقطہ معلومہ کے قطبیوں کا لکھنا معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ہم ماسکہ نظام کی ایک مخروطی

$$۱ = \frac{۲}{۲+۱} + \frac{۱}{۱+۲}$$

ہے، نقطہ (لام، ما) کا قطبی بلحاظ اس کے

$$۱ = \frac{۱}{۱+۲} + \frac{۲}{۲+۱}$$

اب نکات معلوم کرنے کے لئے ہمیں لہ کو متبادل تصور کرنا چاہئے۔
قطبی کی مساوات بالاب ہے

$$(۱+۲) لہ - (۲+۱) لا - (۱+۲) ما = ۰$$

$$یا لہ + لہ - (۱+۲) لا - (۲+۱) ما + (۱+۲) لا - (۲+۱) ما = ۰$$

پس کلیئے مذکورہ کی رو سے مطلوبہ نکات ہے

$$(۱+۲) لا - (۲+۱) ما = ۴ (۱+۲) لا - (۲+۱) ما$$

چونکہ درجہ دوم کی رقیص (لا + ما) ہیں، اس لئے مساوات مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔ پس مطلوبہ نکات مکانی ہے۔

مشقیں

۱۔ کسی نقطہ میں سے نظام ۱-۲-۳-۴ کے دو خط گذرتے ہیں اور وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اگر نقطہ مذکورہ مکانی

۲ = م لا پر واقع ہو جو لفاف ہے۔

۲ - ثابت کرو کہ مساوات

$$م = (لا + ب م) + \frac{1}{2} (ب لا - لا م) + ۱ = ۰$$

میں م کو مختلف قیمتیں دینے سے خطوط مستقیم کا جو قبیل حاصل ہوتا ہے اس کا لفاف قائم ہند لوی ہے اس کے محوروں کے طول اور مقام معلوم کرو۔

۳ - ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محوروں پر اس کے مقطوعوں کا حاصل ضرب مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا لفاف ایک قطع زائد ہے جس کے مقارب ابتدائی محور ہیں۔
(ایک مقطوعہ کو متبدل مانو اور دوسرے مقطوعہ کو شرط مذکورہ بالا کے ذریعہ مقطوعہ کی رقوم میں بیان کرو۔)

۴ - مکانی پر ایک نقطہ ن ہے اور ن ص اس کا معین ہے۔

متوازی الاضلاع ن ص ع ق کے قطرم ق کا لفاف معلوم کرو۔

۲۵۹ - بعض اوقات ایسے منحنی کے لفاف معلوم کرنے کی ضرورت پڑتی ہے جس کی مساوات میں دو متبدل شامل ہوں اور یہ متبدل ایک مساوات کے ذریعہ باہم مربوط ہوں۔ ساوہ صورتوں میں متبدلوں کی معلوم مساوات کے ذریعہ ہم منحنی کی مساوات سے ایک متبدل کو ساقط کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات اور طریقوں سے کام لیا جاتا ہے ملاحظہ ہو ذیل کی مثال ۳۔

مثال - (۱) دائرہ (لا-ج) + م = د کا لفاف معلوم کرو جبکہ

$$ج + د = ک$$

د کو ساقط کرنے سے

$$(لا-ج) + م = ک - ج \quad یا \quad ۲ ج - ۲ لا + م = ک - ج$$

ج میں جو یہ مساوات درجہ دوم ہے اس کی اصولوں کو ساوی بنائے

لفاف حاصل ہوتا ہے -

پس لفاف ہے

$$لا^۲ = (ما - ک)^۲ \text{ یا } لا^۲ = ما^۲ + ک^۲ - ۲ماک =$$

جو صریحاً قطع زائد ہے -

(۲) محدودوں کے محوروں پر ایک متحرک خط مستقیم کے مقطوعوں کا تعامل جمع مستقل رہتا ہے، خط مستقیم کا لفاف معلوم کرو -

فرض کرو کہ ج اور د مقطوعے ہیں اور ک ان کا مستقل مجموعہ ہے،
تب ج + د = ک

$$\text{اور خط کی مساوات ہے } \frac{لا}{ج} + \frac{۱}{د} = ۱$$

ان میں سے ج کو ساقط کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۱ = \frac{لا}{ج} + \frac{۱}{د}$$

$$\text{یا د (ک - د) - د لا - (ک - د) ما = ۰}$$

$$\text{یا د - (ک - لا + ما) د + ک ما = ۰}$$

مطلوبہ لفاف متبدل د کی دو قیمتوں کو مساوی کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس لئے یہ ہے

$$(ک - لا + ما)^۲ = ک ما یا لا^۲ - ۲لا ما + ما^۲ = ک لا - ک ما + ک^۲ =$$

جو قطع مکانی ہے کیونکہ درجہ دوم کی رتیبیں مربع کامل ہیں -
(اس ثبوت کا وفدہ ۲۶۱ کے ثبوت کے ساتھ مقابلہ کرو)

$$(۳) \text{ منحنی ن جسم طہ + ق جب طہ = رک لفاف}$$

$$ن^۲ + ق^۲ = ر^۲$$

ہے جہاں ن، ق، ر محدودوں کے تفاعل ہیں اور طہ متبدل ہے -

فرض کرو کہ $t = مس طہ$ ، تب

$$جم طہ = \frac{1-t}{1+t} ، جب طہ = \frac{t}{1+t}$$

$$\therefore n = \frac{1-t}{1+t} + ق = \frac{t}{1+t} = ر$$

$$یا n = (1-t) + t \times ق = ر (1+t)$$

یعنی $تا (n+r) - t = ق + (r-n) =$
لفاف کی مساوات یہ شرط معلوم کرنے سے حاصل ہوگی کہ اس
مساوات میں t کی قیمتیں مساوی ہیں۔

پس لفاف ہے $ق = (n+r)(r-n)$

یا $n + ق = ر$ (۲)
یہ جواب یاد رکھنے کے قابل ہے، اگرچہ طالب علم کو چاہئے کہ ہر صورت
میں بالعموم پورا عمل کرے جو اوپر دیا گیا ہے۔

مشقیں

۵۔ لفافوں کا طریقہ استعمال کرنے سے ثابت کرو کہ خط مستقیم

لاجم طہ / $1 +$ ما جب طہ / $b =$ امنخی $\frac{لا}{1+b} + \frac{ما}{b} =$ اکھ مس
کرتا ہے جہاں طہ متبدل ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم

لاجم طہ + b ما جب طہ = $ج$ کا لفاف $\frac{لا}{1+b} + \frac{ما}{b} = ج$ ہے

۷۔ ایک متحرک خط مستقیم پر ایک ثابت نقطہ سے عمود کھینچا
گیا ہے اور اس عمود کا پایہ ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع
ہوتا ہے، خط مستقیم کا لفاف معلوم کرو۔

لفاف کے لئے ص کی دو قیمتیں مساوی ہونی چاہئیں، فرض کرو کہ

$$\text{تب } ۱\text{ ص} = ۲\text{ ص} + ۱\text{ ص} = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

$$(۲) \dots \dots \dots / (۱۲ - لا) = ۲\text{ ص} + ۱\text{ ص}$$

$$(۳) \dots \dots \dots / ما = ۲\text{ ص} + ۱\text{ ص}$$

مساوات (۱) کے ذریعہ ص کو ساقط کرنے سے

$$۲ - ۲\text{ ص} = ۲\text{ ص} + ۱\text{ ص} = (۱۲ - لا) / یا ۱۳ / (۱۲ - لا)$$

$$۲ - ۲\text{ ص} = ۲\text{ ص} + ۱\text{ ص} = ما / یا ۲ / ما$$

ص کو ساقط کرنے سے ہمیں لفاف کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$(لا - ۱۲) / ۱۳ = ۲\text{ ص} + ۱\text{ ص} = (۱۲ - لا) / یا ۲ / ما = ۲۷$$

نوٹ۔ کسی منفی کے عمادوں کے نظام کے لفاف کو منفی کا برعکس کہتے ہیں۔

مشق

۹۔ خط مستقیم ۲ لا - ۲ ما + ج =۔ کا لفاف معلوم کرو جہاں

ما متبادل ہے۔

۲۶۱۔ اگر خط مستقیم ل لا + ص ما + ا = میں سرل اور ص اس ربط

$$۱ ل + ۲ ل + ص + ب ص + ۲ گ ل + ۲ ف ص + ج =۔$$

کے ذریعہ باہم منسلک ہوں تو خط مذکور کا لفاف ایک مخروطی ہوگی۔
پہلے ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ اس نظام کے کتنے خط نقطہ (لا، ما) میں
گزرتے ہیں۔

پس لازماً $ل + لا + م + ما + ا =$
 اور اول $۲ + ھ + م + ب + م + گ + ل + ۲ + ف + م + ج =$
 اب اگر ہم دوسری مساوات کو پہلی مساوات کی مدد سے متجانس بنائیں
 تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

اول $۲ + ھ + م + ب + م - ۲ - (گ + ل + م) - (ل + لا + م + ج) - (ل + لا + م + ا) =$
 (دیکھو حصہ اول دفعہ ۳)
 یہ مساوات نسبت ل : م میں درجہ دوم کی مساوات ہے اور اس کی
 دو اصلیں ہیں۔

اب اگر نسبت ل : م کی قیمت معلوم ہو تو خط کی سمت متعین ہو جاتی ہے
 پس (لا، ما) میں سے گزرنے والے خط کی دو سمتیں نسبت ل : م کی
 دو سمتوں سے حاصل ہوتی ہیں، لہذا بالعموم (لا، ما) میں سے دو خط
 گزرتے ہیں۔

لفاف معلوم کرنے کے لئے ہمیں اس امر کے لئے بشرط معلوم کرنی
 چاہئے کہ یہ دو خط ایک دوسرے پر منطبق ہوں یعنی ل : م کے لئے درجہ
 دوم کی جو مساوات اوپر درج کی گئی ہے اس کی اصلیں مساوی ہوں۔
 اب درجہ دوم کی یہ مساوات یوں بھی لکھی جاسکتی ہے

ل (۱-۲-گ لا + ج لا) + ۲ ل م (ھ-گ-ما-ف لا + ج لا ما)
 + م (ب-۲ ف ما + ج ما) =

لہذا اصولوں کے مساوی ہونے کی شرط یہ ہے

(۱-۲-گ لا + ج لا) (ب-۲ ف ما + ج ما) = (ھ-گ-ما-ف لا + ج لا ما)
 یا (ل + ب-ھ) (۲ + ل م (ھ-ب-گ) + ۲ م (گ-ھ-ل ف) + لا (ب-ج-ف))
 + م (ب-۲ ف ما + ج ما) = (۱-۲-گ لا + ج لا) (ب-۲ ف ما + ج ما) +

لام اور ما میں دوسرے درجہ سے بڑے درجہ کی رئیس کٹ جاتی ہیں۔
پس نفاث ایک مخروطی ہے جس کی مساوات یہ ہے

$$(بج - فن) لا + ۲ لا ما (فگ - جھ) + ما (ج - گ) =$$

$$+ ۲ لا (ھ - ف) (بگ) + ۲ ما (گھ - دن) + (ارب - ھ) =$$

مثال ۱۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت خطوط
مستقیم پر اس کے مقطوعوں کا حاصل جمع مستقل رہتا ہے، ثابت کرو کہ
یہ خط ہمیشہ ایک مکانی کو مس کرتا ہے۔

مفروضہ خطوط مستقیم کو محدودوں کے محور مانو اور خط مستقیم کی مساوات
ل لا + م ما - ا = ۱۔ فرض کرو

تب محوروں پر کے مقطوعے $\frac{1}{ل}$ اور $\frac{1}{م}$ ہیں

$$اب \quad \frac{1}{ل} + \frac{1}{م} = مستقل = عہ (فرض کرو)$$

$$یعنی عدل م - ل - م =$$

پس ل اور م میں یہ درجہ دوم کا ربط ہے اور حسب سابق یہ خط ایک
مخروطی کو مس کرتا ہے۔ نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے والے
دو خطوط مستقیم کی سمتیں مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہیں

$$عدل م - (ل + م) (ل لا + م ما) = ۰ یا ل لا + ل م (لا + ما - عہ) + م ما -$$

شرط انطباق یہ ہے

$$(لا + ما - عہ) = ۲ لا ما یا لا - ۲ لا ما + ما - ۲ عہ ما + عہ = ۰$$

یہ مساوات صریحاً مکانی کو تعبیر کرتی ہے اور اسکی شکل ذیل کی صورت میں بھی تبدیل
ہو سکتی ہے

$$لا + لا + لا = عہ =$$

پس مکانی مذکور محدودوں کے محوروں کو مس کرتا ہے۔
 مثال ۲۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُن عمودوں
 کا حاصل ضرب جو دو ثابت نقطوں سے اس پر کھینچے جائیں مستقل رہتا
 ہے، ثابت کرو کہ یہ ایک مخروطی کو مس کرتا ہے۔

مفروضہ نقطوں کے خط وصل کو لا کا محور مانو اور فرض کہ نقاط معلوم
 'ا' ب بالترتیب (ج، 'ا) اور (- ج، 'ا) ہیں، محور قائم ہیں۔

خط ل + لا + م + ما + = ۰ پر کے عمود ہیں

$$\frac{ل + ج + ا}{\sqrt{ل + م + ا}} \quad \text{اور} \quad \frac{ل + ج + ا}{\sqrt{ل + م + ا}}$$

پس $\frac{ل + ج + ا}{\sqrt{ل + م + ا}} = \text{مستقل} = \text{ب'}$ (فرض کرو)

$$\text{ب' } (ل + م) + (ل + ج) = ا$$

چونکہ یہ ل اور م میں درجہ دوم کی مساوات ہے اس لئے لفاف
 ایک مخروطی ہے۔

اس لفاف کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہمیں مساوات درجہ دوم

$$\text{ب' } (ل + م) + (ل + ج) = ا - (ل + لا + م + ما) = ۰$$

میں $\frac{ل}{م}$ کی قیمتوں کو مساوی بنانا چاہئے۔

مساوات بالا کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$ل (ب' + ج - لا) - ۲ ل م لا + م (ب' - ما) = ۰$$

اور لفاف کی مساوات ہے

$$(ب' + ج - لا) (ب' - ما) = لا ما یا لا ب' + ما (ب' + ج) = ب' (ب' + ج)$$

$$\text{یعنی } ۱ = \frac{۱}{ب} + \frac{لا}{ب+ج}$$

پس لفاف ایک ناقص ہے جس کے محوروں کے طول ۱ ، $ب$ ، $ج$ اور $ب$ ہیں اور جس کے اسکے نقاطِ مذکورہ ہیں۔

مشقیں

۱۰۔ اگر محوروں کا حاصل ضرب $(ب \cdot ج)$ ہو تو اسی طرح ثابت کرو کہ لفاف قطع زائد ہے جس کے اسکے نقاطِ مذکورہ ہیں۔

باب نوزدہم پر متفرق مثالیں

۱۱۔ ایک خط مستقیم دو ثابت خطوطِ مستقیم کے ساتھ ملکر مستقل رقبہ کا ایک مثلث بناتا ہے، ثابت کرو کہ اول الذکر خط کا لفاف ایک زائد ہے جس کے متقارب مذکورہ بالا خطوطِ مستقیم ہیں۔

۱۲۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو محوروں پر اس کے مقطوعوں کا فرق مستقل رہتا ہے، ثابت کرو کہ متحرک خط کا لفاف قطع مکانی ہے۔

۱۳۔ ایک دائرہ لاکے محور پر لڑکتا ہے، اس کا لفاف معلوم کرو۔

۱۴۔ ج ن اور ج ق ایک ناقص کے مزدوج قطر ہیں، اس خط کا لفاف معلوم کرو جو ن اور ق کے معینوں کے وسطی نقاط کو وصل کرتا ہے۔

۱۵۔ خط مستقیم $۱ = م + لا + لا + ۱ + م + ج - م$ ، کا لفاف معلوم کرو جہاں $م$ متغیر ہے۔

۱۶۔ ایک مکانی محوروں کے محوروں کو مس کرتا ہے اور وترِ تماس مساوات $۱ = لا + ب + ۱$ ہے، لفافوں کے طریقہ سے ثابت کرو کہ

خط مستقیم لالہ + ب ما = لہ / (لہ + ا) ہمیشہ منحنی کو مس کرتا ہے خواہ لہ کی قیمت کچھ ہی ہو۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ وہ سب خطوط جو عہ کو مختلف قیمتیں دینے سے

سادات (لاجم عہ + ماجب عہ) = رجم عہ + ب جب عہ سے

حاصل ہوتے ہیں سب کے سب ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۱۸۔ مشق بائبل کی مدد سے ایک ثابت مخروطی کے دو علیٰ القواہم حاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق دریافت کرو۔

۱۹۔ اگر ایک ناقص کے دو حاس ایک ہم مرکز دائرہ کے محیط پر ایک دوسرے کو قطع کریں تو ثابت کرو کہ ان کا وتر تھما س ایک اور ناقص کو مس کرتا ہے۔

۲۰۔ ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ جو دو ثابت نقطوں سے اس پر نکالے جائیں مستقل رہتا ہے، ثابت کرو کہ خط مستقیم کا لفاف قطع ناقص ہے۔

۲۱۔ کئی نقطوں سے ایک متحرک خط مستقیم پر عمود نکالے گئے ہیں، اگر ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہے تو ثابت کرو کہ اس خط کا لفاف قطع ناقص ہے۔

۲۲۔ ایک ناقص کے دو نقاط ن اور ق پر کے حاس علیٰ القواہم ہیں، ثابت کرو کہ ن ق ایک ثابت ہم مرکز ناقص کو مس کرتا ہے۔

۲۳۔ ایک ناقص کا وتر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا وسطی نقطہ ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہوتا ہے، ثابت کرو کہ اس وتر کا لفاف قطع مکافی ہے۔

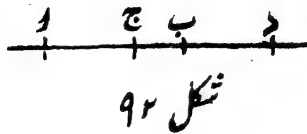
۲۴۔ اگر کتاب لکھا ایک ورق اس طرح موڑا جائے کہ اس کا ایک کونہ مقابل کے کسی ایک ضلع پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ شکن کے خط کا لفاف قطع مکافی ہے۔

باب ہستم

موسیقی تقسیم

۲۶۲۔ موسیقی صفت - تعریف - ایسے نقطوں کی کسی تعداد کو جو ایک خط مستقیم پر واقع ہوں نقطوں کی صفت کہتے ہیں۔
چار نقطے ر، ب، ج، د موسیقی صفت میں ہوں گے اگر ان میں سے دو نقطے باقی دو نقاط کے درمیانی فاصلہ کو داخل اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کریں

یعنی $\frac{ر}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د}$ (۱)
مثلاً فرض کرو کہ ج اور د خط ر ب کو داخل اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں



تب ر، ب، ج، د ایک موسیقی صفت بناتے ہیں اور نقاط ج، د کا زوج نقاط ر، ب کے زوج کا موسیقی مزدوج کہلاتا ہے۔
۲۶۳۔ اگر نقاط ج اور د نقاط ر اور ب کے موسیقی مزدوج ہوں تو ر اور ب نقاط ج اور د کے موسیقی مزدوج ہوں گے۔

کیونکہ حسب مفروض $\frac{ا ج}{ب د} = + \frac{ا د}{ب ج}$ جہاں فاصلوں کی علامتوں کو ملحوظ رکھا گیا ہے، اس سے

$$\frac{ا ج}{ب د} = + \frac{ا د}{ب ج}$$

یعنی ا اور ب خط ج د کو داخلہ اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔
نتیجہ صریح۔ نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کا باہمی ربط یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{ا ج \times ب د}{ا د \times ب ج} = 1 = \dots \dots \dots (۲)$$

کیونکہ $\frac{ا ج \times ب د}{ا د \times ب ج} = 1$ اور $ب ج = - ج ب$

یہ نتیجہ یاد رکھنا چاہئے۔ شمار کنندہ میں نقطوں کی ترتیب وہی ہے جس میں کہ یہ خط پر واقع ہوتے ہیں اور نسبت نمایاں پہلا نقطہ تو وہی ہے لیکن باقی نقطوں کی ترتیب الٹ دی گئی ہے۔ مثلاً

$$\left\{ \begin{array}{cc} ا ج & ب د \\ ب ج & ا د \end{array} \right\}$$

اوپر کے متکافی ربط کے لحاظ سے ہم اکثر اوقات یوں کہیں گے کہ نقطوں کے دو زوج موسیقی ہیں۔

۲۶۴۔ ایک خط پر نقطوں کے دو موسیقی زوج ہیں، اگر ان کے فاصلے اس خط پر کے کسی نقطہ سے ناپے جائیں تو ان فاصلوں کا باہمی ربط دریافت کرو۔



۲۶۵۔ خاص صورتیں۔ نقطہ و کو خاص مقامات پر فرض کرنے سے ہم دفعہ ماقبل کے نتیجہ سے دو نہایت ضروری ربط حاصل کر سکتے ہیں۔
(۱) فرض کرو کہ نقطہ و، ا پر منطبق ہوتا ہے،
تب لا =۔ اور ربط ہو جاتا ہے

$\frac{1}{لا} + \frac{1}{لا} = \frac{2}{لا}$ یا $(لا + لا) = لا$
پس ارب اوسط موسیقی ہے ا ج اور د کا۔ اس سے موسیقی اوسطوں اور موسیقی صغوں کا تعلق ظاہر ہوتا ہے۔

پس ا ج ارب، ا د موسیقی ترتیب میں ہیں۔
(۲) فرض کرو کہ نقطہ و، ارب کا وسطی نقطہ ہے، تب لا =۔ لا
یعنی لا + لا =۔ اور مسادات (۳) کی بائیں جانب صفر ہو جاتی ہے۔

پس لا لا لا + لا لا لا =۔ یا لا لا لا = لا

لہذا اگر ج اور د، ا اور ب کے موسیقی مزدوج ہوں اور و وسطی نقطہ ہو ارب کا تو

ج × د = د = و = ب

صریحاً ج اور د، و کے ایک ہی جانب واقع ہیں ورنہ ج × د کو منفی ہونا چاہئے۔ اس سے ا اور ب کے لحاظ سے ج کے موسیقی مزدوج نقطہ کو معلوم کرنے کا نہایت آسان طریقہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال۔ ایک خط پر کے چار نقطوں کے فاصلے اس پہ کے ایک ثابت نقطہ سے بالترتیب ۵، ۱، ۷، ۹ اکائیاں ہیں، معلوم کرو کہ ان میں سے کوئی زوج دوسرے زوج کا موسیقی مزدوج ہے یا نہیں۔

ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ ان میں سے کسی نقطہ سے باقی نقطوں کے فاصلوں کو اس طرح ترتیب دیا جاسکتا ہے کہ یہ فاصلے سلسلہ

موسیقی میں ہوں (مقابلہ کرو (۱) سے) پہلے نقطہ سے دوسرے، تیسرے، چوتھے نقطوں کے فاصلے بالترتیب $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ہیں، اگر ان کو سلسلہ موسیقی میں ترتیب دینا ممکن ہو تو ظاہر ہے کہ ان کے شکافیوں یعنی $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ کو سلسلہ حسابیہ میں ترتیب دینا ممکن ہوگا، لیکن مؤخر الذکر اپنی موجودہ ترتیب میں ہی سلسلہ حسابیہ میں ہیں، لہذا پہلے اور تیسرے نقطہ کا رواج دوسرے اور چوتھے نقطہ کے رواج کا موسیقی مزدوج ہے اور برعکس اس کے [دیکھو (۱)]

۲۶۶۔ موسیقی صفت کی خاص صورتیں۔ لاتنا ہی پر کا نقطہ۔ اگر نقاط 'ا'، 'ب' اور 'ج' ۱، ۲، ۳ دو موسیقی زوج ہوں اور 'ج'، 'ا'، 'ب' کا وسطی نقطہ ہو تو د لاتنا ہی پر ہوگا۔

کیونکہ 'ا' ج = ج ب اس لئے لازماً 'ا' د مساوی ہوگا 'د' ب کے اور یہ صرف اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ دونوں مقداریں لاتنا ہی ہوں کیونکہ ان مقادیر کا فرق محدود ہے۔

پس 'ا' ب کے وسطی نقطہ کا موسیقی مزدوج اس خط پر لاتنا نفاصلہ پر واقع ہوتا ہے (دیکھو دفعات ۱۹۹، ۲۰۰)

یہ امر اس طرح غور کرنے سے بھی واضح ہو جاتا ہے۔ اگر 'ا' و 'ب' کا وسطی نقطہ ہو تو 'ج' \times 'د' = 'و' (دفعہ ۲۶۵) کیونکہ 'ج' و 'د' کے جتنا قریب آتا جاتا ہے 'د' اتنا ہی اس سے پرے ہٹتا ہے اور بالآخر جب 'ج' و 'د' پر منطبق ہو جاتا ہے تو 'د' لاتنا ہی پر چلا جاتا ہے۔

انفاظ میں اس اہم نتیجہ کو ہم یوں بیان کر سکتے ہیں۔ ایک خط پر کے کوئی دو نقطے ان کا درمیانی نقطہ اور اس خط کا لاتنا ہی پر کا نقطہ چاروں ملکر ایک موسیقی صفت بناتے ہیں۔

مشقیں

۱۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۲۶۵، صورت اول میں 'د' ج اوسط موسیقی ہے

د ب اور د ر کا۔

۲۔ ایک خط پر کے چار نقطوں کے فاصلے اس پر کے ایک ثابت نقطہ سے بالترتیب ۳، ۴، ۵، ۶ انچ ہیں، یہ معلوم کرو کہ ان میں سے کوئی دو باقی دو کے موسیقی مزدوج ہیں یا نہیں۔

۳۔ ایک خط پر کے نقطہ و سے جو مبدأ ہے چار نقاط د، ب، ج، د کے فاصلے لا، لا، لا، لا ہیں، ثابت کرو کہ اگر ربط

$$۲ (لا لا + لا لا) = (لا + لا) (لا + لا)$$

مبدأ و کے لئے پورا ہو تو یہی ربط و کے ہر مقام کے لئے پورا ہوگا۔

۴۔ اگر ج اور د بمحاذ د اور ب کے موسیقی مزدوج ہوں اور د = ۲، ب = ۴ توج کے جو مقامات ذیل میں دے گئے ہیں ان کے بمحاذ د کے مقامات کی نشان دہی کرو

$$\text{وج} = ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶$$

۵۔ اگر د ب کا وسطی نقطہ و ہو اور وج = دد = ۱۲ د ب تو ثابت کرو کہ ج اور د، د ب کی داخلا اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۶۔ اگر ج اور د موسیقی مزدوج ہوں د اور ب کے (شکل ۹۳) تو ثابت کرو کہ ج اور د ہمیشہ مقابل سمتوں میں حرکت کرتے ہیں۔ نیز ج اور د میں سے وہ نقطہ زیادہ سرعت سے حرکت کرتا ہے جو و سے زیادہ فاصلہ پر ہو۔

۷۔ اگر ج حرکت کر کے ج پر اور د حرکت کر کے د پر چلا جائے

جہاں ج ج اور د بہت چھوٹے ہیں تو ثابت کرو کہ $\frac{د}{ج} = \frac{د}{ج}$

۲۶۷۔ مبدأ و سے نقطوں کے دو زوجوں کے فاصلے درجہ دوم کی مساواتوں

$$\text{لا} + \text{ب} = \text{لا} + \text{ج} = \text{۔} \text{ اور } \text{لا} + \text{ب} = \text{لا} + \text{ج} = \text{۔}$$

سے معلوم ہوتے ہیں، اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ یہ دونوں زوج سبقتی ہوں۔

فرض کرو کہ پہلی مساوات کی اصلیں لا، لا، ہیں اور دوسری کی لا، لا، تب ہم جانتے ہیں کہ

$$2(\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}) = (\text{لا} + \text{لا})(\text{لا} + \text{لا}) \quad (\text{دفعہ ۳۶۳})$$

لیکن مسائل مساوات درجہ دوم کی رُو سے

$$\text{لا} + \text{لا} = \text{ب} - \text{ب} / \text{لا} \text{ اور } \text{لا} + \text{لا} = \text{ب} - \text{ب} / \text{لا}$$

$$\text{لا} + \text{لا} = \text{ج} / \text{لا} \text{، } \text{لا} + \text{لا} = \text{ج} / \text{لا} \quad (\text{یوٹو ریل الجبر، دوم، ۱۵۶})$$

$$\text{ہذا } 2 \left(\frac{\text{ج}}{\text{لا}} + \frac{\text{ج}}{\text{لا}} \right) = \left(\frac{\text{ب}}{\text{لا}} - \frac{\text{ب}}{\text{لا}} \right) \left(\frac{\text{ب}}{\text{لا}} - \frac{\text{ب}}{\text{لا}} \right)$$

$$\text{یا } \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ج} = 2 \text{ب} - \text{ب} \dots \dots \dots (۳)$$

نتیجہ صریح۔ نقطوں کا ایک ایسا زوج معلوم کیا جاسکتا ہے جو دو اور معلومہ زوجوں میں سے ہر ایک کا موسیقی مزدوج ہو۔

فرض کرو کہ معلومہ زوج مساواتوں لا + لا + ب = لا + ج = ۔ اور لا + ب = لا + ج = ۔ سے حاصل ہوتے ہیں۔

تب اگر دو نقاط جو لا + ب = لا + ج = ۔ سے تعبیر ہوتے ہیں پہلے زوج کے موسیقی ہوں تو لا + ج + ج = لا + ب = ۔ اور اگر یہ دو نقطے دوسرے زوج کے موسیقی مزدوج ہوں تو لا + ج + ج = لا + ب = ۔

ان دو مساواتوں سے لا، ب، ج کی نشیں حسب معمول حاصل ہو سکتی ہیں۔ (یوٹو ریل الجبر، حصہ دوم، دفعہ ۶۴)

مشقیں

۸۔ ایک خط پر کے ایک ثابت نقطہ و سے نقاط ۱ اور ب کے
فاصلے مساوات

$$۰ = ۵ - لا + ۳ = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں، اگر وج = ۱ تو د معلوم کرو جہاں ج
اور د مزدوج ہیں ۱ اور ب کے۔

(فرض کرو کہ د = عہ، تب جو نقطے درجہ دوم کی دو مساواتوں
لا - ۱) (لا - عہ) = ۰ اور لا - ۵ + لا + ۳ = ۰ سے تعبیر ہوتے ہیں

موسیقی مزدوج ہونے چاہئیں)

۹۔ ق کی دو قیمت معلوم کرو کہ نقاط کا زوج
لا + ۲ - لا = ۱ = ۰ ، لا + ۴ - لا + ق = ۰

کا موسیقی مزدوج ہو۔

۱۰۔ نقطوں کا ایسا زوج معلوم کرو جو ذیل کے دو زوجوں کا موسیقی
مزدوج ہو

$$لا = ۱ ، لا = ۳ اور لا = ۴ ، لا = ۶$$

۱۱۔ نقطوں کا وہ زوج جو دونوں زوجوں

$$۱ لا + ۲ ب لا + ج = ۰ اور ۱ لا + ۲ ب لا + ج = ۰$$

کے لحاظ سے موسیقی ہے مساوات

$$(۱ لا + ب) (ب لا + ج) - (۱ لا + ب) (ب لا + ج) = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۶۹۔ و عہ، و بہ اور وجہ، ولہ شعاعوں کے دو زوج ہیں،
ایک خط مستقیم ان سے ۱، ب اور ج، د پر ملتا ہے، اگر ۱، ب

اور ج، د موسیقی مزدوج ہوں تو ثابت کرو کہ ہر خطِ ستقیم جو ان شعاعوں سے ملتا ہے ان پر موسیقی نسبت سے تقسیم ہو جاتا ہے۔
و، ب اور ج، د موسیقی نقطے ہوں گے اگر

$$\frac{اج \times ب د}{ود \times ب ج} = 1 \dots\dots\dots (دفعہ ۲۶۳)$$

نقطہ و سے اس خط پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ اس عمود کا طول ع ہے تب

$$اج \times ع = ۲ \Delta و ج$$

$$و د \times و ج جب و ج$$

اور اس لئے

$$اج \times و د \times و ج جب و ج / ع$$

$$ب د، و د اور ب ج کیلئے$$

بھی اسی طرح کی قیمتیں حاصل

ہوتی ہیں۔

پس سادات بالا میں درج کرنے سے

$$(و د \times و ج جب و ج / ع) \times (و ب \times و د جب ب و د / ع)$$

$$=$$

$$(و د \times و د جب و د / ع) \times (و ب \times و ج جب ب و ج / ع)$$

$$\text{جس سے جب و ج } \times \text{ جب ب و د} = 1 \dots\dots\dots (۵)$$

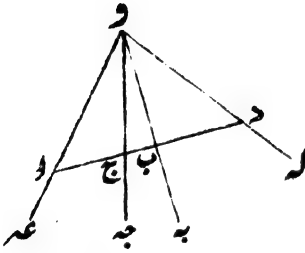
اب اس شرط میں قطع کرنے والے خط کے مقام کی کوئی تخصیص نہیں

بلکہ یہ محض شعاعوں کے باہمی میلان پر موقوف ہے، پس اگر یہ ایک

قاطع خط کے لئے درست ہو تو یہ سب خطوں کے لئے درست ہوگی۔

۲۷۰۔ پنسل۔ تعریف۔ اگر کئی خطوطِ ستقیم ایک ہی نقطہ میں

سے گذریں تو یہ ایک پنسل بناتے ہیں۔



شکل ۹۴

اس نقطہ کو راس کہتے ہیں اور ہر خط کو مفرداً پنسل کی شعاع کہتے ہیں مثلاً 'د'، 'ج'، 'ب'، 'د' (فکل ۹۲ میں) ایک پنسل بناتے ہیں، اس قسم کی پنسل کو مختصراً 'د' (ج ب د) لکھا جاتا ہے۔ موسیقی پنسل - تعریف - اگر خطوط مستقیم کے دو زوج و 'ب' اور 'ج'، 'د'، 'ب' کسی خط (اور اس لئے حسب سابق سب قاطع خطوط) سے موسیقی نقطوں پر ملیں تو خطوط مستقیم کے ان زوجوں کو موسیقی زوج کہتے ہیں یا اصطلاحاً اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ چار خطوط و 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ب' موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

تظہیل - تعریف - اگر ایک خط کے کسی نقطہ 'ن' کو ایک ثابت نقطہ 'و' سے ملایا جائے اور 'و' محدودہ کسی اور خط سے 'ن' پر ملے تو 'ن' کو نقطہ 'ن' کا ظل کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح ۱ - اس سے ظاہر ہے کہ اگر چار نقطے ایک موسیقی صفت بنائیں تو کسی اور خط پر ان کے ظل بھی موسیقی صفت بنائیں گے۔

نتیجہ صریح ۲ - ایک موسیقی صفت کے نقطوں کو کسی راس کے ساتھ ملانے سے جو پنسل حاصل ہوتی ہے وہ موسیقی ہوتی ہے۔

۲۷۱ - صورت خاص - دفعہ ماقبل کے نتیجہ سے ہم ایک اور نتیجہ مستنبط کرتے ہیں جس کے ذریعہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ کوئی مفروضہ پنسل موسیقی ہے یا نہیں۔

فرض کر کے قاطع خط 'د'، 'ج'، 'د'، 'ب' کے متوازی ہے، 'ب'، 'د'، 'ج'، 'د'، 'ب' ہوگا اور بنا بریں 'ج'، 'د'، 'ب' کا وسطی نقطہ ہوگا پس

اگر چار خط موسیقی پنسل بنائیں اور ان میں سے ایک خط کے متوازی ایک قاطع خط کھینچا جائے تو باقی تین خطوں میں سے دو

خطوں کے درمیان قاطع کا جو حصہ منقطع ہوتا ہے اس کی تنصیف تیسرا خط کرتا ہے، اس کا عکس بھی درست ہے۔

مثلاً قطع زائد کے ماس کا وہ حصہ جو اس کے متقاربوں کے

در بیان منقطع ہوتا ہے نقطہ تماس پر دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوتا ہے اور چونکہ تماس مزدوج قطر کے متوازی ہوتا ہے اس لئے ثابت ہوا کہ قطع زائد کے کوئی دو مزدوج قطر متقاربوں کے لحاظ سے موسیقی مزدوج ہوتے ہیں۔

تحلیلی طریقہ سے بھی اس کی تصدیق ہو سکتی ہے قطع زائد

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ ما} = ۱$$

کے متقارب ہیں $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ ما} = ۱$ مزدوج قطر ہوں گے اگر اور خطوط $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ ما} = ۱$ ۔

$$۱ \text{ ب} + ۱ \text{ ب} + ۲ \text{ لا} = ۲ \text{ لا} = ۱ \text{ (دیکھو شق ۱۰، صفحہ ۳۵)}$$

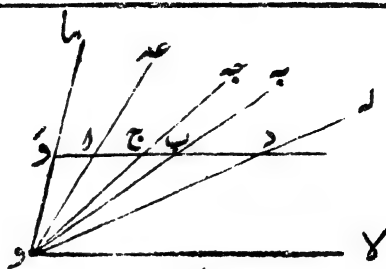
لیکن دفعہ ۲۷۲ کی رو سے یہ شرط وہی ہے جو پوری ہونی چاہئے تاکہ یہ خط متقاربوں کے لحاظ سے موسیقی مزدوج ہوں۔
۲۷۲۔ اس امر کے لئے شرط معلوم کرو کہ مساواتوں

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ ما} = ۱ \text{ اور } ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ ما} = ۱$$

سے خطوط مستقیم کے جو دو زوج تعبیر ہوتے ہیں وہ باہم موسیقی ہوں۔ فرض کرو کہ خطوط کا پہلا زوج ۱ ب ، ۲ ب ہے اور دوسرا ۱ ب ، ۲ ب ہے۔

نیز فرض کرو کہ خط ۱ ما ، ۲ ما سے ۱ لا پر اور خطوط کے زوجوں سے بالترتیب ۱ ب ، ۲ ب ، ۱ ج ، ۲ ج ملتا ہے تب ۱ ب اور ۱ ج موسیقی ہیں، ۲ ب اور ۲ ج کی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں پہلی مساوات میں ۱ ما رکھنا چاہئے، لہذا ۱ لا ، ۲ لا مساوات ذیل کی اصلیں ہیں

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ ب} = ۱$$



شکل ۹۵

اسی طرح سے دوسرا زوج 'وج'، 'و' د مساوات ذیل کی اصلیں ہیں

$$\text{لا} + \text{ا} = \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = \text{و}$$

ہذا دفعہ ۲۶ کی 'و' سے شرط مطلوبہ ہے

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = \text{و} \quad (۵)$$

نتیجہ صریح - فرض کرو کہ خطوں کا دوسرا زوج حوالہ کے محور ہیں

$$\text{یعنی } \text{ا} = \text{ب} = \text{ج} = \text{د} = \text{و}$$

اس صورت میں شرط بالا ہو جاتی ہے م م = . لیکن چونکہ م صفر نہیں ہے اس لئے م = .

یہ خطوط 'ا' لا + 'ب' ما = . محوروں کے لحاظ سے موسیقی خط ہیں -

اس سے ظاہر ہے کہ خط 'ما' - م لا = . اور 'ما' + م لا = . موسیقی ہیں کیونکہ ان کی مساوات ہے

$$\text{ما} - \text{م} = \text{لا} = .$$

جس میں لا 'ما' کی رقم نہیں ہے -

نتیجہ صریح ۲ - اگر خطوط مستقیم کے دو زوج موسیقی ہوں اور ایک زوج کے خط علی القواثم ہوں تو یہ خط دوسرے زوج کے درمیانی زاویوں کی

تصنیف کریں گے
 علی القوائم خطوط مستقیم کے زوج کو محدودوں کے محور فرض کر دو، تب
 دوسرے خط $و$ اور $ب$ کا ۶ ۔ ہیں، اور یہ صریحاً محوروں کے ساتھ
 مساوی زاوے بناتے ہیں۔

مشقیں

۱۲۔ اگر $و$ $ب$ $ج$ ایک مثلث ہو اور $د$ $ب$ $ج$ کا وسطی نقطہ ہو تو
 خطوط $و$ $ب$ $د$ $ج$ اور قاعدہ کے متوازی $و$ میں سے گزرنیوالا
 خط موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۱۳۔ دو خط اور ان خطوں کے درمیانی زاویہ کے داخلی اور خارجی
 منصف موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

(کسی قاطع کے لئے یہ امر اقلیدس $م$ ۶ ، $ش$ ۳ سے ظاہر
 ہے، یا یوں غور کرو کہ اگر دو منصفوں میں سے ایک منصف کے
 متوازی خط کھینچا جائے تو یہ خط ایک مثلث متساوی الساقین قطع کرتا
 ہے اور چونکہ منصف علی القوائم ہیں اس لئے دوسرا منصف اس مثلث
 کے قاعدہ کی تصنیف کرتا ہے)

۱۴۔ تین خط $و$ $ب$ $ج$ دے ہوئے ہیں، ایک اور خط
 $و$ د ایسا کھینچنا مقصود ہے کہ $و$ $ب$ اور $و$ $ج$ دو موسیقی
 مزدوج ہوں، $و$ د کے کھینچنے کے لئے ذیل کے عمل کی صداقت
 ثابت کر دو، $و$ $ج$ پر کوئی نقطہ $ن$ لو اور $ن$ $م$ $ل$ بالترتیب
 $و$ $ب$ کے متوازی کھینچو جو $ب$ $و$ $د$ سے بالترتیب
 $م$ اور $ل$ پر ملیں اور پھر $و$ $د$ کو $م$ $ل$ کے متوازی کھینچو۔

۱۵۔ ایک متحرک خط مستقیم کسی چار ثابت خطوط مستقیم
 $و$ $ب$ $ج$ $د$ کے نقاط $و$ $ب$ $ج$ $د$ پر ملتا ہے،
 ثابت کرو کہ $\frac{و ب \times ج د}{و د \times ج ب}$ کی قیمت قاطع خط کے تمام مقامات

کے لئے وہی ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ خطوط $ما = ۳$ لا اور $ما = ۴$ لا کا زوج اور $ما = ۵$ لا، $ما = ۶$ لا کا زوج موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

(ثابت کرو کہ جن نقطوں پر یہ خط لا، ا سے ملتے ہیں وہ موسیقی صف بناتے ہیں)

۱۷۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کے زوج لا + ۲ لا، ما + ۲ ما، اور لا + ۳ ما، لا + ۴ ما، موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۱۸۔ خواہ محور قائم ہوں یا مائل، خطوط مستقیم $ما = ۳$ لا اور $ما = ۴$ لا محوروں کے ساتھ موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۱۹۔ لہ کی وہ قیمت معلوم کرو کہ خطوط مستقیم کے زوج

۳ لا + لا، ما، اور لا + لہ لا + ما، ما =

موسیقی پنسل بنائیں۔

۲۰۔ اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ جو خط خیالی زوج لا + ما = کے ساتھ موسیقی پنسل بناتے ہیں وہ علی القوائم ہیں۔

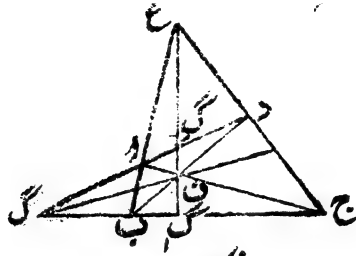
۲۱۔ اگر حوالہ کے محور ایک دوسرے سے زاویہ سہ بنائیں تو ثابت کرو کہ جو خط خیالی زوج لا + ۲ لا، ما + ۲ ما، کے ساتھ

موسیقی پنسل بنائیں ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔

۲۲۔ ذواربعۃ الاضلاع کی موسیقی خاصیت۔

ایک ذواربعۃ الاضلاع $و ب ج د$ ہے، $ب ج$ اور $و د$ ، $گ$ پر ملتے ہیں، $و ج$ ، $د$ لقطہ $ع$ پر اور $ب د$ ، $و ج$ نقطہ $ف$ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خطوں کے زوج $ب ج$ ، $ع$ ، $گ$ ، $ف$ اور $گ$ ، $و$ ، $ب$ موسیقی ہیں۔

$گ$ ، $ب ج$ اور $گ$ ، $و د$ کے حوالہ کے محور مانو،



شکل ۹۶

اگر گ = ۱ = عہ ، گ = ب = بہ ، گ = ج = جہ ، گ = د = نہ
تو ہم خطوط مستقیم کی مساواتیں حسب ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\text{ب ہے } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{ب} = \frac{1}{عہ} + \frac{لا}{جہ} \\ \frac{1}{ج} = \frac{1}{بہ} + \frac{لا}{جہ} \end{array} \right. \text{ ج ہے } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{ا} = \frac{1}{عہ} + \frac{لا}{جہ} \\ \frac{1}{د} = \frac{1}{بہ} + \frac{لا}{جہ} \end{array} \right.$$

گ = خطوط ب و ج کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے غیر مبدا اس پر
واقع ہے اس لئے اس کی مساوات ہے

$$\left(\frac{1}{بہ} + \frac{لا}{جہ} - ۱ \right) - \left(\frac{1}{بہ} + \frac{لا}{جہ} - ۱ \right) = ۰$$

$$\text{یا } لا \left(\frac{1}{بہ} - \frac{1}{جہ} \right) + ما \left(\frac{1}{عہ} - \frac{1}{جہ} \right) = ۰$$

اسی طرح سے آخری دو مساواتوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ گ = ن کی
مساوات ہے

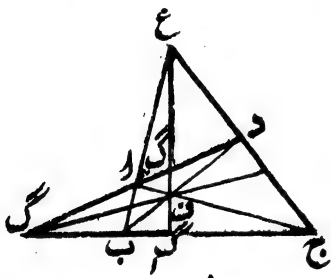
$$لا \left(\frac{1}{بہ} - \frac{1}{جہ} \right) - ما \left(\frac{1}{عہ} - \frac{1}{جہ} \right) = ۰$$

چونکہ گ = ع اور گ = ن کی مشترک مساوات میں لا ما والی رقم
نہیں ہے اس لئے خط گ = ع ، گ = ن محوروں کے ساتھ ملکر ایک
موسیقی پنسل بناتے ہیں - (دیکھو دفعہ ۲۷۷ ، نتیجہ صریح ۱)

ذیل کے نتائج صریح کو طالب علم مشقیں سمجھ کر خود ثابت کرے۔
 نتیجہ صریح ۱۔ اسی طرح سے 'ع' اور 'ب'، 'ع' اور 'ج' کو محور ماننے سے
 ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ازواج 'ع' و 'ف'، 'ع' و 'گ' اور 'ع' اور 'ب'، 'ع' اور 'ج'
 موسیقی ہیں۔

نتیجہ صریح ۲۔ 'ف' کو مبدأ اور 'ب' و 'د' اور 'ا' و 'ج' کو محور مانکر
 ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ازواج 'ف' و 'ع'، 'ف' و 'گ' اور 'ف' اور 'ب'،
 موسیقی ہیں۔

۴۷۔ مکمل ذواربعۃ الاضلاع اور اس کے خواص۔
 پوری شکل کو مکمل ذواربعۃ الاضلاع کہتے ہیں۔ ایسی شکل کھینچنے کا
 آسان طریقہ یہ ہے کہ پہلے ہم خطوط 'ع' اور 'ب' اور 'ع' اور 'ج' کھینچیں
 جو 'ع' پر ملتے ہیں، پھر تقاطع خطوط 'گ' اور 'ب' اور 'گ' اور 'د' کھینچیں۔



شکل ۹۷

اس کو غور سے دیکھ لینا طالب علم کیلئے
 مفید ثابت ہوگا کیونکہ اگر ایسا
 کرنے کی بجائے نقطہ 'ع' اور 'ب'، 'ع' اور 'ج'،
 پہلے سے لئے جائیں تو اکثر اوقات
 شکل کے مختلف خطوط تقریباً متوازی
 ہونگے اور شکل بہت بڑی بن جائیگی۔

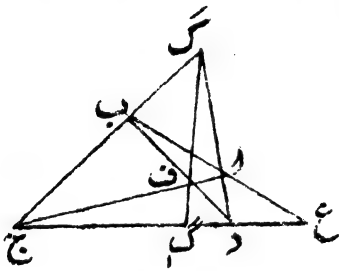
یہ بات بھی توجہ کے قابل ہے کہ

نقاط 'ع'، 'ف'، 'گ' درحقیقت ذواربعۃ الاضلاع 'ع' اور 'ب'، 'ع' اور 'ج' کے
 لحاظ سے متشکل ہیں کیونکہ ان میں سے ہر ایک نقطہ، نقطہ تقاطع ہے
 ایسے دو خطوط کا جو 'ع' اور 'ب'، 'ع' اور 'ج'، 'د' میں سے دو دوراں کو ملانے سے
 پیدا ہوں۔

اگر نقاط تقاطع 'ع'، 'ف'، 'گ' میں سے کسی ایک میں سے حسب ذیل
 چار خطوط کھینچے جائیں تو یہ خط موسیقی پنسل بناتے ہیں۔
 (۱) پہلے دو خط ایک تقاطع (مثلاً 'ف') کو باقی دو نقاط تقاطع

گ، ع سے وصل کرتے ہیں
(۲) دوسرے دو خط اسی نقطہ تقاطع ف کو ابتدائی ذواربقتہ الاضلاع کے نقاط ا، ب، ج، د سے ملائے ہیں۔

۲۷۵ - دفعہ ۲۷۳ کے نتائج سے ہمیں بلحاظ دو نقاط معلومہ ج اور د کے نقطہ گ کے موسیقی مزدوج معلوم کرنے کی ایک آسان اور دل چسپ ترکیب حاصل ہوتی ہے۔
کوئی نقطہ گ ہو اور گ ج، گ د، گ گ کو ملاؤ تب ج میں سے کوئی خط ج د کھینچو جو گ سے ف پر اور گ د سے د پر ملے، د ف کو ملاؤ اور اس کو اتنا خارج کرو کہ یہ گ ج سے دبا پر ملے۔ اس کے بعد ب د کو



شکل ۹۸

ملاؤ اور اس کو اتنا خارج کرو کہ یہ ج د سے ع پر ملے۔
تب ع مطلوبہ نقطہ ہے، جیسا کہ ماقبل سے ظاہر ہے۔

ممکن ہے کہ طالب علم یہ خیال کرے کہ مندرجہ بالا عمل طویل اور پیچیدہ ہے اور کوئی اس قسم کا عمل

کہ پہلے ج د کی و پر تنصیف کی جائے اور پھر د گ \times و ع = و د بتایا جائے زیادہ موزوں ہے۔ درحقیقت جو عمل ہم نے اوپر بیان کیا ہے وہ علم ہند میں سب سے زیادہ ضروری ہے اور یہ اس بنا پر کہ اس میں صرف زواریفی ہی کام لینا پڑتا ہے۔ یہ امر دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ طالب علم اقلیدسی علمونکی جانچ کرے اور دیکھے کہ ان سب میں ہر کار سے کام لینا پڑتا ہے۔
امثلہ دفعہ ۲۷۲، مشق ۴ میں زیادہ آسان عمل بتایا گیا ہے۔

مشق

۲۲ - شکل ۹۷ کے مکمل ذواربقتہ الاضلاع میں اگر ع ف ممدودہ

ب ج سے گ پرٹے تو ثابت کرو کہ نقاط کے زوج ب، ج اور گ، گ موسیقی ہیں۔

یہ ثابت کرنے کے بعد کہ پنسل ع (ب ف ج گ) موسیقی ہے اس سے مستنبط کرو کہ ف (گ ج گ ب) بھی موسیقی ہے یعنی ف (گ ج ع ب) موسیقی ہے۔

(یہ سب امور اس اصول سے ظاہر ہوتے ہیں کہ موسیقی پنسل کو ہر ایک خط موسیقی صنف پر قطع کرتا ہے)

۲۷۔ خط و طی کے لحاظ سے دو مزدوج نقطے ان نقطوں کے موسیقی مزدوج ہوتے ہیں جن پر اول الذکر نقطوں کو ملانے والا خط مخروطی سے ملتا ہے۔

بالفاظ دیگر اگر و اور ب در ایسے نقطے ہوں کہ ان میں سے ہر ایک کا قطبی دوسرے میں سے گزرے اور و ب مخروطی سے نقاط ان اور ق پرٹے تو نقاط و ب اور ن ق کے زوج موسیقی ہوں گے۔
فرض کرو کہ مخروطی

و لا + ہ لا + ب ما + گ لا + ف ما + ج =
ہے، نقطہ و (لا، ہ) ہے اور نقطہ ب (لا، ہ) ہے تب و کا قطبی ہے

و لا + ہ (لا + ما + لا + ہ) + ف ما + گ (لا + لا) + ف (ما + ہ) + ج =
اور چونکہ نقطہ ب (لا، ہ) اس پر واقع ہے اس لئے

و لا + ہ (لا + لا + لا + ہ) + ب ما + گ (لا + لا) + ف (ما + ہ) + ج =
اب جن فیثتوں میں مخروطی خط و ب کو تقسیم کرتی ہے مشہور و معدون نسبتی مساوات درجہ دوم

ک س + ۲ ک ل م + ل س = [دفعہ ۳۶]

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں

$$م = لا + لا + ہ (لا + لا + لا) + ب + با + گ (لا + لا) + ف (با + با) + ج$$

$$س = لا + لا + ہ + لا + با + ب + با + گ + لا + ف + با + ج$$

$$س = لا + لا + ہ + لا + با + ب + با + گ + لا + ف + با + ج$$

اور ک ل کا سر صفر ہے، اس لئے دونوں نسبتیں مساوی اور مختلف العلامت ہیں یعنی ن اور ق، اب کو داخلا اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں، اس سے نتیجہ ثابت ہوا۔

۷۷۔ متبادل ثبوت۔ فرض کرو کہ و اور لا (شکل ۹۹) دو نقاط معلومہ ہیں، و کو مبدا مانو اور و لا کو لا کا محور فرض کرو، نیز فرض کرو کہ مخروطی کی مسادات ہے

$$لا + لا + ہ + لا + با + ب + با + گ + لا + ف + با + ج =$$

اگر مخروطی و لا سے ن اور ق پر ملے تو و ن اور وق کے طول معلوم کرنے کے لئے ہمیں اوپر کی مسادات میں ما کو صفر بنانا چاہیے۔ پس و ن، وق مسادات

$$لا + لا + گ + ج =$$

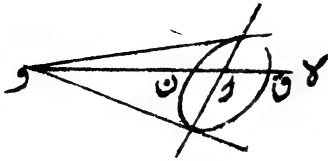
کی اصلیں ہیں، لہذا مساداتوں کے مسائل کی رمو سے

$$\frac{لا}{ج} = \frac{لا}{وق} + \frac{لا}{ون}$$

لیکن مبدا و (۰) کا قطبی گ لا + ف + با + ج = ۰ ہے اور چونکہ یہ حسب مفروض و میں سے گزرتا ہے اس لئے و لا کی قیمت مسادات گ لا + ج = ۰ سے حاصل ہوتی ہے

$$\frac{لا}{ج} = \frac{لا}{وق}$$

ان دونوں نتیجوں کا مقابلہ کرنے سے ہم فوراً دیکھ سکتے ہیں کہ



$$\frac{1}{و} + \frac{1}{ن} = \frac{2}{ق}$$

جس سے ظاہر ہے کہ و اور ن نقاط و اور ق کے موسیقی

مزدوج ہیں (دیکھو دفعہ ۲۶۵)

اس نتیجہ کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔

کسی نقطہ میں سے گزرنے والا خط اس نقطہ، منحنی اور اس نقطہ کے قطبی سے موسیقی نسبت پر تقسیم ہو جاتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر ایک ثابت نقطہ و سے ایک خط کھینچا جائے جو

مخروطی سے ن اور ق پر ملے اور اس خط پر ایک اور نقطہ ر ایسا لیا جا

کہ و ر اوسط موسیقی ہو و ن اور ق کے درمیان، تو جیسے خط

و ن ق، و کے گرد گھومتا ہے ر ایک خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔

کیونکہ وہ نقطہ جس پر خط و ن ق، و کے قطبی سے ملتا ہے حسب

مسئلہ بالا خط و ن ق کی موسیقی تقسیم کرتا ہے، پس ر ہمیشہ و کے

قطبی پر رہتا ہے۔

مشقیں

۲۳۔ اس کی تصدیق کرو کہ نقطے (۱، ۱)، (۲، ۲)، (۳، ۳) مخروطی

لا + لا + ما + م کے لحاظ سے مزدوج نقطے ہیں جس نسبت سے

ان کو ملانے والا خط منحنی سے تقسیم ہوتا ہے اس کے لئے سادات

درج دوم دریافت کرو اور اس سے تصدیق کرو کہ تقسیم موسیقی ہے۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ اگر ایک منحنی، خط مستقیم و ب کی موسیقی نسبت سے


تقسیم کرے تو ایک قطبی ہ میں سے گزرتا ہے۔

۲۵۔ ا، ب، ج، د ایک مخروطی پر چار نقطے ہیں، ا، ب، ج، د سے ع، پر، ب، ج، د سے گ، پر، ا، ج، ب، د سے ف، پر ملتا ہے، نیز ع، ف، ا، د سے گ، پر اور ب، ج سے گ، پر ملتا ہے۔ مکمل ذواربقتہ الاضلاع کے خواص سے ثابت کرو کہ نقطوں کے زوج گ، گ، اور د، ا، زوج گ، گ، اور ج، ب موسیقی ہیں۔ اس سے مستنبط کرو کہ گ، کا قطبی گ، اور گ، میں سے گزرتا ہے اور اس لئے یہ خط ع، فنا ہے۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ شق ماقبل میں مثلث ع و ف گ ایسا ہے کہ اس کا ہر ایک ضلع مخروطی کے لحاظ سے مقابل کے رأس کا قطبی ہے۔

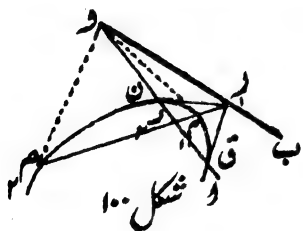
۲۷۸ - محض وطنی کے لحاظ سے دو مردوج خط اور ان کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے مماس موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ ورا، وب منحنی کے لمحا سے مزدوج ہیں یعنی ایسے خط
ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کا قطب دوسرے پر واقع ہوتا ہے تب اگر
نقطہ وسے ماس وم، وم کیچنے جائیں تو ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ
خطوط ورا، وب اور وم، وم باہم موسیقی ہیں۔



فرض کرو کہ خط W مخروطی سے
 ن اور ق پر ملتا ہے، تب حسب
 مفروض W کا قطب W پر
 واقع ہوتا ہے، لیکن W کا قطب

ن اور ق پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ہے، اس لئے یہ ماس
وب پر (یعنی نقطہ لہ پر) ملتے ہیں دیکھو شکل -
اب لہ کا قطبی ن ق نقطہ و میں سے گزرتا ہے



ہذا م، م، جو وکاتبی ہے نقطہ لہ میں سے گزرتا ہے
فرض کرو کہ م، م، ن ق سے لہ پر ملتا ہے، تب حسب دفعہ ۲۷۶

لہ اور لہ مزدوج ہیں م، اور م، کے۔
پس و لہ، و لہ خطوط و م، و م، کے ساتھ موسیقی پینل بناتے ہیں
(دفعہ ۲۷۰) یعنی خطوط و لہ، و ب اور و م، و م، کے موسیقی

ہیں۔
۲۷۹۔ متبادل ثبوت۔ اب ہم دفعہ ماقبل کے مسئلہ کا لہ
تحلیلی ثبوت مندرج کرتے ہیں تاکہ مسئلہ مذکور کی اہمیت اور اس طریقہ
کی خوبی پوری طرح طالب علم کے ذہن نشین ہو جائے۔
فرض کرو کہ مزدوج خط محدودوں کے محور ہیں اور اس لئے و مبداء ہے۔
چونکہ محور بالعموم مخروطی

لا + م + ہ لا + م + ب م + گ لا + ف م + ج = .

کے لحاظ سے مزدوج نہیں ہوتے، اس لئے ضرور ہے کہ سروں کے درمیان
کوئی شرط پوری ہو، اس شرط کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں یہ دیکھنا چاہئے
کہ کن حالات کے ماتحت لا = . کا قطب م = . پر واقع ہوتا ہے۔
اب لا، م کا قطبی ہے

لا (لا + ہ م + گ) + م (ہ لا + ب م + ن) + گ لا + ف م + ج = .

ہذا لا = . کا قطب معلوم کرنے کی مساواتیں ہیں

ہ لا + ب م + ف = . اور گ لا + ف م + ج = .

اگر یہ نقطہ م = . پر واقع ہو تو

ہ لا + ف = . اور گ لا + ج = .

ہذا ف گ = ج ہ = (۱)

اب وہیں سے گزرنے والے ماس ہیں

(گ لا + ن ما + ج) = ج (لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما + گ لا + ۲ ن ما + ج)

دفعہ ۱۳۸

یا لا (اوج - گ) - ۲ لا ما (ف گ - ج م) + ما (ب ج - ن) - ۲
لیکن لا ما والی رقم (۱) کی رو سے صفر ہے پس دفعہ ۲۷۲ کی رو سے
فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ماسوں کا زوج اور محور موسیقی پنسل
بناتے ہیں۔

۲۸۰۔ اوپر کے مسئلہ کی مثال کے طور پر کسی مرکز دار تراش کے مزدوج
قطر دلوں پر غور کرو۔

مرکز میں سے گزرنے والے مزدوج خط مزدوج قطر ہوتے ہیں کیونکہ کسی
قطر کا قطب وہ نقطہ ہے جہاں اس قطر کے سروں پر کے ماس ایک
دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ لیکن چونکہ یہ دونوں ماس مزدوج قطر کے
متوازی ہیں، اس لئے یہ مزدوج قطر کے لائنہاں ہی پر کے نقطہ پر ملتے
ہیں (دیکھو دفعہ ۲۰۰) لہذا کسی قطر کا قطب اس کے مزدوج قطر پر واقع
ہوتا ہے، پس حسب تشریح بالا مزدوج قطر مرکز میں سے گزرنے والے
مزدوج خط ہیں۔ نیز مرکز میں سے گزرنے والے ماس متقارب ہیں اسلئے
معلوم ہوا کہ مزدوج قطر دلوں کا زوج اور متقارب موسیقی پنسل بناتے ہیں

باب ستم پر متفرق مثالیں

۲۷۔ ایک خط پر کے ایک نقطہ معلومہ سے

لا، لا + ۲ لا ما، لا + لا، لا + ما

فاصلوں پر نقطے لئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پہلا زوج دوسرے کا موسیقی
۲۸۔ ثابت کرو کہ وہ نقطے جہاں ایک مثلث کے رأسی زاویہ کے

داخلی اور خارجی منصف قاعدہ سے ملتے ہیں قاعدہ کے سروں کے موسیقی مزدوج ہیں۔

۲۹۔ وہ شرط معلوم کرو کہ خطوط مستقیم کے زوج

لا۔ ما۔ = اور لا۔ لا۔ ۲۔ لا۔ ما۔ + ب۔ ما۔ =۔

موسیقی پینل بنائیں۔

۳۰۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کا صرف ایک ہی زوج ایسا ہو سکتا

ہے جو دو اور مفروضہ زوجوں میں سے ہر ایک کا موسیقی مزدوج ہو۔

۳۱۔ اگر محور قائم ہوں اور خطوط لا۔ لا۔ ۲۔ لا۔ ما۔ + ب۔ ما۔ = کے درمیانی زاویہ کے داخلی اور خارجی منصف لا۔ لا۔ ۲۔ لا۔ ما۔ + ب۔ ما۔ = ہوں تو ثابت کرو کہ لا۔ ب۔ = اور لا۔ ب۔ + ب۔ لا۔ ۲۔ لا۔ ما۔ =۔

ان مساواتوں کو لا اور ب کے ٹے حل کرنے سے منصفوں کی مساویات حاصل کرو۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ محور لا پر کے دو نقطے جن کا فاصلہ مبدأ سے عہ اور بہ

ہے لمحاظ دو اور نقطوں کے جن کے فاصلے مساوات لا۔ لا۔ ۲۔ لا۔ ما۔ + ب۔ لا۔ ج۔ =

سے حاصل ہوتے ہیں موسیقی ہوں گے اگر لا۔ عہ۔ بہ + ب۔ (عہ۔ بہ) + ج۔ =۔

(مساوات درجہ دوم بناؤ جس کی اصلیں عہ اور بہ ہوں)

۳۳۔ اگر خطوط ما۔ = م۔ لا۔ ما۔ = م۔ لا اور خطوط لا۔ لا۔ ۲۔ لا۔ ما۔ + ب۔ ما۔ =۔

موسیقی ہوں تو ثابت کرو کہ

لا۔ م۔ م۔ ۲۔ م۔ + م۔ (م۔ م۔) + ب۔ =۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع کے قطر اور مقابل کے اضلاع کے

وسطی نقاط کو ملانے والے خط موسیقی پینل بناتے ہیں۔

۳۵۔ ایک موسیقی صنف لا۔ ب۔ ج۔ د اور ایک نقطہ و دونوں معلوم

ہیں ثابت کرو کہ اگر ب میں سے ایک خط و د کے متوازی کھینچا جائے تو یہ خط و د اور ج سے ایسے نقطوں پر ملیگا جو ب سے متساوی الفاصل ہوں گے۔

یہ بھی ثابت کرو کہ اگر د ب ج د ایک اور موسیقی صنف ایسی ہو کہ خط و د ب ب ج ج ایک نقطہ پر ملیں تو خط د د بھی اسی نقطہ میں سے گزرے گا۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کے زوج ما = ص، لا، ما = ص، لا اور ما = ص، لا، ما = ص، لا صرف اس وقت موسیقی ہوں گے

$$\text{جبکہ } \frac{۱۴-۳}{۲۴-۲۴} \times \frac{۳-۱}{۲۴-۲۴} = ۱$$

(ان نقطوں کو جن پر کہ اوپر گئے خط، لا = ۱ سے ملتے ہیں موسیقی ثابت کرو)

۳۷۔ اگر خطوط مستقیم کے ازواج ذیل ما = ص، لا، ما = ص، لا، ما = ص، لا

$$\text{ما = ص، لا موسیقی ہوں تو ازواج ما = } \frac{۱۴+۳}{ج+د} \text{، لا = } \frac{۱۴+۳}{ج+د} \text{، ما = } \frac{۱۴+۳}{ج+د}$$

$$\text{ما = } \frac{۱۴+۳}{ج+د} \text{، لا = } \frac{۱۴+۳}{ج+د} \text{، لا = } \frac{۱۴+۳}{ج+د} \text{، لا = } \frac{۱۴+۳}{ج+د}$$

جہاں د ب ج د کوئی مستقل ہیں۔

۳۸۔ اگر ناقص کے چار قطر موسیقی پنسل بنائیں تو ان سب کے مزدوج قطر بھی موسیقی پنسل بنائیں گے۔

۳۹۔ ایک دائرہ کے اندر ایک مثلث بنایا گیا ہے، دائرہ کا ایک قطر کھینچا گیا ہے جو مثلث مذکور کے ایک ضلع پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ باقی دو اضلاع (محدودہ بشرط ضرورت) اس قطر کو موسیقی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۴۰۔ محدودوں کے مبداءوں میں سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں اور

ان میں سے کوئی خط و ن ق ص ایک ثابت خط مستقیم لا + م + س =
 سے ن پر اور ایک ثابت مخروطی لا + ہ + لا + ب + م + گ + لا + ن + م + ج =
 سے نقاط ق اور ص پر ملتا ہے، اگر نقطہ را یا سا ہو کہ ن، ق، ر، ص
 چار موسیقی نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ ر کا طریق مساوات ذیل سے
 تعبیر ہو سکتا ہے

$$\text{س (ولا + ہ + لا + م + ب + م + گ + لا + ن + م + ج)} = \text{س (لا + م + س)} \\
\times (\text{گ + لا + ن + م + ج})$$

آزمائشی پرچہ نمبر ۶

- ۱۔ اگر س = لا + ہ + لا + م + ب + م + گ + لا + ن + م + ج =
 اور س = لا + ہ + لا + م + ب + م + گ + لا + ن + م + ج =
 تو ثابت کرو کہ اس مخروطی کی مساوات جو س = اور س = کے
 چار نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے س + ل = س = کی شکل ہے۔
 اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ ان چار نقاط مشترک کے ایک
 دائرہ پر واقع ہونے کے لئے یہ شرط پوری ہونی چاہئے
 ہ : ہ = ل : ل = ب : ب = لا : لا
 ۲۔ ثابت کرو کہ وہ مخروطی جو مساوات

لا + ہ + ب + م + ہ + لا + م + ن + جم طہ + م + گ جب طہ + لا + ج =
 سے تعبیر ہوتی ہے، کہاں طہ متغیر زاویہ ہے ہمیشہ دو ثابت نقطوں
 میں سے گزرتی ہے۔
 ۳۔ خطوط لا = ا، م = ۲، لا = م = کے راسوں میں سے جو
 دائرہ گزرتا ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔

۴۔ اگر $e = ۱$ ، $b = ۲$ ، $a = ۳$ ۔ خطوط مستقیم کی مساواتیں ہوں تو بتاؤ کہ e بہ b بہ a سے کیا تعبیر ہوتا ہے، ثابت کرو کہ مساوات

$لا = لا (لا / لا + ما / ب - ا)$ سے ایک مخروطی تراش تعبیر

ہوتی ہے جو محدودوں کے محوروں کو مس کرتی ہے۔

۵۔ خطوط مستقیم کا جو قبیل مساوات

$م = (۲ + لا + ۳ + ما + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲) + م$

سے تعبیر ہوتا ہے اس کو مس کرنے والے معنی (لفاف) کا مقام اور نوعیت معلوم کرو۔

۶۔ ایک ناقص کے محور بلحاظ محل کے معلوم ہیں، اگر محوروں کا حاصل ضرب مستقل ہو تو اس کا لفاف معلوم کرو۔

۷۔ ”برہیچہ“ کی تعریف کرو اور مکانی کے برہیچہ کی مساوات دریافت کرو۔

۸۔ ایک خط مستقیم ولا پر چار موسیقی نقطے ن، ق، ر، س واقع ہیں جن میں سے ازواج ن، ر اور ق، س ایک دوسرے کے موسیقی مزدوج ہیں۔ یہ سب نقطے و کے ایک ہی جانب واقع ہیں ثابت کرو کہ

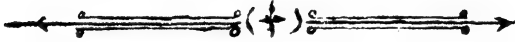
$(ون + ور) (وق + وس) = ۲ \times ون \times ور + ۲ \times وق \times وس$

۹۔ ا، ب، ج، د ایک سطح مستوی پر کے چار نقطے ہیں اور ا، ب اور د، ج ایک دوسرے کو گ پر، ب، ج اور د، ج اور ب، د ایک دوسرے کو ع پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ خطوط ع (ب، گ ج، ف) موسیقی پنسل بناتے ہیں۔ ایک خط مستقیم پر تین نقطے دے ہوئے ہیں، محض پٹری کے ذریعہ

عمل کرنے سے ان میں سے ایک نقطہ کا موسیقی مزدوج بلحاظ باقی ماندہ دو نقطوں کے معلوم کرو۔

۱۰۔ اگر ایک نقطہ سے ایک خط مستقیم کھینچا جائے جو ایک مخروطی کو اور نیز مخروطی کے لحاظ سے جو نقطہ مذکورہ کا قطبی ہے اُس کو قطع کرے تو ثابت کرو کہ یہ خط نقطہ مذکورہ، منحنی، اور نقطہ مذکورہ کے قطبی پر موسیقی نسبت سے تقسیم ہو جاتا ہے۔

بتاؤ کہ مسئلہ ما قبل کیا ہو جاتا ہے جبکہ خط مستقیم زائد کے ایک متقاطع کے متوازی ہو یا مکانی کی صورت میں اس کے قطر کے متوازی ہو یا نقطہ مذکورہ مخروطی کے مرکز پر واقع ہو۔



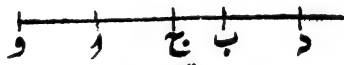
باب بست و یکم

چلیپی (غیر موسیقی) نسبتیں

۲۸۱ = تعریف - اگر ایک خط مستقیم پر چار نقطے 'ا'، 'ج'، 'ب'، 'د' لے جائیں (دیکھو شکل ۱۰۱) تو نسبت

$$\frac{ا ج \times ب د}{ا د \times ب ج}$$

کو صنف 'ا ج ب د' کی غیر موسیقی یا چلیپی نسبت کہتے ہیں اور اسے اس طرح لکھتے ہیں (ا ج ب د) - علامتوں کے لئے معمولی دستور کو ملحوظ رکھنا چاہئے یعنی ا ج = - ج ا



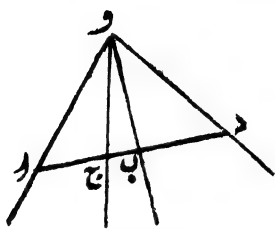
شکل ۱۰۱

اوپر کی کسر کو لکھنے کا طریقہ بھی یاد رکھا جائے - شمار کنندہ میں نقطے اپنی ابتدائی ترتیب میں واقع ہوتے ہیں لیکن نسب ناموں کے دوسرے اور چوتھے نقطے باہم بدل دئے گئے ہیں -

اسی طرح سے اگر چارے پاس چار متساوی خط 'ا'، 'ج'، 'ب'، 'د' ہوں (شکل ۱۰۲) تو نسبت

$$\frac{جب ا ج \times جب ب د}{جب ا د \times جب ب ج}$$

کو شعاعوں و ا، و ج، و ب، و د کی پنسل کی غیر یویتی یا چلیبی نسبت کہتے ہیں اور اسے اس طرح لکھتے ہیں و (ا ج ب د)
 ۲۸۲ - چلیبی نسبتیں تجلیلی ہوتی ہیں۔ د سے خط ا ج ب د پر ایک عمود کھینچو اور فرض کرو کہ اس کا طول ع ہے، تب



شکل ۱۰۲

$$\text{ا ج} \times \text{ع} = \Delta ۲ \text{ ا ج}$$

$$= \text{ا د} \times \text{ا ج} \times \text{ج ب ا ج}$$

$$\text{یا ا ج} = \frac{\text{ا د} \times \text{ا ج} \times \text{ج ب ا ج}}{\text{ا ج}}$$

اسی قسم کی قیمتیں ب د، ا د، ب ج کے لئے حاصل ہو سکتی ہیں۔
 لہذا چلیبی نسبت (ا ج ب د)

$$\frac{\text{ا د} \times \text{ا ج} \times \text{ج ب ا ج} \times \text{و ب} \times \text{و د} \times \text{ج ب ب و د}}{\text{ا د} \times \text{و د} \times \text{ج ب ا د} \times \text{و ب} \times \text{ا ج} \times \text{ج ب ب و ج}}$$

$$= \frac{\text{ج ب ا ج} \times \text{ج ب ب و د}}{\text{و (ا ج ب د)}} = \text{ج ب ا د} \times \text{ج ب ب و ج}$$

اب فرض کرو کہ کوئی اور قاطع اسی پنسل کو ا ج ب د پر کاٹتا ہے،
 تب (ا ج ب د) = و (ا ج ب د)

$$= \text{و (ا ج ب د)} = \text{و (ا ج ب د)}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی چلیبی نسبت کی قیمت تجلیلی سے نہیں بدلتی (تجلیلی کی تعریف کے لئے ملاحظہ ہو دفعہ ۲۷۰، اس قسم کی تجلیلی کو مخروطی تجلیلی کہتے ہیں)

اب ہندسی مخروطات میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ مخروطی تجلیلی کے ذریعہ ایک دائرہ کی تجلیلی سے سب قسم کی مخروطی تراشیں پنے

مکانی، ناقص اور زائد حاصل ہو سکتی ہیں اور برعکس اس کے کسی مخروطی تراش کی تطیل سے ایک دائرہ حاصل ہو سکتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر چلیبی نسبتوں کی کوئی خاصیت دائرہ کے لئے ثابت کر لی جائے تو وہی خاصیت ہر قسم کی مخروطی تراشوں کے لئے درست ہوگی۔

چلیبی نسبت کی قیمت کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے، فرض کرو کہ ایک خط پر کے نقاط ا، ج، ب، د اس پر کے ایک ثابت مبدأ و سے بالترتیب فاصلوں ا، ب، ج، د پر ہیں۔ تب صریحاً

$$\frac{اج \times ب د}{اد \times بج} = \frac{(ج-ا)(د-ب)}{(د-ا)(ج-ب)}$$

منفی نہ رہے کہ شکل ۱۰۱ میں ب ج منفی ہوگا۔

چلیبی نسبت کی اس خاص صورت کو جبکہ یہ نسبت '۱' کے مساوی ہو موسیقی نسبت کہتے ہیں، دیکھو دفعہ ۲۶۳ نتیجہ صریح۔

۲۸۳۔ چار نقطوں کی مختلف چلیبی نسبتیں۔ ایک خط استقیم پر چار نقطے دے ہوئے ہیں، اگر ان کو مختلف ترتیبوں سے لیا جائے تو صریحاً مختلف چلیبی نسبتیں حاصل ہونگی، ظاہر ہے کہ کل مختلف ترتیبیں ۲۴ ہیں لیکن ان سب سے چلیبی نسبت کی مختلف قیمتیں حاصل نہیں ہوتیں، ذیل کی نسبتوں کی قیمتیں لکھنے سے اس امر کی آسانی سے تصدیق کی جاسکتی ہے کہ

$$(ا ب ج د) = (ب ا د ج) = (ج د ا ب) = (د ج ب ا)$$

اور اسی طرح سے باقی ترتیبوں کی صورت میں۔
لہذا مختلف ترتیبوں سے صرف ۲۴ + ۴ یعنی ۶ مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ہم دیکھنے کے کہ یہ قیمتیں ایک دوسرے سے تعلق

یکہتی ہیں۔
تہسید یہ - اگر علامتوں کو مٹوٹا رکھا جائے تو اس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ

$$ا ج \times ب د + ا ب \times د ج + ا د \times ج ب =$$

کیونکہ یہ رقم = (ا د + د ج) ب د + (ا د + د ب) ج د + (ا د + د ج) ب =
= ا د (ب د + د ج + ج ب) + د ج (ب د + د ب) + د ب (ا د + د ج) =
کیونکہ ب د + د ج + ج ب = ب د + د ب =

$$ا ب (ا د ب ج) = \frac{ا د \times ب ج}{ا ج \times ب د} = \frac{ا}{(ا ج ب د)} \dots \dots (۱)$$

$$ا ب ج د = \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} = \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} \dots \dots (۲)$$

$$\therefore (ا ج ب د) + (ا ب ج د) = \frac{ا ج \times ب د + ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} = ۱$$

(ب موجب تہسید یہ بالا)

یا (ا ب ج د) = ۱ - (ا ج ب د)
اور اسی طرح سے دوسری ترتیبوں کے لئے طالب علم کو بطور مشق کے اس کی تصدیق کرنی چاہئے کہ اگر (ا ج ب د) کئی قیمت لہ کے مساوی ہو تو باقی پانچ نسبتوں کی قیمتیں

$$\frac{ا}{لہ} ، ۱ - لہ ، \frac{ا}{لہ} ، \frac{لہ}{۱ - لہ} ، ۱ - لہ$$

۲۸۴ - مثالیں - اگر 'ا' ب' ج' د' ایک دائرہ کے محیط پر ثابت نقطے ہوں اور د' اس دائرہ پر کا کوئی اور نقطہ ہو تو چلیبی نسبت و (ا ج ب د) کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔ یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ زوایا ا ج د ب و ب د د اور د و ا کی قیمتیں و کے مقام پر متوقف نہیں ہیں۔ (دیکھو

آقلیدس (۳۴ ش ۲۱) - دائرہ کی تطلیل ایک مخروطی تراش میں کرنے سے ہمیں نہایت اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ مخروطی پر کے چار ثابت نقطوں کو اس پر کے کسی اور نقطہ سے ملانے سے جو پنسل حاصل ہوتی ہے اُس کی چلیبی نسبت کی قیمت مؤخر الذکر نقطہ کے ہر مقام کے لئے وہی رہتی ہے۔

نیز اگر ایک مخروطی کے چار ثابت مماس کھینچے جائیں تو کسی پانچویں مماس پر ان کے نقاط تقاطع سے جو صاف بنے گی اس کی چلیبی نسبت مستقل ہوگی۔

فرض کرو کہ ایک معلومہ دائرہ پر چار ثابت نقطے (ا ب ج د) ہیں اور ان پر کے مماس کسی اور نقطہ (ق) پر کے مماس کو نقاط (ل م ن) پر قطع کرتے ہیں، اگر دائرہ کا مرکز وہ ہو تو

$$\angle ل م و = \angle ل و ق - \angle م و ق = \frac{1}{2} \angle ل و ب$$

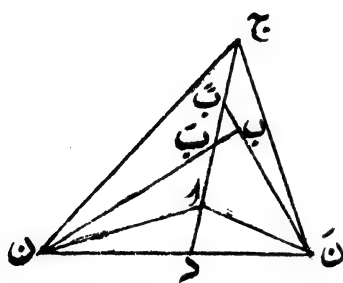
$$- \frac{1}{2} \angle ب و ق = \frac{1}{2} \angle ل و ب \text{ اور اس لئے}$$

مستقل ہے۔

پس پنسل و (ل م ن ر) کے زاوے مستقل ہیں، اس لئے پنسل کی چلیبی نسبت مستقل ہے، لہذا صفت کی چلیبی نسبت بھی مستقل ہے۔ تطلیل کے ذریعہ مسئلہ کی توسیع مخروطی تراشوں کی صورت میں بھی ہو سکتی ہے۔

۲۸۵ - اگر دو پنسلوں کی چلیبی نسبتیں مساوی ہوں اور ان کی ایک شعاع مشترک ہو تو دونوں جہوں کی باقی تین تین شعاعوں میں سے تناظر شعاعوں کے نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوں گے۔

فرض کرو کہ پنسلیں (ن ا ب ج) اور (ن ا ب ج) ہیں اور ن ان کی مشترک شعاع ہے۔



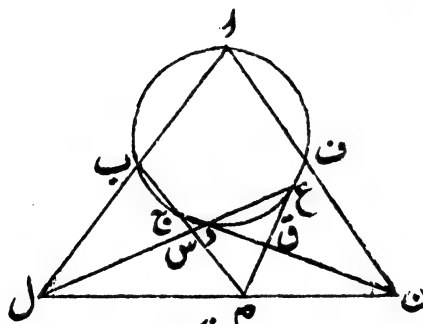
شکل ۱۰۳

نیز متناظر شعاعوں کے نقاط تقاطع
ا ب ج ہیں، اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ
ا ج ن ب اور ن ب کو دو
مختلف نقاط ب، ب پر کاٹا ہے
نیز فرض کرو کہ ا ج، ن ن سے
د پر ملتا ہے، تب چونکہ پسلوں کی
جلیبی نسبتیں مساوی ہیں، اس لئے

$$(د ا ب ج) = (د ا ب ج)$$

جو ناممکن ہے تا وقتیکہ ب اور ب ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں۔
۲۸۶۔ پاسکل کا مسئلہ۔ اگر ایک دائرہ یا مخروطی کے اندر کسی
شکل کا سدس بنا یا جائے تو مقابل کے اضلاع کے تقاطع
نقاط ایک ہی خط پر واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب ج د ع ف سدس ہے، اور ا ب د ع
ایک دوسرے سے ل پر، ب ج ع ف ایک دوسرے سے
م پر، ج د ف ا ایک دوسرے سے ن پر ملتے ہیں، نیز فرض کرو کہ
ب ج د ع ایک دوسرے کو س پر اور ج د ع ف ق پر
قطع کرتے ہیں۔ ل م، م ن کو ملاؤ



شکل ۱۰۴

غیر موسیقی نسبت م (ل ج د ع) = (ل س د ع) = ب (ل س د ع)
 = ب (ل ج د ع)

اسی طرح سے م (ن ج د ع) = (ن ج د ق) = ف (ن ج د ق)

= ف (ل ج د ع)

لیکن ب (ل ج د ع) = ف (ل ج د ع)

م (ن ج د ع) = م (ل ج د ع)

لیکن چونکہ تین شعاعیں م ج، م د، م ع دونوں نسبتوں میں متطابق ہیں، اس لئے م ل اور م ن بھی متطابق ہونگے لہذا، م ن ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہیں۔

پاسکل کے مسئلہ سے ہمیں محض پٹری کے ذریعہ پانچ معلومہ نقطوں میں سے ایک مخروطی کھینچنے کا طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ

ا، ب، ج، د، ع مفروضہ نقطے ہیں، تب شکل ۱۰۴ میں اگر ع میں سے گزرنے والا کوئی خط مخروطی سے دوبارہ ف پر ملے تو ا، ب، د، ع اور ب، ج، ع، ف اور ج، د، ف کے نقاط تقاطع ایک ہی خط پر واقع ہونگے پس نقطہ ف معلوم کرنے کا عمل یہ ہے۔

ا، ب اور د ع کو اتنا خارج کرو کہ وہ ایک دوسرے سے ل پر ملیں، اور فرض کرو کہ ب، ج، ع میں سے گزرنے والے خط سے م پر ملتا ہے، ل م کو ماکر خارج کرو اور فرض کرو کہ ل م ممدودہ ج د ممدودہ سے ن پر ملتا ہے، تب ن ل اور م ع ممدودہ کا نقطہ تقاطع ف مخروطی پر کا نقطہ ہوگا۔

چونکہ ع میں سے کوئی خط کھینچے جاسکتے ہیں اس لئے ہم منحنی پر کے کوئی نقطے معلوم کر سکتے ہیں اور پھر ان میں سے مخروطی کھینچ سکتے ہیں۔
 درپیا۔ اگر ایک خط دلا پر نقطوں کے تین زوج ا، و اور ب، ب

اور ج، ج ایسے ہوں کہ

$$و ا \times و ا = و ب \times و ب = و ج \times و ج = ک ا$$

تو ان چھ نقطوں میں سے کسی چار کی چلیبی نسبت ان نقطوں کے چار مزدوج نقطوں کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

ولا پر عمود و ما ایسا کھینچو کہ و ما = ک ا (دیکھو شکل ۱۰۵)

تب و ما = و ا \times و ا اس لئے دائرہ و ما و و ما کو مس کرتا ہے، لہذا

$$\Delta و ما و = \Delta و ا و$$

اسی طرح سے

$$\Delta و ما ب = \Delta و ب ما$$

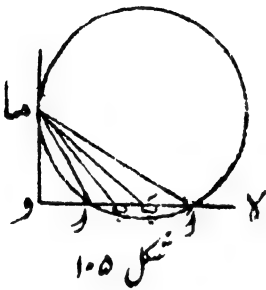
لہذا تفریق کرنے سے

$$\Delta و ما ب = \Delta و ا ب$$

اسی طرح سے $\Delta ب ما ج = \Delta ب ما ج$ وغیرہ وغیرہ، پس پنسل ما (و ب ج ج) کے زاوے بالترتیب پنسل ما (و ب ج ج) کے زاویوں کے مساوی ہیں، پس ان پنسلوں کی چلیبی نسبتیں اور اسلئے ان کی صفوں کی چلیبی نسبتیں باہم مساوی ہیں۔

ظاہر ہے کہ نقاط و ا اور ب، ب اور ج، ج ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز و ہے ایک دوسرے کے مقلوب ہیں۔

نقاط و ا، و، وغیرہ درپچا کا ایک نظام بناتے ہیں جس کا مرکز و ہے، اگر ولا پر و کے دونوں جانب دو نقاط و ف، و ف ایسے



نے جائیں کہ $وفا = وف$ کا $توف$ ، $ف$ درپچا کے اسکے کہلاتے ہیں۔

مشقیں

۱۔ اگر $(اب ج د) = ۱$ تو ثابت کرو کہ $(ا ج ب د) = ۱۲$ اور $(ا ج د ب) = \frac{1}{4}$

۲۔ اگر پنسل $(ا ج ب د) = ۱$ تو ثابت کرو کہ پنسل کی دو شعاعیں ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں (دفعہ ۲۸۲ کو استعمال کرو)

۳۔ اگر $ا ب$ ، $ج د$ کو قطر مان کر دائرے کھینچے جائیں جو ایک دوسرے کو زاویہ طہ پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ نقاط $ا$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ کی منہوں کی چھ چلیبی نسبتیں یہ ہیں

مس $\frac{ط}{۲}$ ، قط $\frac{ط}{۲}$ ، جب $\frac{ط}{۲}$ ، جم $\frac{ط}{۲}$ ، جم $\frac{ط}{۲}$ ، قم $\frac{ط}{۲}$

۴۔ اگر دو خط ایک دوسرے سے نقطہ و پر ملیں اور ان پر تین تین نقطے $ا$ ، $ب$ ، $ج$ اور $ا$ ، $ب$ ، $ج$ ایسے ہوں کہ $(ا ب ج) = (ا ب ج)$ ثابت کرو کہ خطوط $ا$ ، $ب$ ، $ج$ متراکز ہیں۔

۵۔ ناقص $لا + ۴ = ۱۰۰$ پر چار نقاط $ا$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ ہیں جن کے محدد بالترتیب $(۰، ۱)$ ، $(۵، ۸)$ ، $(۳، ۱۰)$ ، $(۰، ۱۰)$ ہیں، اگر ان ناقص پر کوئی اور نقطہ ہو تو پنسل $(ا ب ج د)$ کی چلیبی نسبت دریافت کرو۔

۶۔ ایک خط مستقیم پر چار نقطے $ا$ ، $ب$ ، $ب$ ، $ا$ دے ہوئے ہیں، ایک اور نقطہ $ن$ کا طریق دریافت کرو جبکہ زاوے $ا ن ب$ اور $ب ن ا$ مساوی ہوں۔



سوالات کے پرچے

پرچہ سوالات ۱

- ۱۔ اگر ایک نقطہ کو نقطہ (ن، ق) سے ملایا جائے تو اس ملانے والے خط کی تنصیف خط ل لا + م م + ن = ن۔ زاویہ قائمہ پر کرتا ہے، اول الذکر نقطہ کے مجدد معلوم کرو۔
- ۲۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک مثلث متساوی الاضلاع کے دو معلومہ ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے اور ۲ ج کے مساوی ہوتا ہے، ثابت کرو کہ طریق ایک ناقص ہے، اس کے ماسکوں کا مقام اور اس کا خروج المرکز معلوم کرو۔

- ۳۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا^2}{ب^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے کسی نقطہ پر کا ماس ناقص $\frac{لا^2}{ب^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ک (ک < ۱)$ سے جن نقطوں پر ملتا ہے وہ نقطہ تماس سے متساوی الفصل ہیں۔

- ۴۔ ایک نقطہ معلومہ سے ایک ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں جو محور اعظم سے زاویے طم، طم، طم، طم بناتے ہیں، اگر اس نقطہ کو ناقص کے مرکز کے ساتھ ملانے والا خط محور کے ساتھ زاویہ طہ

بنائے تو ثابت کرو کہ

$$مس\ طہ + مس\ طہ + مس\ طہ + مس\ طہ = ۲ مس\ طہ$$

۵۔ جہاں مکانی کا مرتب محور سے ملتا ہے اُس نقطہ کو مرکز اور وتر خاص کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ لمحاظ اس دائرہ کے مکانی کے تماس کے قطب کا طریق قائم قطع زائد ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنی لا + ۲ لا ما - ۴ - ۲ لا - ۲ ما = ۰ کے متغایب لا + ما - ۱ = ۱۲ ما ہیں، منحنی کو مرتسم کرو۔

۷۔ ایک متغیر دائرہ ایک ثابت خط مستقیم اور ایک ثابت دائرہ دونوں کو مس کرتا ہے، اس کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۸۔ ایک ناقص کے مزدوج قطروں ج ن، ج ق کے طول و اب ہیں اور محور لا کے ساتھ ان کے میلان طہ، طہ ہیں، ثابت کرو کہ لا جب ۲ طہ + ب جب ۲ طہ = ۰۔

۹۔ ایک معلوم خط مستقیم کے کسی نقطہ سے ایک مخروطی تراش کے تماس کھینچے گئے ہیں، اگر ان کے نقاط تماس سے خط مذکور پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ عمودوں کے متکافیوں کا مجموعہ یا فرق مستقل ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{1}{لا + ما - ۱} + \frac{1}{لا - ما + ۱} + \frac{1}{لا - ما - ۱} = ۰$$

ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔ اس کا اسکے او مرتب معلوم کرو۔

پہرچہ سوالات ۲

۱۔ ایک مثلث کے دو رؤسوں سے ایک نقطہ کے فاصلوں کے مربہوں کا مجموعہ ہمیشہ مساوی ہوتا ہے تیسرے رأس سے اسکے فاصلہ کے

- مرج کے اس نقطہ کا طریق معلوم کرو۔
- ۲۔ اگر خط مستقیم لہ لا + مہ ما + سہ = مکانی مآہ ن لا + مآ ن ق = کو مس کرے کو ثابت کرو کہ لہ ق + لہ سہ = ن مہ =
- ۳۔ ناقص $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب} = ا$ کے ماس اُن نقطوں سے کھینچے گئے ہیں جو ناقص $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب} = \frac{لا}{وا} + \frac{ا}{ب}$ پر واقع ہوتے ہیں، ثابت کرو کہ ماسوں کے نقاط تماس کے سامنے مرکز پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔
- ۴۔ اگر ناقص $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب} = ا$ پر دو نقطے (لام، ما) اور (لام، لم) ہوں جن پر کے ماس (لا، ما) پر اور عماد (ضا، عا) پر ملیں تو ثابت کرو کہ

وا ضا = ز لا لا لام اور ب عا = ز ما ما لم

جہاں ز خروج المکرز ہے۔

- ۵۔ جس ناقص کی مساوات $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب} = ا$ ۳ لا ما + مآ = ۲۸ لا - ۵۶ ما + ۱۹۶ = ہے اس کے مرکز کے محدد اور رقبہ معلوم کرو۔
- ۶۔ ثابت کرو کہ محددوں کے محور اور پر کے منحنی کے ماس ہیں اور مرکز کو مبدأ سے مانے والا خط وتر تماس کی تقصیف کرتا ہے۔

- ۷۔ ناقص $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب} = ا$ کے ایک نقطہ پر جس کا خارج المکرز زاویہ عم ہے عماد کھینچا گیا ہے اور عماد کے کسی نقطہ سے ناقص کے دو اور عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ موخر الذکر عمادوں کے متناظر ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ذیل کا زائد ہے
- ب لا جب عم + ا ما جم عم + لا ما =

- ۸۔ مخروطیوں کے ایک نغام کا وہی ماسکہ ہے اور وہی مرتبہ اُن نقطوں کا طریق معلوم کرو جن پر کے ماس ایک معلومہ خط کے متوازی ہیں

۹۔ ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ پر کے دو نقطوں کے معینوں کا مجموعہ
ب ہے، ثابت کرو کہ ان کو ملانے والے وتر کے قطب کا طہریق
 $ب' لا + لا' ما = ۲$ و $ب' ما = ۲$ ہے۔

۱۰۔ ایک مخروطی پر جس کی مسادات $\frac{لا}{ب' + لہ} + \frac{ما}{ب' + لہ} = ۱$ ہے
ایک ایسا نقطہ ن لیا گیا ہے کہ ن پر کا عماد ایک ثابت نقطہ
(ھ، ک) میں سے گذرتا ہے، ثابت کرو کہ ن ذیل کے شععی پر واقع
ہوتا ہے

$$\frac{ب' - ل' - ب}{لا - ھ} = \frac{ما}{لا - ھ} + \frac{لا}{ک - لا}$$

پرچہ سوالات ۳

- ۱۔ وہ شرائط معلوم کرو کہ مسادات
 $لا + ب لا + ما + ج + د لا + ع + ما + ف = ۰$
ایک خط مستقیم کو تعبیر کرے۔
- ۲۔ دائرہ ۱۲ - ۳ ل (جم طہ + ۱۳ جب طہ) + ۵ = ۰
کا نصف قطر اور نیز اس کے مرکز کے قطبی محمد معلوم کرو۔
- ۳۔ ایک ناقص کی مسادات بلحاظ قائم محوروں کے
 $(ل' + ۱) لا + ۲ (ل' + ج) لا + ما + (ج + ۱) ما = ف$
ہے۔ ناقص کا رقبہ دریافت کرو۔

۴۔ ناقصوں $\frac{لا}{ب' + لہ} + \frac{ما}{ب' + لہ} = ۱$ اور $\frac{لا}{ب' + لہ} + \frac{ما}{ب' + لہ} = ۱$
کا ایک مشترک مماس معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ مماس اس متوازی الاضلاع

کے ایک قطر کے متوازی ہے جس کے اضلاع ناقصوں کے مرتب ہیں۔
 ۵۔ اگر Δ کے ۸ ب' تو ثابت کرو کہ ایک ایسا نقطہ معلوم ہو سکتا ہے جس سے اگر Δ ۲ لا = کے دو مماس کھینچے جائیں تو یہ مماس
 لا = ۲ ب ما = کے عماد ہوں۔

۶۔ ذیل کے منہیوں کو مرتب کر دو:-

$$(۱) \Delta + ۲ لا + ۲ ما = ۳ لا + ۱ =$$

$$(۲) ۵ لا - ۶ لا + ۲ ما - ۲ ما - ۲ لا + ۱ =$$

۷۔ ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ پر دو نقطے ہیں جن کے خارج المركز

زاوے عہ اور یہ ہیں۔ ان نقطوں کو ناقص کے مرکز کے ساتھ ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ معلوم کر دو۔

۸۔ ایک ناقص کا مرکز ایک معلوم نقطہ ہے اور ناقص تین دے ہوئے نقطوں Δ ، Δ ، Δ ج میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ناقص کا رقبہ

$$\Delta \pi \Delta \Delta$$

۹۔ (ل + م + ن) (م + ن - ل) (ن - ل - م) (ل - م - ن) ہے جہاں ل، م، ن بالترتیب مثلثوں Δ ، Δ ، Δ کے رقبوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۰۔ متوازی Δ لا + ۲ ما = ۱ لا کو مرتب کر دو اور اس پر بحث کرو، نیز بتاؤ کہ مخروطی Δ لا = Δ (لا + ما) بلحاظ مخروطی Δ لا = Δ کے کیسے واقع ہے۔

۱۱۔ ایک قطع مکانی جس کا محور ایک دے ہوئے ناقص کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور جس کا وتر خاص اس کے محور اصغر کے $\frac{۳}{۲}$ کے مساوی ہے اس ناقص کو اس کے محور اصغر کے مرکز پر سے گزرتا ہے۔ قطع مکانی کی مساوات اور نیز ان منہیوں کے وتر تقاطع کی مساوات

معلوم کرو۔

پرچہ سوالات ۴

۱۔ خط مستقیم $\frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = ۱$ اور دائرہ ۵ (لا + ما + ب + لا + با) = ۹ اب کے نقاط تقاطع کو مبدأ کے ساتھ ملانے سے خطوط مستقیم کا جو زوج حاصل ہوتا ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔ نیز اسکے لئے شرط معلوم کرو کہ یہ خطوط مستقیم علی القوائم ہوں۔

۲۔ دو دائروں کی مساواتیں

$$(لا - ل) + (ب - ما) = ج^۱$$

$$\text{اور } (لا - ب) + (ما - ل) = ج^۲$$

ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے باہم مس کرنے کی شرط ۲ ج = (ل - ب) ہے۔

۳۔ ایک ناقص کا محور اصغر ص ہے۔ اس کا ایک ماسکی وتر ن ق ہے، ثابت کرو کہ ص ن اور ص ق کے تقاطع کا طریق قطع زائد ہے۔

۴۔ ایک نقطہ ص سے کسی ناقص کے دو ماس م ن اور م ق کھینچے گئے ہیں۔ اگر م کے محدود (مھ، ک) ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث م ن ق کا رقبہ

$$وب \left(\frac{ک}{ب} + \frac{مھ}{ب} \right) / \left(۱ - \frac{ک}{ب} + \frac{مھ}{ب} \right) \text{ ہے۔}$$

۵۔ اگر قطع مکانی کے دو عماد ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ایک عماد کا جو حصہ منحنی سے قطع ہوتا ہے وہ دوسرے عماد سے نسبت ۳:۱ میں تقسیم ہو جاتا ہے۔

۶۔ منحنی ۸ لا ۲ لا ۵ لا ۶ لا ۴ لا ۵ لا ۳۵ = کو مرتسم کرو
 ۷۔ ثابت کرو کہ ایک ایسے نقطہ کا طریق جس سے اگر ناقص
 $\frac{لا۲}{ب} + \frac{لا۱}{ب} = ۱$ کے دو تماس کھینچے جائیں تو ان کا درمیانی زاویہ
 نقاط تماس کے خارج المرکز زاویوں کے فرق کے مساوی ہو ذیل کے
 دو منحنیوں میں سے ایک ہوگا

$$\frac{لا۲}{ب} + \frac{لا۱}{ب} = ۱ + ب \quad یا \quad \frac{لا۲}{ب} - \frac{لا۱}{ب} = ۱ - ب$$

۸۔ ثابت کرو کہ $\frac{لا۲}{ب} + \frac{لا۱}{ب} = ۱$ کے مزدوج قطروں کے سروں

کو ملانے والے وتر کے وسطی نقطہ کا طریق ناقص $\frac{لا۲}{ب} + \frac{لا۱}{ب} = \frac{۱}{۲}$ ہے۔

۹۔ ایک ناقص پر دو نقطے ن اور ق ایسے لگے ہیں کہ ن پر
 کے عماد کا قطب ق پر کے عماد پر واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن اور
 ق کا تعلق مشکافی ہے، نیز ثابت کرو کہ اگر ن اور ق پر کے عمادوں کا
 نقطہ تقاطع ک ہو تو ک کو وتر ن ق کے قطب کے ملانے والا
 خط ک کے قطبی کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہے۔

۱۰۔ ایک مثلث کے ایک ضلع کا ہم گنا اور دوسرے ضلع کا ن گنا ملکر
 ج کے مساوی ہوتے ہیں۔ نیز اس کا راسی زاویہ عم بلحاظ مقام کے معلوم
 ہے اس کے بیرونی دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

پرچہ سوالات ۵

۱۔ اگر $ا + ه + لا + و + لا + ب + لا + ج + ا = ۰$ سے حقیقی خطوط مستقیم
 تعبیر ہوں تو ثابت کرو کہ ج لازماً منفی ہوگا نیز ہ کی قیمت $ا + ب + ج$
 کی رقوم میں معلوم کرو۔

۲۔ وہ دائرہ معلوم کرو جو (۴، ۲)، (۰، ۲) میں سے گزرے اور طہ = ۴ کو سس کرے۔

۳۔ مکانی ما = ۴ لہذا کے دو علی القوائم ماسکی وتر کھینچے گئے ہیں اور ہر وتر کے وسطی نقطہ سے اس وتر پر ایک خط عمود وار کھینچا گیا ہے یہ ثابت کرو کہ ان خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق

$$ما = ۱۲ (۱۵ - ۱) ہے۔$$

۴۔ ایک ناقص کے وتر کے محاذی مرکز پر زاویہ قائمہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ وتر ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو سس کرتا ہے۔

۵۔ مزدوج قطروں کے سروں ن اور ق پر کے عماد محور اعظم سے گئے گ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

$$ن گ + ق گ = پ (۱ + ب)$$

۶۔ ناقص کے دو ماس کھینچے گئے ہیں، ان کے تقاطع ماس کے خارج المركز زاویوں کا حاصل جمع مستقل ہے، ان کے نقطہ تقاطع کا طریق دریافت کرو۔

۷۔ ایک ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں ن اور ق ہیں، اگر ن پر کاماس میں ن کے ساتھ زاویہ طہ بنائے اور ق پر کاماس میں ق کے ساتھ زاویہ فہ بنائے، تو ثابت کرو کہ مم طہ + مم فہ مستقل ہے۔

۸۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقاط (۱، ۰)، (۲، ۳)، (۳، ۱) میں سے گزرے۔ نیز دکھاؤ کہ یہ دائرہ خط مستقیم لا۔ ما = ۰ سے جو حصہ قطع کرتا ہے اس کا طول تقریباً ۳،۳۹ ہے۔

۹۔ اگر ایک دائرہ کے کسی وتر کے محاذی ایک نقطہ معلوم پر زاویہ قائمہ بنے تو ثابت کرو کہ وتر مذکور ایک مخروطی تراش کو لفت کرتا ہے۔

۱۰۔ دو مکانیوں ما = ۴ لہذا (لا۔ ل) اور لا = ۴ لہذا (ما۔ ل) میں

ل، ل دو نون متغیر ہیں، یہ مکانی اس طرح حرکت کرتے ہیں کہ یہ ہمیشہ ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں ان کے نقطہ تماس کا طریق دریافت کرو۔

پرچہ سوالات ۶

۱۔ ا ب ج ایک ایسا ستوی مثلث ہے جس میں مس اس $\frac{1}{2}$ =

ج کا طریق معلوم کرو جبکہ ا ب ثابت ہو۔

۲۔ ایک مثلث کے اضلاع کی مساواتیں حسب ذیل ہیں
رجم طہ - ج = ۰

رجم (طہ - $\frac{\pi}{4}$) - $\frac{ج}{2}$ = ۰

رجم طہ + رجب طہ + ج = ۰

اس کا رقبہ معلوم کرو۔

۳۔ $ما = ۳$ اور $لا = ۴$ ب ما دو مکانی ہیں، ان کے مشترک تماس کی مساوات معلوم کرو۔

۴۔ ایک ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد محور اعظم سے گ پر ملتا ہے، ن پر کے تماس پر مرکز ج سے عمود ج ما کھینچا گیا ہے، ج گ کا وسطی نقطہ ہے اور محور اصغر کا ایک سرا ص ہے، ثابت کرو کہ

ون = و ما = وص

۵۔ ذیل کی مخروطیوں $۳ لا \pm ۲ لا ما + ۳ ما = ۸$ کو مرتسم کرو اور یہ دکھاؤ کہ ان میں سے ہر ایک کے ما کے دوسری پر واقع ہوتے ہیں، نیز دکھاؤ کہ چار نقطہ ایسے ہیں جن میں سے یہ دونوں مخروطیاں گزرتی ہیں۔

۶۔ مکانی پر کے ایک نقطہ (عہ، بہ) سے منحنی کے دو عماد کھینچے گئے ہیں جو منحنی سے نقاط (عہ، یہ)، (عہ، بہ) پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

یہ پڑ (عہ - عہر) + بڑ بہ (عہر - عہ) + بہ بہ (عہ - عہ) = .

۷۔ ناقص $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$ ا کے مزدوج قطروں کے سروں پر۔

ماس کھینچے گئے ہیں، ثابت نہ کرو کہ ان کے نقاط تقاطع کا طریق

ناقص $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

۸۔ ثابت کرو کہ مسادات (۱۰۱۔ ۱۰۲) ہک (۱۰۱۔ ۱۰۲) =
 دو خطوط مستقیم کو تعمیر کرتی ہے، نیز یہ دونوں خط نائید لاما۔ ۱۰۳ کی =۔ کر
 مس کرتے ہیں۔

۹۔ ثابت کرو کہ مساوات $لا\bar{ا} + لا\bar{ا} + لا\bar{ا} + لا\bar{ا} = لا\bar{ا}$ سے جو چار خط تعبیر ہوتے ہیں وہ ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۱۔ ایک مثلث کا قاعدہ معلوم ہے اور اس کے باقی دو ضلعوں کی سطح کو ان کے مربعوں کے مجموعہ کے ساتھ جو نسبت ہے وہ بھی معلوم ہے مثلث کے راس کا طریق معلوم کرو۔

پرچہ سوالات ۷

۱۔ نقطہ (ھ، ک) سے خط $ا + لا + با + ج =$ پر جو عمود کھینچ سکتا ہے اس کی مساوات دریافت کرو اور خطوط کے نقطہ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

۲۔ ثابت کرو کہ سوال ۱ میں جو خطوط ہیں ان کے نقطہ تقاطع کا فاصلہ (۴۰ ک) ہے

{(روھ + بک + ج) + (و + ب) (ھ - ک) } / (و + ب) ہے

۳۔ ایک دائرہ کامرکز اس خط مستقیم پر واقع ہے جو محوروں کے درمیانی
 ملا دیہ کی تنصیف کرتا ہے اور دائرہ خطوط $la + b + a + ج = ۰$ اور

۱۔ لا + ب + د = کو مس کرتا ہے، دائرہ کی مساوات معلوم کرو۔
 ۴۔ ایک مکانی کا اُس لہے اور ن، ق اس پر کے دو نقطے ہیں، ن اور ق میں سے گزرنے والے قطر لوق اور لن سے بالترتیب سی اور د پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ سی و مکانی کے محور پر عمود ہے۔
 ۵۔ ثابت کرو کہ دو مکانی م^۱ = ۸ لا اور ل^۲ = ۲۷ لا م ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں زاویہ قائمہ پر اور ایک ایسے زاویہ پر جس کا محاس $\frac{9}{13}$ ہے۔

۶۔ ن پر کا عماد ق پر کے محاس سے محور اصغر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن ق زائد $\frac{لا}{(لا+۲ب)}$ - $\frac{۲ا}{ب}$ = $\frac{۱}{(لا+۲ب)}$ کو مس کرتا ہے۔
 ۷۔ مرتب سے مکانی م^۱ = ۴ لا کے محاس کھینچے گئے ہیں، ان کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو۔

۸۔ زائد کے محیط پر ایک متغیر نقطہ ہے اور دو ثابت نقطے ہیں، متغیر نقطہ کو ثابت نقطوں کے ساتھ دو خطوط کے ذریعہ ملا یا گیا ہے، ثابت کرو کہ ملانے والے خطوط کے درمیان ہر ایک متقارب پر مستقل طول کا ایک حصہ کٹتا ہے۔

۹۔ ایک نقطہ ط کا قطبی بلحاظ م^۱ = ۴ لا کے جن نقطوں پر مکانی کو قطع کرتا ہے ان پر مکانی کے عماد کھینچے گئے ہیں اور وہ ایک دوسرے کو مکانی پر ہی قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ط کا طریق م^۱ (لا + ۲ + ۴) = ۱۰ ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ناقص کے ایسے دتروں کا لغات جن کے سامنے مبدأ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے ایک مخروطی تراش ہے جس کا ماسکہ مبدأ ہے اور جس کا مرتب مبدأ کا قطبی ہے۔

پرچہ سوالات ۸

۱۔ مساوات لا^۲ + ۲ھ لا + ب م^۱ + ۲ گ لا + ۲ ف م + ج = ۰

دو ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبدأ سے مساوی الفاصل ہیں، ثابت کرو کہ

ف^۱ - گ^۲ = ج (ب ف^۱ - و گ^۲)

۲ - دو دائرے محور ماکو مس کرتے ہوئے نقاط (و^۱، ۵^۱) اور (م^۱، ۱۰^۱) میں سے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے کو زاویہ مساوی پر قطع کرتے ہیں۔

۳ - ایک مکانی کے دو ماس ق^۱ و ق^۲ اور ق^۱ و ق^۲ ہیں اور ماس کے ان پر عمودس ماس م^۱، م^۲ م^۱ نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ م^۱ م^۲ م^۱ م^۲ ایسے بدلتا ہے جیسے س ق^۱ -

۴ - نقطہ (لا، ما) سے ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے دو ماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کا درمیانی زاویہ

مس^۱ = $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} - ۱$ ہے۔

۵ - ایک مکانی کے تین ایسے عماد کھینچے گئے ہیں جو ایک ہی نقطہ میں سے نہیں گزرتے، ثابت کرو کہ ان عمادوں کے درمیان جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ

$\frac{۱}{۲} (م + م + م) (م - م) (م - م) (م - م)$

ہے جہاں م مکانی کا وتر خاص ہے اور م، م، م ان زادیوں کے ماس ہیں جو عماد منحنی کے محور کے ساتھ بنتے ہیں۔

۶ - ایک مخروطی کی مسادات لا^۱، لا^۲، لا^۳، لا^۴، لا^۵، لا^۶ ہے، ثابت کرو کہ یہ زائد ہے، اس کا مرکز، اس کے نیم محوروں کا طول اور سمت اور ان کے متقاربوں کی مسادات معلوم کرو۔

۷۔ مکانی $\text{ما} = ۴$ لہ کے اندر ایک نقطہ (لا، ما) ہے، ثابت کرو کہ اس نقطہ میں سے گزرنے والے وتر جن کی تقسیم یہاں پر نسبت لہ : ا سے ہوتی ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں

$$۴ \{ \text{ما} (\text{ما} - \text{ما}) - ۲ (\text{لا} - \text{لا}) \} \text{لہ} + (\text{ما} - \text{ما}) (\text{ما} - \text{لا}) (\text{لہ} - \text{ا}) = ۰$$

۸۔ اگر ناقص کے ایک وتر کے سامنے ماسک پر مستقل زاویہ ہے تو ثابت کرو کہ وتر ایک ایسی مخروطی تراش کو مس کرتا ہے جس کا ماسک اور مرتب دونوں وہی ہیں جو اصلی ناقص کے۔

۹۔ دو مکافوں کا رأس ایک ہی ہے اور ان کے محور علی القواہم ہیں، اس نقطہ کا طریق معلوم کرو جس سے اگر ایک مکانی کا ماس کھینچا جائے تو وہ دوسرے مکانی کے ایک ماس کے ساتھ جو اسی نقطہ سے کھینچا گیا ہو زاویہ قائمہ بنائے۔

۱۰۔ ا ب ج د، د ع ف گ دو مربے ہیں، ع، د پر واقع ہے اور گ، ب د محدودہ پر جبکہ اسے د میں سے خارج کیا جائے، اگر ف ع محدودہ ب ج سے صہ پر ملے تو ثابت کرو کہ دھ، گ ج اور ف د ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

پرچہ سوالات ۹

۱۔ لا + ۲ صہ لا + ما + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰۔

دو خطوط متقیم کو تعبیر کرتی ہے، ثابت کرو کہ (لا، ما) سے جو عمود

ان خطوں پر کھینچ سکتے ہیں ان کا حاصل ضرب = $\frac{(\text{لا، ما})}{\text{ا} (\text{ب} - \text{ب}) + ۲ \text{صہ}}$ ہے۔

۲۔ ایک نقطہ سے دو معلومہ دائروں کے ماس کھینچ گئے ہیں اور وہ باہم مستقل نسبت رکھتے ہیں، اس نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۳۔ دو نقاط (ل، طم) اور (ل، طم) کے ملانے والے خط نقطہ

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) (۱۱) (۱۲) (۱۳) (۱۴) (۱۵) (۱۶) (۱۷) (۱۸) (۱۹) (۲۰) (۲۱) (۲۲) (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۲۶) (۲۷) (۲۸) (۲۹) (۳۰) (۳۱) (۳۲) (۳۳) (۳۴) (۳۵) (۳۶) (۳۷) (۳۸) (۳۹) (۴۰) (۴۱) (۴۲) (۴۳) (۴۴) (۴۵) (۴۶) (۴۷) (۴۸) (۴۹) (۵۰) (۵۱) (۵۲) (۵۳) (۵۴) (۵۵) (۵۶) (۵۷) (۵۸) (۵۹) (۶۰) (۶۱) (۶۲) (۶۳) (۶۴) (۶۵) (۶۶) (۶۷) (۶۸) (۶۹) (۷۰) (۷۱) (۷۲) (۷۳) (۷۴) (۷۵) (۷۶) (۷۷) (۷۸) (۷۹) (۸۰) (۸۱) (۸۲) (۸۳) (۸۴) (۸۵) (۸۶) (۸۷) (۸۸) (۸۹) (۹۰) (۹۱) (۹۲) (۹۳) (۹۴) (۹۵) (۹۶) (۹۷) (۹۸) (۹۹) (۱۰۰)

۴۔ مخروطی لا۔ لا + ما۔ ۷ لا + ما + ۱۸ = کے مرکز کے محدد معلوم کرو، مرکز میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات کو تبدیل کرو اور منحنی کو مرئیم کرو۔

۵۔ ناقص $\frac{لا^2}{ب^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ پر کے کسی نقطہ ن سے محوروں پر عمود ن، ن م نکالے گئے ہیں، اگر مرکز سے خط ل م پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے پایہ کا طریق ہے

$$\frac{قطر^2 ط}{ب^2} + \frac{قعر^2 ط}{ب^2} = \frac{۱}{ب^2}$$

۶۔ ثابت کرو کہ مکانی ما = م لا کے تمام وتر جن کے سامنے رأس پر مستقل زاویہ عہ بنتا ہے مخروطی (لا - م) + م ما + م مم عہ (ما - م لا) = کو مس کرتے ہیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ ان سب نقاط کا طریق جن پر ناقص $\frac{لا^2}{ب^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے محاذی ۹۰ کا زاویہ بنتا ہے ۳ (لا + ما - ب) = ۴ (لا + ما - ب) ہے۔

۸۔ ن ق مکانی ما = م لا کا عمادی وتر ہے اور اس کا ماسک ہے ثابت کرو کہ مثلث س ن ق کے مرکز ہندسی کا طریق ہے $۳۶ و ما^2 (۳ لا - ۱۵) - ۸۱ ما^2 = ۱۲۸ و$

۹۔ ثابت کرو کہ ناقص اور امدادی دائرہ کے دو تناظر ماسوں کے درمیان بڑے سے بڑا زاویہ جب $\frac{ب}{ب+و}$ ہو سکتا ہے۔

۱۰۔ حوالہ کے محوروں پر بالترتیب دو نقطے ن، ق لئے گئے ہیں جو

ایک ثابت نقطہ (ر) ب سے مساوی الفصل ہیں، ن ق کے وسطی نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو اور منجی کو مرتبہ کر دو۔

پرچہ سوالات ۱۰

۱۔ حوالہ کے محوروں کے درمیان خط مستقیم $\frac{لا}{ب} + \frac{ب}{لا} = ۱$ پر جو حصہ کٹتا ہے اس پر مربع بنایا گیا ہے، اس کے اضلاع کی مساواتیں اور اس کے قطروں کے نقطہ تقاطع کے محدود معلوم کر دو۔

۲۔ تین دائروں کے مرکز تین ثابت نقطے ہیں اور ان کے نصف قطر لہ، ک، لہ، ک، لہ، ک ہیں، ان کے بنیادی مرکز کا طریق معلوم کرو جبکہ ک بولے ۳۔ دو مکانی مآ = م ولا اور لا = م ب م ایک دوسرے کو مبداء و پر اور نقطہ ن پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ و ن اور ن پر کے مماسات کے جو میلان کسی ایک محور کے ساتھ ہیں ان کے مماس سلسلہ ہندسیہ میں ہیں، نیز جو دو مثلث ن پر کے مماسات اور کسی ایک محور کے درمیان جتنے ہیں ان کے رتبے مساوی ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ (لا، مآ) سے مکانی مآ = م ولا کے تین عماد (حقیقی یا خیالی) کھینچ سکتے ہیں، نیز اگر یہ عماد حقیقی ہوں تو ان کے پایوں میں سے گزرنے والا دائرہ مکانی کے رأس میں سے گزرتا ہے اور اس دائرہ کی مساوات حسب ذیل ہے

$$لا + مآ - \frac{مآ}{۳} - (۲ + لا) = ۰$$

۵۔ اگر مخروطی لا + مآ + ب مآ + مآ + گ لا + مآ + ج = ۰ کے مزدوج قطر محور لا کے ساتھ زاوے عہ، بہ بنائیں تو ثابت کرو کہ ب س عہ س بہ + عہ (س عہ + س بہ) + ل = ۰

۶۔ ایک ناقص کے ماسکے س، س ہیں اور محور اعظم کے ایک ہی

جانب اس کے محیط پر نقطے ق، ق' اس طور پر لئے گئے ہیں کہ س ق، س ق' باہم متوازی ہیں اور س س' کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہیں، اگر اس نقطہ پر جس کا خارج مرکز زاویہ طہ ہے ماس کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ماس اور ق ق' ایک دوسرے سے محور اعظم پر ملتے ہیں۔

۷۔ دو ثابت معلومہ سمتوں میں مکانی کے مساوی دتروں کے جوڑے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقاط تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔
۸۔ ایک ایسے قائم زائد کے مرکز کا طریق دریافت کرو جو تین معلومہ نقطوں میں سے گزرے۔

۹۔ ناقص کی سطح میں ایک نقطہ ہے، ثابت کرو کہ اس نقطہ میں سے دو ہم ماسکے کھینچ سکتے ہیں، ایک ناقص اور دوسرا زائد۔ اگر ان ہم ماسکون کے اعظم نیم خوروں کے طول λ ہوں تو ثابت کرو کہ نقطہ مذکورہ اور مرکز کے خط وصل کا جو مزدوج نیم قطر بلحاظ ناقص کے ہے اس کا طول $(\lambda - \lambda')$ ہے۔
نیز ثابت کرو کہ زائد اور ہم ماسکے ناقص کے نقاط تقاطع پر زائد کے چار ماس کھینچنے سے جو متوازی الاضلاع بنتا ہے اس کا رقبہ $\frac{1}{2} \lambda \lambda'$ (ب) ہے۔
۱۰۔ ایک دائرہ ایک ناقص کو دو نقطوں پر مس کرتا ہے، اگر ناقص کے کسی نقطہ سے دائرہ کا ماس کھینچا جائے اور اسی نقطہ سے ناقص اور دائرہ کے مشترک وتر پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ اس ماس اور عمود کی باہمی نسبت مستقل ہے۔

پرچہ سوالات ۱۱

۱۔ مثلث کے اضلاع ج ب، ج ا پر دو متغیر نقطے ن، ق اسطوریہ لئے گئے ہیں کہ ج ن : ن ا = ب ق : ق ا، ن ق کے درمیان نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

۲۔ دائرہ $\lambda = \lambda'$ ، $\lambda = \lambda''$ ، $\lambda = \lambda'''$ کے وتر تقاطع کا طول دریافت کرو، نیز ہر نقطہ تقاطع پر دائروں کے درمیان جو زاوے بنتے ہیں ان کے

کرتا ہے، اگر کسی وتر کا درمیانی نقطہ Δ ب پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس وتر کے جو حصے Δ ، Δ ب اور Δ فی کے درمیان کٹتے ہیں وہ مساوی ہیں۔

پہرچہ سوالات ۱۲

۱۔ ثابت کرو کہ Δ لا + Δ ۲ لا + Δ ب ما = ۰ کا ایک نقطہ دو خطوں مستقیم Δ لا + Δ ۲ لا + Δ ب ما + Δ ۲ گ لا + Δ ف ما + Δ ج = ۰ کے تقاطع میں سے گزرے گا اگر Δ (گ - Δ ۲ ف) = Δ گ ف (ا - Δ ب)۔
۲۔ جس زاویے پر دائرے لا + Δ ۲ لا + Δ ۲ گ لا + Δ ف ما + Δ ج = ۰ اور لا + Δ ۲ لا + Δ ۲ گ لا + Δ ف ما + Δ ج = ۰ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اس کی جیب تمام معلوم کرو۔

۳۔ مکانی ما = Δ لا کے دو نقطوں پر جن کے فاصلوں کی باہمی نسبت $m : 1$ ہے دو مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے تقاطع کا طریق مکانی ما = $(\frac{m}{1} + \frac{1}{m}) \Delta$ لا ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{\Delta}{\Delta}$ + $\frac{\Delta}{\Delta}$ = ا کے اس وتر کا طول جو خط $\frac{\Delta}{\Delta}$ + $\frac{\Delta}{\Delta}$ = ۱ پر واقع ہوتا ہے

$$\frac{\Delta}{\Delta} + \frac{\Delta}{\Delta} = \sqrt{\Delta + \Delta} - 1 \times \sqrt{\Delta + \Delta} + \Delta = \Delta$$

۵۔ ایک ناقص کے کمرہ محور Δ اور ب ہیں، اس کے کسی نقطہ پر مماس اور عماد کھینچے گئے ہیں، اگر مرکز سے مماس اور عماد پر عمود نکالے جائیں اور ان کے طول بالترتیب ع اور ع ہوں تو ثابت کرو کہ ان کا باہمی تعلق ربط ذیل سے ظاہر ہوتا ہے

$$ع' ع = (ع' - \Delta) (\Delta - ع)$$

اگر ایک ہی راج پر دو عا دیسے گئے جائیں کہ ان میں سے ہر ایک کا فاصلہ مرکز سے $\frac{1}{2}$ ہو تو ثابت کرو کہ ان کا درمیانی زاویہ 90° (۱-۱)۔
 ۶۔ مکانی $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ لا کے وتر ایک ایسے دائرہ کو مس کرتے ہیں جس کا مرکز ماسک ہے اور نصف قطر ب، ثابت کرو کہ وتروں کے وسطی نقطوں کے طریق کی مساوات حسب ذیل ہے

$$\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) \} = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2})$$

۷۔ مکانی $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ لا = ۱۲۔
 کے محور کی مساوات معلوم کرو۔

۸۔ منحنی $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ لا = ۱ کو مرتسم کرو اور مبداء سے اس کے ماس کی مساوات معلوم کرو۔

۹۔ دو خط ایک دوسرے کو $\frac{1}{2}$ پر قطع کرتے ہیں، پہلے خط پر تین نقطے $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ لگائے گئے ہیں اور دوسرے پر $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ۔ اگر دوسرے خط کو $\frac{1}{2}$ کے گرد گھمایا جائے اور نقاط $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ اس کے ساتھ حرکت کریں تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ کو ملائے والے خطوط سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ ایسے بڑھتا ہے جیسے $\frac{1}{2}$ پر کے زاویہ کی جیب۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ لا = $\frac{1}{2}$ کے کسی نقطہ پر کا ماس اور یسین ان وتروں کے موسیقی مزدوج ہیں جو محور اعظم کے سروں کو نقطہ مذکورہ کے ساتھ ملائے سے پیدا ہوں۔

پرچہ سوالات ۱۳

۱۔ لا + $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ لا = ج۔ دو خطوط مستقیم ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع سے مبداء کے فاصلے کا مربع $\frac{1}{2}$ (لا + ب) - $\frac{1}{2}$ (لا - ب) ہے۔
 ب۔ لا

$۲ = \text{لا} + \text{ما} + \text{م} + \text{ع}$ - $۳ = \text{لا} + \text{م} + \text{ع}$ ہے۔
 ۱۰۔ ثابت کرو کہ مسادات $\text{لا} + \text{ما} = \text{ک} + \text{ک}$ بالآما ایک مخروطی
 تراش کو تقسیم کرتی ہے جو محوروں کو مس کرتی ہے، ک کی گس قیمت
 کے لئے یہ مخروطی دائرہ ہوگی اور دائرہ کا نصف قطر کیا ہوگا۔ محور علی التواء
 تھا۔

پرچہ سوالات ۱۴

۱۔ سیدائیں سے دو خط وا و ب کھینچے گئے ہیں، ان کے طول
 وا و ب ہیں اور یہ محور کا کے ساتھ بالترتیب زاوے ۳۰° اور ۶۰°
 بناتے ہیں، وا و ب کی مسادات معلوم کرو۔
 ۲۔ $\text{ی} = \text{لا} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ا} + \text{گ} + \text{لا} + \text{ن} + \text{ما} + \text{ج} =$
 خط وا مستقیم کا ایک جوڑا ہے، ثابت کرو کہ جہاں یہ خط محوروں سے ملے
 ہیں ان چار نقطوں میں سے گزرنے والا تیسرا جوڑا
 $\text{ج} + \text{ی} + \text{ا} + \text{ن} + \text{گ} = \text{ج} + \text{ا} + \text{ما} =$ ہے۔
 ۳۔ ایک مکانی کاوتر خاص ما ہے، اس پر کے ایک نقطہ ن
 کا معین ما ہے اور اس دائرہ کی مسادات جو ن کے قطر پر
 کھینچا جائے

$$\text{لا} + \text{ما} - (\text{ا} + \frac{\text{ما}}{\text{ا}}) - \text{لا} - \text{ما} + \frac{\text{ما}}{\text{ا}} =$$

ہے، ثابت کرو کہ یہ دائرہ ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم کو مس کرتا ہے۔
 ۴۔ نقطہ ت (ن ، ا) سے ناقص $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ا}} = ۱$ کے
 مسادات ت ، ن ، ا ہیں، ناقص کا مرکز ج ہے، ثابت کرو کہ
 ذواربتہ الاضلاع ت ، ن ، ج قی کا رقبہ
 $\frac{\text{ما}}{\text{ا}} + \text{ن} + \text{ا} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ا} =$ ہے۔

۵۔ ثابت کرو کہ ماسکہ سے مخروطی کے عماسات کی مساوات دائرہ کی شرط کو پورا کرتی ہے۔

۶۔ جن نقطوں پر خط مستقیم $\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ب} = ۱$ مخروطی

۷۔ $\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ب} = ۱$ سے ملتا ہے اُن پر مخروطی کے عماد کھینچے گئے ہیں

ثابت کرو کہ عمادوں کا نقطہ تقاطع $\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج}$ ہے

۸۔ منحنی ۱۵ لا - ۲۳ لا - ۲۸ لا + ۲۹ لا - ۶ = ۰ کو مرتسم کرو۔

۹۔ منحنی $\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ب} = ۱$ کو مرتسم کرو۔

۱۰۔ ایک نقطہ معلومہ سے زائد $\frac{لا}{ا} - \frac{ب}{ب} = ۱$ کے عماد

کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ جن نقطوں پر یہ منحنی سے ملتے ہیں اُن کے خارج مرکز زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے طاق ضعف کے مساوی ہے

۱۱۔ ایک قائم زائد کے متقارب محدودوں کے محور ہیں، اس کا ایک

ماس کھینچا گیا ہے، $\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ب} = ۱$ کی ہم ماسکہ مخروطیوں کے

کے لحاظ سے اس ماس کے قطب لئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان تمام

قطبوں کے قطبی بنماظ مخروطی $\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ب} = ۱$ کے ایک ہی

نقطہ میں سے گزرتے ہیں، نیز ایسے نقطوں کا طریق ایک قائم زائد ہے جس کے متقارب محدودوں کے محور ہیں اور جو اصلی زائد کا فرد ج ہے

$$۴ \text{ ا ب } = (ا - ب)^۲$$

۸۔ اگر زائد کے اُن چار نقطوں کے فاصلے جن پر کے عماد ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں لا، لا، لا، لا ہوں گے ثابت کرو کہ

$$(لا + لا + لا + لا) (لا + لا) = \left(\frac{1}{لا} + \frac{1}{لا} + \frac{1}{لا} + \frac{1}{لا} \right) = ۴$$

۹۔ ناقص کے مرکز کو بیضا مانا گیا ہے اور اس کے ایک دوسرے نقطہ تعصیف

$$(لا، لا) ہے، ثابت کرو کہ $\frac{لا}{لا + لا} = \frac{لا}{لا + لا}$ وتر کے$$

قطب کے محد ہیں جہاں لا، لا ناقص کے نیم محور ہیں۔

۱۰۔ نقطہ ن سے مخروطی لا، لا + لا = اکاماس ن ق کھینچا گیا ہے اور اس کے سامنے مرکز پر زاویہ قائمہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ ن کا طریق

$$\frac{لا}{لا} + \frac{لا}{لا} = (لا - لا)$$

ہے، اگر نقطہ تماس ق کے محدود (لا، لا) ہوں تو ن کا وتر تماس

$$\text{بلحاظ مخروطی کے } \frac{لا}{لا} - \frac{لا}{لا} = لا - لا \text{ ہے۔}$$

جوابات حصہ اول

صفحات (۱-۷۴)

- ۳- ۱۳ میل، ۱۰ میل
۶- لا' + ما' = ڈ
۴- ۲۵ - ۴
۷- لا- (د) + (ما-ع) = ڈ
۵- ۱۳۷
۹- (۱۱ - ۷) = ۴
۱۰- (۱ - ۱) = ۰
۱۱- ۱۱ - ۳ = ۸
۱۲- { (ن-ر) لا + ر لا } / { (ن-ر) م + م ر } / ن
۱۳- (د) لا (ب) لا (و ب) (ج) ف (م-ن) - ۱ ق (ل-م)
۱۵- ۲
۱۸- (د) لا - ۱ - ۱ (ب) لا - ۱ - ۱ (ج) لا - ۱ - ۱
۱۹- (د) لا ۲، ۵، ۳۷ (ب) لا ۵، ۳۷ (ج) لا ۵، ۳۷
۲۰- (د) لا ۲، ۲ (ب) لا ۲، ۲
۲۱- (د) لا ۱، ۱ (ب) لا ۱، ۱
۲۷- لا + ما' = ۲
۲۸- لا + ما' = ۲
۲۹- ما' = لا + لا جہاں ڈ معلومہ فاصلہ ہے۔
۳۰- (د) سدا اور نقطہ (۱، ۲) میں سے گزرنے والا خط مستقیم
(ب) دائرہ جس کا مرکز مبدأ ہے اور نصف قطر ۴ (ج) دو خطوط مستقیم جو مبدأ
کو نقاط (۱، ۲) اور (۱، ۲) کے ساتھ ملاتے ہیں (د) دو خطوط مستقیم
جو دلا کے متوازی ہیں اور اس کے اوپر اور نیچے فاصلہ ۲ پر واقع ہیں

(ع) منحنی جو حصہ دوم دفعہ ۴۴ مثال ۲ کے منحنی کے متشابه ہے (ب) دونوں محور (گ) خط مستقیم جو محوروں کو نقاط (۰، ۲) و (۳، ۰) پر کاٹتا ہے (د) محور ما اور ایک خط مستقیم جو مبدأ اور نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتا ہے

$$۳۳ - ۳۳ = ۰ \quad ۳۳ - ۳۳ = ۰ \quad ۳۳ - ۳۳ = ۰ \quad ۳۳ - ۳۳ = ۰ \quad ۳۳ - ۳۳ = ۰$$

$$۳۴ - ۳۴ = ۰ \quad ۳۴ - ۳۴ = ۰ \quad ۳۴ - ۳۴ = ۰ \quad ۳۴ - ۳۴ = ۰ \quad ۳۴ - ۳۴ = ۰$$

$$۳۵ - ۳۵ = ۰ \quad ۳۵ - ۳۵ = ۰ \quad ۳۵ - ۳۵ = ۰ \quad ۳۵ - ۳۵ = ۰ \quad ۳۵ - ۳۵ = ۰$$

$$۳۶ - ۳۶ = ۰ \quad ۳۶ - ۳۶ = ۰ \quad ۳۶ - ۳۶ = ۰ \quad ۳۶ - ۳۶ = ۰ \quad ۳۶ - ۳۶ = ۰$$

$$۳۷ - ۳۷ = ۰ \quad ۳۷ - ۳۷ = ۰ \quad ۳۷ - ۳۷ = ۰ \quad ۳۷ - ۳۷ = ۰ \quad ۳۷ - ۳۷ = ۰$$

$$۳۸ - ۳۸ = ۰ \quad ۳۸ - ۳۸ = ۰ \quad ۳۸ - ۳۸ = ۰ \quad ۳۸ - ۳۸ = ۰ \quad ۳۸ - ۳۸ = ۰$$

$$۳۹ - ۳۹ = ۰ \quad ۳۹ - ۳۹ = ۰ \quad ۳۹ - ۳۹ = ۰ \quad ۳۹ - ۳۹ = ۰ \quad ۳۹ - ۳۹ = ۰$$

$$۴۰ - ۴۰ = ۰ \quad ۴۰ - ۴۰ = ۰ \quad ۴۰ - ۴۰ = ۰ \quad ۴۰ - ۴۰ = ۰ \quad ۴۰ - ۴۰ = ۰$$

$$۴۱ - ۴۱ = ۰ \quad ۴۱ - ۴۱ = ۰ \quad ۴۱ - ۴۱ = ۰ \quad ۴۱ - ۴۱ = ۰ \quad ۴۱ - ۴۱ = ۰$$

$$۴۲ - ۴۲ = ۰ \quad ۴۲ - ۴۲ = ۰ \quad ۴۲ - ۴۲ = ۰ \quad ۴۲ - ۴۲ = ۰ \quad ۴۲ - ۴۲ = ۰$$

$$۴۳ - ۴۳ = ۰ \quad ۴۳ - ۴۳ = ۰ \quad ۴۳ - ۴۳ = ۰ \quad ۴۳ - ۴۳ = ۰ \quad ۴۳ - ۴۳ = ۰$$

$$۷۰ - ۱۰ - ۱۵ = ۴۱، ۲۱ + ۱۵ = ۳۶، ۲۰ = ۱۱ + ۱۲ + ۲۲ = ۴۵$$

$$۷۱ - ۳ - ۳ = ۶۵، ۲ + ۳ = ۵، ۹ = ۱ + ۸$$

$$۷۲ - ۲۱ - ۱۵ = ۳۶، ۱۳۶ = ۶۷ + ۶۹، ۹۹ = ۱۲ + ۸۷ = ۹۹$$

$$۷۵ - (۱) - ۳ - ۳ = ۶۷، ۲۷ = ۱۲ + ۱۵ = ۲۷، ۳ = ۱ + ۲$$

$$(۲) - ۶ - ۵ = ۹، ۱۰ = ۳ + ۷، ۱۳ = ۶ + ۷$$

$$۷۶ - ۹ - ۳ = ۶۴، ۱۶ = ۸ + ۸، ۵۱ = ۱۵ + ۳۶$$

$$۷۹ - ۲ = ۷۷، ۳ = ۱ + ۲$$

۸۰ - (۱) دونوں محور (ب) دو خطوط مستقیم جو محور ما پر منطبق ہوئے

(ج) دو خیالی خطوط مستقیم لا + ما = ۱ اور لا - ما = ۱

جو مبدأ میں سے گزرتے ہیں اور مبدأ ہی ایک حقیقی نقطہ ہے ان کے طریق پر

(د) لا کا محور اور خط لا + ما = (ع) دو منطبق خطوط مستقیم لا - ما =

(ف) دو خیالی خطوط مستقیم لا + ما = ۱ اور لا - ما = ۱ کے متوازی

(گ) دو خیالی خطوط مستقیم لا - ۱ = (ما - ب) - ۱ جو نقطہ (ا، ب) میں

سے گزرتے ہیں (س) لا = ۲ اور ما = ۳

$$۸۱ - مسن \frac{1}{2} - ۸۲ = ۳، لا + ما = ۲، ۵ = ۳ + ۲$$

$$۸۷ - (۱) لا + لا = (ب) لا - ما = (ج) لا + ما = (د) لا - ما =$$

$$۸۸ - ب + لا + لا = ۸۹ - لاجم عہ + ما جب عہ =$$

$$۹۰ - لا + ما = ف + گ - ج ۹۳ - لا - ما = ۱، لا + ما = ۲$$

$$۹۳ - ۲ - لا + ما = ۱، لا - ما = ۱، (۱۰)$$

$$۹۵ - (۱، ۲) - لا - ما = ۱، لا - ما = ۲$$

$$۹۷ - \left(\frac{۲۳}{۷}، \frac{۳}{۷} \right) - لا + لا + ما = \frac{۲}{۷}$$

$$۹۸ - (۱) لا - ۱ = (۲) لا + ۱ = (۳) لا + ما - ل + م + ۱ =$$

$$(۴) لا - ما - لا - ۲ = ۶، (۵) لا - ما - لا - ۳ = ۸، (۶) لا + ما - لا - ۲ = ۶$$

$$۹۹ - (۱) لا = \frac{۱}{۲} (لا - ۳) ، م = \frac{۱}{۲} (لا + ۳)$$

$$(۲) لا = -\frac{۱}{۲} (لا - ۶) ، م = -\frac{۱}{۲} (لا + ۶)$$

$$۱۰۰ - لا = \frac{۱}{۵} (۲ - لا - ۶) ، م = \frac{۱}{۵} (لا + ۲)$$

$$لا = \frac{۱}{۵} (۲ + لا + ۶) ، م = \frac{۱}{۵} (-۲ + لا + ۶)$$

$$۱۰۱ - لا = ۳ ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا$$

$$۱۰۴ - لا = ۸ ، لا = ۸ - لا ، لا = ۸ - لا ، لا = ۸ - لا ، لا = ۸ - لا$$

$$۱۰۶ - لا = ۳ ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا$$

$$۱۰۷ - لا = ۳ ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا$$

$$۱۱۰ - لا = ۲ ، لا = ۲ - لا ، لا = ۲ - لا ، لا = ۲ - لا ، لا = ۲ - لا$$

$$۱۱۲ - لا = ۳ ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا$$

$$۱۱۳ - لا = ۳ ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا$$

$$۱۱۴ - لا = ۳ ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا$$

$$۱۱۵ - لا = ۳ ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا$$

$$۱۱۸ - لا = ۳ ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا$$

$$۱۱۹ - لا = ۳ ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا$$

خیال ہیں

$$۱۲۱ - لا = ۳ ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا$$

$$۱۲۲ - لا = ۳ ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا ، لا = ۳ - لا$$

$$۱۲۳ - \frac{۸۵}{۳۶} - ۱ - \frac{۵}{۴} = ۱۲۴ - ۱۲ - ۶۳ + ۳۰ = ۳۰ + ۳ - ۶۳ + ۱۲ = ۷$$

$$۱۲۵ - \left(\frac{۱}{ج} \cdot \frac{۱}{ج}\right) \text{ میں سے گذرتا ہے جہاں ج مستقل ہے}$$

$$۱۲۶ - (۳'۷) = ۱۲۹ - ۱۲ = ۱۱۷ = \frac{۱}{۵} (۱۳ - ۶۳) = ۱۱۷ = \frac{۱}{۵} (۳۰ + ۶۳)$$

$$۱۳۱ - ۱۲ - ۶۳ = ۱۱۷ = \frac{۱}{۲۷} \cdot ۱۱۷ = ۱ = ۱ + ۰ = ۱ = \frac{۱}{۵}$$

$$۱۳۳ - \frac{۱}{۲۷} - \frac{۳}{۵} - ۲ = ۱۱۷ = \frac{۱}{۲۷} - \frac{۳}{۵} - ۲ = ۱۱۷ = \frac{۱}{۵}$$

۱۳۳۔ اگر ارب، ب ج کے طول ن اور ق ہوں اور زاویہ

ب د د' عہ ہو تو راج کی مساوات ہے طہ = مس ا ق جب عہ

اور ب د ہے {ن جب طہ - ق جب (طہ - عہ) = ن ق جب عہ

$$۱۳۴ - \frac{۱}{۲۲۳} - ۱۳۵ - \frac{۱}{۲۲۳} = ۱۱۷ = \frac{۱}{۲۲۳} - ۱۳۵ - \frac{۱}{۲۲۳} = ۱۱۷ = \frac{۱}{۲۲۳}$$

$$۱۳۷ - \frac{۱}{۲۲۳} - ۱۳۵ - \frac{۱}{۲۲۳} = ۱۱۷ = \frac{۱}{۲۲۳} - ۱۳۵ - \frac{۱}{۲۲۳} = ۱۱۷ = \frac{۱}{۲۲۳}$$

۱۳۹۔ ایک ایسا خط مستقیم جو ثابت خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

۱۴۰۔ اگر د قاعدہ ہو اور عہ قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق اور قاعدہ کو محور لا مانا جائے تو اس کا طریق ہے لا + ما - لا - و امام عہ = ۰۔

آزمائشی پرچہ صفحہ ۷

۱۔ لا + ما - و امام د = $\frac{۱}{۴}$ اور جہل قاعدہ کو محور لا مانا گیا ہے اور اس کا وسطی نقطہ مبدأ ہے۔

۲- (۱) خط مستقیم جو ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ ۱۵۰° بناتا ہے اور قطب سے فاصلہ ۱۰۲ ہے۔
 (۲) خط مستقیم جو ابتدائی خط کے متوازی ہے اور اس سے فاصلہ ۱ پر واقع ہے۔

$$۳- \frac{ج}{ج} \quad ۴- ۱۰ + ۷ = ۱۷ \quad ۱۳ + ۸ = ۲۱$$

$$۵- \frac{۱۵}{۱۵} \quad ۷- لا + ۲ = ۱۲ \quad لا + ۳ = ۱۵ \quad لا = ۱۲$$

$$۹- ارجب ۱۵ سے ۲۰ لا + ۲ جب سے (۷- ورجم سے) لا + ۱۰ (۲ ورجم سے) ۲۰ ورجم سے جب (۱۵-)$$

جوابات حصہ دوم

باب اول (صفحات ۱ تا ۷)

$$۲- (ا) لا + ۲ = لا - ۲ = ۴ \quad (ب) لا + ۲ = لا + ۲ + ۳ = ۷ \quad (ج) لا + ۲ = ۲ = ۰$$

$$۳- (ا) (۲، ۲) ۳ (ب) (۸، ۸) ۱۰ (ج) (۱، ۱) ۱ (د) (۱، ۱) (ج) (۱، ۱) کے ملانے والے خط کا نقطہ تنصیف، نصف قطر = نقطوں کے درمیانی فاصلہ کا نصف$$

$$(ع) (۱، ۰) ۱$$

$$۴- ۴۰، (۲، ۱) ۳$$

$$۵- \frac{۱۰ + ۲۰ جب سے}{۱۰ + ۲۰ جب سے} = \frac{۲۰ + ۲۰ جب سے}{۲۰ + ۲۰ جب سے}$$

$$۶- (ا) لا + ۷ = لا - ۳۹ = ۱۵ + ۳۲ = ۴۷ \quad لا + ۲ = ۲۵$$

$$(ب) لا + ۲ = لا - ۷ = ۱۵ + ۳۲ = ۴۷ \quad لا + ۲ = ۲۵$$

$$(ج) لا + ۲ = ۱۲ + (لا + ۲) = ۳۴ = لا + ۲ = ۲۵$$

$$(د) لا + ۲ = (۱ + ۲) + (لا + ۲) = ۲ + ۲ = لا + ۲ = ۲۵$$

$$۷- (د) لا^۲ + ما^۲ - لا^۲ = ب^۲ =$$

$$(ب) لا^۲ + ما^۲ - لا^۲ = ۲ = ۲ک = ف^۲ + ق^۲ - ۲ = ۲ک = ق$$

$$۸- لا^۲ + ما^۲ - لا^۲ = ۰ = (۰، ۰) \left(\frac{۲}{۳}، \frac{۱}{۳} \right)$$

$$۹- (لا-۲) + (۲+ما) = ۰ = (۰، ۰)$$

$$۱۱- لا^۲ + ما^۲ - لا^۲ = ۲۰ = ۲۰ = (۱، ۲) = ۵$$

$$۱۲- (د) (۳، \frac{۱}{۵} \pi) = ۵ (ب) (۲، \frac{\pi}{۴}) = ۳$$

$$۱۳- ۱۳ = ۱۳ - لا^۲ + ما^۲ = ۱۳ - لا^۲ + ما^۲ = ۱۳ = ۱۳$$

$$۱۶- ۱۶ = ۱۶ - لا^۲ + ما^۲ = ۱۶ - لا^۲ + ما^۲ = ۱۶ = ۱۶$$

$$۲۳- ۲۳ = ۲۳ - لا^۲ + ما^۲ = ۲۳ - لا^۲ + ما^۲ = ۲۳ = ۲۳$$

$$۲۵- (۰، ۰) = (۰، ۰) = (۰، ۰) = ۱۰ = لا^۲ + ما^۲ = ۱۰$$

$$۲۸- (۱، ۱) = (۱، ۱) = (۱، ۱) = ۲۸ = لا^۲ + ما^۲ = ۲۸$$

$$۳۰- ۳۰ = ۳۰ - لا^۲ + ما^۲ = ۳۰ - لا^۲ + ما^۲ = ۳۰ = ۳۰$$

$$۳۲- (۲، ۲) = (۲، ۲) = (۲، ۲) = ۳۲ = لا^۲ + ما^۲ = ۳۲$$

$$(ج) ۵ - لا^۲ + ما^۲ = ۱۲ = ۱۲$$

$$۳۳- (ب) لا^۲ + ما^۲ = (ج) لا^۲ + ما^۲ = (ج) لا^۲ + ما^۲ = ۰ = ۰$$

$$۳۵- \left(\frac{۲۵}{۱۳}، \frac{۶۰}{۱۳} \right) = \left(\frac{۲۵}{۱۳}، \frac{۶۰}{۱۳} \right) = \left(\frac{۲۵}{۱۳}، \frac{۶۰}{۱۳} \right)$$

$$۳۶- لا^۲ + ما^۲ = ب^۲ = ۰$$

$$۳۷- \left(\frac{۹}{۵} \pm \frac{۱۲}{۵} \right) = ۱۵ = ۱۵ = لا^۲ + ما^۲ = ۱۵ = ۱۵$$

$$۳۹- لا^۲ + ما^۲ + ۲ = ۵ = ۵ = لا^۲ + ما^۲ + ۲ = ۵ = ۵$$

$$۴۰- ۴۰ = ۴۰ - لا^۲ + ما^۲ = ۴۰ - لا^۲ + ما^۲ = ۴۰ = ۴۰$$

$$۴۵- لا^۲ + ما^۲ + ۲ = ۱۰ = ۱۰ = لا^۲ + ما^۲ + ۲ = ۱۰ = ۱۰$$

$$۴۶- ب^۲ = لا^۲ + ما^۲ = ۲ = ۲$$

۴۲۔ $\text{لا} + \text{ما} + ۲$ گسر ج۔ ج گسر لا + ۲ $\text{فسر ج۔ ج فسر لا} = \text{ما}$

۴۴۔ بنیادی محور کو محور لا مانو اور اس کے وسطی نقطہ کو مبدا، اگر دائروں کے تقاطع تقاطع کے درمیان بنیادی محور کا طول ۲ ج ہو اور معلومہ سمت کا تماس محور لا کے ساتھ ہو تو طریق مطلوب ہے لا۔ لا۔ ج = ۲ ص لا ما

آزمائشی پرچہ ۱ (صفحہ ۴۲)

- ۱۔ لا + ما = لا
۵۔ $\frac{۲۵}{۱۳}$ ، $\frac{۳}{۱۳}$
۶۔ لا (۱ + جم عہ) یا۔ لا (۱ - جم عہ)
۸۔ دائرہ ر = لم جم (طہ - عہ) جہاں لم اور عہ دائرہ معلومہ کے مرکز کے قطبی محدود ہیں۔

باب سوم

(صفحات ۴۸ - ۶۲)

- ۲۔ (۱) ۲ لا (۲) ۷ (۳) $\frac{۱}{۲}$
۳۔ لا = ۱۲ لا
۱۰۔ $\frac{۱}{۲}$
۱۲۔ لا (۳ - ۱) = ۲ اور مرتب لا + ۲ = ۵
۱۳۔ لا (۲ - ۱) = ۵
۱۷۔ لا (۱) (۳ - ۱) (۳ - ۱) لا = $\frac{۱}{۲}$
۱۸۔ لا = ۱۲ لا
۱۹۔ لا = ۱۲ لا + ۱۲ لا + ۱۲ لا + ۱۲ لا = ۴۸

- ۲۰۔ $۲۶'۲ - ۲۱ - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$
 ۲۲۔ $\frac{5}{4} - ۲'۲$ محور $۲ = ۲$ ، رأس پر کا ماس $۲ لا + ۵ = ۵$ ۔
 ۲۳۔ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے $(لا - \frac{1}{4}) = ۲ = ب (۱ + \frac{1}{4})$
 ۲۵۔ $(۱ - ۱)' (۱ - ۱)' (\frac{3}{4} - ۱)' ۲ + ۵ = ۵$ ۔
 ۲۷۔ $لا - ۲ لا + ۱ + ۱ = ۱۸$ ۔
 ۲۸۔ $۲۶۲ - ۲۹ - \frac{1}{4} (۱۱ \pm ۱۸) \pm (۵ \pm ۵)$
 ۳۰۔ $ج = م + ب + \frac{1}{4}$
 ۳۲۔ نقطے ہیں $\frac{1}{4} (-۵ \pm ۲ - ۱)$ پس نقطے خیالی ہیں۔
 ۳۳۔ $\frac{11}{4} - \frac{1}{4} - ۳۲ - ۳۸ - ۳۵ - ۳۲ (۳۱ \pm ۲)$
 ۴۰۔ $لا + ۲ لا + ۱ - ۲ - لا - ۲ = ۲ + ۱۲ = ۱۴$ ۔
 ۴۱۔ $لا + ۲ لا + ۱ - لا - ۲ = ۲ + ۱۲ = ۱۴$ ۔

آزمائشی پرچہ ۱ (صفحہ ۶۲)

- ۱۔ دفعہ ۱، گ = ۲، وج (ب ج + ۲) = ۲
 ۲۔ $\frac{لا}{ب} = \frac{لا}{ب}$ یا $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ا جہاں ا = ب = ۲$ وج = ۲
 ۳۔ $\frac{1}{4}$ سن ' $\left\{ \frac{۲}{ب-۱} \right\}$ ' $و + ب = ۲$
 ۴۔ دفعہ ۳۶
 ۶۔ (۱) $۲ - ۱۴ = ۱۲$ ۔ (۲) $(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}) (\frac{3}{4} - \frac{1}{4}) (\frac{3}{4} - \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
 ۷۔ $لا - ۲ لا + ۱ + ۱ = ۱۸$ ۔
 ۸۔ $۲ - ۲ = ۰$
 ۹۔ دفعہ ۵۲

$$۳۰ - \frac{۲}{۱۵} + \frac{۲}{۹} = ۱ \quad ۳۱ - \frac{۲}{۵} = ۱۲ \quad \frac{۱}{۵}$$

$$۳۲ - ج = \sqrt{\frac{۱}{۲}} \pm \sqrt{\frac{۱}{۲}} \quad \sqrt{\frac{۱}{۲}} \pm \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۲}} \pm \sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

$$۳۳ - ۱ = \frac{۱}{۵} \pm \frac{۱}{۵}$$

$$۳۴ - \frac{۱}{۵} \pm \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۵} \pm \frac{۱}{۵}$$

$$۳۵ - \frac{۱}{۵} \pm \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۵} \pm \frac{۱}{۵}$$

$$۳۸ - \left(\frac{۲}{۵}, \frac{۲}{۵}\right) \quad ۳۱ - \frac{۲}{۵} = ۱ \quad \left(\frac{۲}{۵}, \frac{۲}{۵}\right)$$

۳۳ - دوسرا، دونوں

$$۳۷ - (۱) \frac{۱}{۵} \pm \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۵} \pm \frac{۱}{۵} \quad (۲) \text{ دائرہ، خروج مرکز } = ۰, \text{ ماسکے مرکز } \left(\frac{۵}{۸}, ۰\right) \text{ پر، مرتب}$$

لائتہا ہی پر۔

۳۸ - ثابت خطوط کو محور مانو، سلاخ کا میلان محور کے ساتھ طہ فرض کرو۔ اگر 'ب' سلاخ کے حصوں کے طول ہوں تو لا = رجم طہ،
 ما = ب جب طہ، طہ کو ساقط کرو۔

$$۳۹ - (۰) \frac{۱}{۵} \pm \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۵} \pm \frac{۱}{۵} \quad \text{لاجم عہ + ماجب عہ} = \text{ع} = \frac{۱}{۵} \pm \frac{۱}{۵}$$

$$۵۰ - ۲ \frac{۱}{۵} - ۲ \frac{۱}{۵} + ۲ \frac{۱}{۵} - ۲ \frac{۱}{۵} = ۱ \quad (۱) \frac{۱}{۵} = ۱$$

$$۵۱ - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵}$$

باب پنجم (صفحات ۸۶ - ۱۱۳)

$$۱ - ۲ \frac{۱}{۵} - ۲ \frac{۱}{۵} + ۲ \frac{۱}{۵} - ۲ \frac{۱}{۵} = ۱ \quad ۳ - ۳ \frac{۱}{۵} - ۳ \frac{۱}{۵} + ۳ \frac{۱}{۵} = ۱$$

$$۳۵ - (۳ - لا - ما + ۱) (لا + ما) = ۶ - ۳۶ - لا (۳ - ما) + ۱ - ۳۱ -$$

$$۳۷ - (لا + ما + ۲) (۴ - لا - ما) = ۳۶ + ۴ - لا (۳ - ما) -$$

۳۸ - محور متقاربوں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں، لا + ۲ لا - ما =

$$۳۹ - \frac{لا - ما}{۱ - ب} = \frac{لا - ما}{۱ - ب} = ۴۰ - لا + ۲ لا - ما - ۳ لا + ۳ ما =$$

بائنفسٹم

(صفحات ۱۳۹ - ۱۴۶)

۱ - مرکز (۱، ۱) - محور اعظم کی مساوات بجاظ نئے مرکز کے لا - ما = ہے -

نصف محوروں کے طول ۱۵ اور ۱۵ یا ۲۵۲۲ اور ۱۵۲۹ ہیں -

ولا پر مقطوع = ۱۵۸۲ اور ۱۵۸۲ = ۱۵۸۲ اور وما پر = ۱۵۸۲ اور ۱۵۸۲ -

۲ - مرکز (۱۳/۵، ۹/۵) - محور اعظم لا = ۲ - نصف محوروں کے طول

۱۵/۳ اور ۱۵/۳ یا ۲۵۲۲ اور ۱۵۸۹، ولا اور وما پر مقطوع

خیالی، لا = ۲ پر مقطوع ۲۵۳۸ یا ۲۸۵

۳ - مرکز (۱، ۳) - محور اعظم لا = ۰ ہے - نصف محوروں کے طول

۱۵ اور ۱۵ یا ۲۵۲۲ اور ۱۵۸۲ ہیں - ولا پر مقطوع خیالی ہیں،

وما پر مقطوع = ۱۵۵۸ اور ۱۵۵۲ -

۴ - مرکز (۲/۵، ۴/۵) - محور اعظم لا + ۳ ما = ۰ ہے - نصف محوروں

کے طول ۱۵ اور ۱۵۳ ہیں - ولا پر مقطوع خیالی ہیں، وما

پر مقطوع = ۲۵۲۲ اور ۱۵۹ -

۵ - مرکز (۱، ۱) - محور اعظم لا + ۳ ما = ۰، نصف محوروں کے طول

۲۵۴۹ اور ۱۵۷۶ ہیں - ولا پر مقطوع ۳۵۲۷، ۳۷۷۳ ہیں

اور وما پر = ۲۵۸۰، ۱۵۹ -

۶- مرکز (۲۶۰) - محور اعظم ہے $۲۶۰ = ۱۸۰ + ۸۰ = ۰$ ، نصف محوروں کے طول ہیں ۱۸۰ - ولا پر مقطوعے $۲۶۸۳ = ۱۹۴۰$ - بنی و ما کوس کرتا ہے $۸۰ = ۲$ پر -

۷- مرکز (۰۰) - محور اعظم ہے $۱۸۰ = ۰$ ، نصف محوروں کے طول ۳۶۴ اور ۲ ہیں - ولا پر مقطوعے $۲۶۴۵ = \pm$ اور و ما پر $۲۶۴۵ = \pm$

۸- (ا) $۱۸۰ = ۰$ ، $۱۸۰ = ۲$ - (ب) $۱۸۰ = ۱$ ، $۱۸۰ = ۳$ - (ج) $۱۸۰ = ۴$ ، $۱۸۰ = ۳$ - (د) $۱۸۰ = ۲$ ، $۱۸۰ = ۱$

۹- مرکز (۰۰) - محور اعظم $۱۸۰ = ۰$ ، نصف محوروں کے طول ۱۶۴۱ اور ۸۲ ہیں، ولا پر مقطوعے ہیں ± ۱ اور و ما پر ± ۱

باب ہشتم

(صفحات ۱۴۷-۱۵۳)

مفصلہ ذیل میں (ا) مرکز کے محدد ہیں (ب) قاطع اور مزدوج محوروں کی مساواتیں ہیں جبکہ مرکز مبدا ہو (ج) نصف محوروں کے طول ہیں (د) متقاربوں کی مساواتیں ہیں جبکہ مرکز مبدا ہو (ع) ولا پر کے مقطوعے (ف) و ما پر کے مقطوعے ہیں

۱- (ا) $۲ - ۱ = ۰$ (ب) $۳ + ۲ = ۰$ ، $۲ - ۳ = ۰$ (ج) $۲ - ۱ = ۰$ (د) $۸ - ۶ = ۰$ ، $۷ - ۴ = ۰$ (ع) $۱۵۶۹ - ۳۴ = ۰$ (ف) $۲۵۷ - ۱۴۵ = ۰$

۲- (ا) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = ۰$ (ب) $۱۸۰ = ۰$ ، $۱۸۰ = ۰$ (ج) $۱۶۳ - ۹۴ = ۰$ (د) $۳۶۴ - ۱۸۰ = ۰$ ، $۲۶۴ - ۱۸۰ = ۰$ (ع) $۲۶۱۶ - ۱۶۱۶ = ۰$ (ف) $۲۶۱۶ - ۱۶۱۶ = ۰$

۳- (ا) $۱ - ۱ = ۰$ (ب) $۳ - ۲ = ۰$ ، $۲ - ۳ = ۰$

- (ج) $۱۵۸'۱۷۱$ (د) $۳۵۳۲۵ + ۳۰۹'۶ - ۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$
 (ع) $۱۵۱'۱۵۱ - ۹۱۵۱$ (ف) $۱۵۱'۱۵۱$ (ج) $۱۵۱'۱۵۱$
 ۴- (د) $۱۵۱'۱۵۱$ (ب) $۳۰۹'۶ + ۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$ (ج) $۳۰۹'۶$
 (ج) $۱۵۱'۱۵۱$ (د) $۳۰۹'۶ + ۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$ (ج) $۳۰۹'۶$
 (ع) $۲۵۸'۱۷۱ - ۱۵۱'۱۵۱$ (ف) $۳۰۹'۶$
 ۵- (د) $۱۵۱'۱۵۱$ (ب) $۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$
 (ج) $۳۰۹'۶$ یا $۳۰۹'۶$ (د) $۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$ (ج) $۳۰۹'۶$
 (ع) $۳۰۹'۶ - ۲۵۸'۱۷۱$ (ف) خیالی
 ۶- (د) $۳۰۹'۶ - \frac{۳۰۹'۶}{۲}$ (ب) $۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$
 (ج) $۳۰۹'۶$ یا $۳۰۹'۶$ (د) $۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$ (ج) $۳۰۹'۶$
 (ع) $۳۰۹'۶ - ۲۵۸'۱۷۱$ (ف) خیالی
 ۷- (د) $۳۰۹'۶$ (ب) $۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$ (ج) $۳۰۹'۶$
 (ج) $۳۰۹'۶$ (د) $۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$ (ج) $۳۰۹'۶$
 (ع) $۳۰۹'۶ \pm ۳۰۹'۶$ (ف) خیالی
 ۸- (د) $۳۰۹'۶$ (ب) $۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$ (ج) $۳۰۹'۶$
 (ج) $۳۰۹'۶$ (د) $۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$ (ج) $۳۰۹'۶$
 (ع) (لاستناہی) (ف) $۳۰۹'۶ \pm ۳۰۹'۶$
 ۹- (د) $۳۰۹'۶ - \frac{۳۰۹'۶}{۲}$ (ب) $۳۰۹'۶$ یا $۳۰۹'۶$
 (ج) $۳۰۹'۶ + \frac{۳۰۹'۶}{۲}$ (ف) $۳۰۹'۶$ یا $۳۰۹'۶$
 (د) $۳۰۹'۶ = ۳۰۹'۶$ (ج) $۳۰۹'۶$ یا $۳۰۹'۶$
 (ع) $۳۰۹'۶ + ۳۰۹'۶$ (ف) $۳۰۹'۶$ یا $۳۰۹'۶$

باب نہم

(صفحات ۱۵۴-۱۶۳)

$$\begin{aligned} ۱-۶ &= ۲+۳' \quad ۲-۶۲=۱-۳۵+۲' \\ ۳-۲ &= ۱-۳۵+۲' \quad ۴-۶=۱+۳' \\ ۵-۱ &= ۱+۳' \quad ۶-۱=۳+۵-۲' \end{aligned}$$

$$۷-۱'۱'۳' \quad ۸-۳'۲' \quad ۹-۲'۱'۵'$$

۸- دو متوازی خطوط مستقیم $۱+۳=۲ \pm$

۹- $۱+۳=۱$ لا $۲+۴=۱$

۱۰- دو خطوط مستقیم $۱+۳=۱$ کے متوازی

۱۱- دو منطبق خطوط مستقیم

باب دہم

(صفحات ۱۶۴-۱۶۸)

۲- $۲-۱=۳+۲' \quad ۳-۱=۲+۵-۲'$

۳- $۱-۳=۲+۵-۲' \quad ۲-۱=۳+۵-۲'$

۴- $۱+۳=۱$ لا $۲+۴=۱$

۵- $۱+۳=۱$ لا $۲+۴=۱$

۶- $۱+۳=۱$ لا $۲+۴=۱$

باب یازدہم (صفحات ۱۶۹-۱۸۵)

۱- خطوط مستقیم کا جوڑا $۱+۳=۲$ لا $۲+۴=۱$

نقطہ $(\frac{13}{14}, \frac{20}{14})$ میں سے گزرتا ہے۔

۲۔ ناقص جس کا مرکز مبدأ ہے۔ نصف محور ۴، ۹ اور ۴۔ محوروں کی مساواتیں لا۔ $۲۰ = ۲۰ + ۲۰ = ۲۰$ ، ولا پر مقطوعے $۲۰ = ۲۰ + ۲۰$ ، وما پر مقطوعے $۲۰ = ۲۰ + ۲۰$

۳۔ مکانی، محور ۳ لا۔ $۲۰ = ۲۰ + ۲۰ = ۲۰$ ، رأس پر کا ماس ۲ لا۔ $۲۰ = ۲۰ + ۲۰ = ۲۰$ ، وتر خاص = ۱۶۔ منحنی ماس کے اُس جانب واقع ہے جس جانب کہ مبدأ نہیں ہے۔ ولا پر مقطوعے = ۱۶، ۱۶، ۱۶، وما پر مقطوعے خیالی ہیں۔ منحنی $(۱۶، ۲)$ ، $(۲، ۲)$ میں سے گزرتا ہے۔

۴۔ ناقص جس کا محور اعظم ۲ لا۔ $۱ = ۱$ ۔ ہے اور محور اصغر لا۔ $۲ = ۲$ ۔ نصف محوروں کے طول $\frac{1}{2}$ ہیں، ولا پر مقطوعے ۱۶، ۱۶، ۱۶ اور وما پر ۳، ۵۔

۵۔ قائم زاؤہ مرکز $(\frac{13}{14}, \frac{39}{14})$ ، اصلی محور ۳، ۶ لا۔ $۱ = ۱$ ۔ کے متوازی ہے

نیم محوروں کے طول = ۸۹، متقارب ان خطوط کے متوازی۔ $۱۶ = ۱۶ + ۱۶ = ۱۶$ ، ولا پر مقطوعے ۳، ۳، ۳ اور وما پر ۳، ۳، ۳۔

۶۔ قائم زاؤہ جس کے متقارب لا۔ $۱ = ۱$ ۔ لا۔ $۲ = ۲$ ۔ ہیں۔ مرکز (۱، ۱)۔ منحنی کی ایک شاخ دونوں متقاربوں کے اُس طرف واقع ہے جس طرف کہ مبدأ ہے۔ نیم قاطع محور = $\frac{1}{2}$ ، نیم مزدوج محور = $\frac{1}{2}$ ۔ ولا پر کا مقطوعہ خیالی ہے اور وما پر = ۲، ۲، ۲، منحنی نقاط $(۲، ۲)$ ، $(۲، ۲)$ ، $(۲، ۲)$ ، $(۲، ۲)$ ، $(۲، ۲)$ میں سے گزرتا ہے۔

۷۔ زاؤہ جس کا مرکز مبدأ ہے اور ۳ لا۔ $۵ = ۵$ ۔ قاطع محور ہے۔ نیم قاطع محور = $\frac{1}{2}$ ، نیم مزدوج محور = $\frac{1}{2}$ ۔ متقارب ہیں

۱۲۔ دو خطوط مستقیم ۲ لا + ۵ = ۷، ۲ لا - ۳ = ۵۔ جو ایک

ایک دوسرے کو نقطہ $(-\frac{2}{11}, \frac{14}{11})$ پر قطع کرتے ہیں۔ ولا پر مقطوعے

$= -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}$ اور و ما پر $= \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$ ۔

۱۳۔ مکانی محور لا + ۱ = ۱، رأس پر کا ماس ۳ + ۲ = ۲، وتر خاص

= ۳، منحنی اور مبدأ رأس پر کے ماس کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

ولا پر مقطوعے خیالی ہیں اور و ما پر = ۱، منحنی نقاط $(-۲، ۳)$ ،

$(۲، -۱)$ میں سے گذرتا ہے۔

۱۴۔ مکانی محور ۲ لا - ۳ + ۱ = ۱، رأس پر کا ماس ۳ لا + ۲ - ۲۸ = ۲۳،

وتر خاص = ۲۵، منحنی اور مبدأ رأس پر کے ماس کے ایک ہی جانب

واقع ہیں، ولا پر مقطوعے = ۱۸۷، ۱۳، و ما پر = ۳۳، منحنی

نقاط $(-۱، -۱)$ ، $(۱، -۱)$ ، $(۱، ۳۳)$ ، $(۲، -۱۹۴)$ ، $(-۲، ۱۰۶)$ میں سے

گذرتا ہے۔

۱۵۔ زائید مرکز $(-۱، ۰)$ اور محور ۱۵۶ لا - ۱۱۶۲ + ۱ = ۱، ۱۵۶۲ لا + ۱۱۶۲ + ۱ = ۱،

نیم قاطع محور = ۷۹، نیم مزدوج محور = ۱۵۲، متقارب ہیں = ۱،

ولا پر مقطوعے = ۲، و ما پر = ۱۴، ۱۴، ۱۴، ۱۴،

منحنی نقاط $(۱، -۱۴)$ ، $(۱، ۱۴)$ ، $(۲، -۱۴)$ ، $(۲، ۱۴)$ ،

$(-۱، ۱)$ ، $(۲، ۱۴)$ ، $(۲، -۱۴)$ میں سے گذرتا ہے۔

۱۶۔ زائید مرکز $(۱، ۱۴)$ ، محور ۲ لا + ۱ = ۱، لا - ۲ + ۳ = ۳،

نیم قاطع محور کا طول = ۲، نیم مزدوج محور کا طول = ۱، متقارب ہیں

۸ لا - ۳ = ۳، لا + ۱ = ۹، ولا پر مقطوعے خیالی ہیں

اور و ما پر = ۵۶، ۱۴، ۱۴، منحنی نقاط $(۱، ۱۴)$ ، $(۱، -۱۴)$ ،

$(۱۹، ۵۸)$ ، $(۲، -۱۴)$ ، $(۲، ۱۴)$ ، $(۱، -۱۴)$ ، $(۱، ۱۴)$ ،

$(۲، ۱۴)$ ، $(۲، -۱۴)$ میں سے گذرتا ہے۔

۱۷۔ مکانی جس کا محور $۲ + ۲ = ۰$ ہے اور رأس پر کا ماس $۱ - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ وتر خاص $۶ =$ منحنی رأس پر کے ماس کے اس جانب واقع ہے جس جانب

کہ مبدا ہے۔ ولا پر مقطوعے $== \frac{1}{4}$ و ما پر $== ۱ - ۳$

۱۸۔ زائد متقارب $۴ - ۱۲ = ۱۲ + ۱۲ = ۰$ لا $۱۲ + ۱۲ = ۰$ مرکز $(\frac{24}{11}, \frac{24}{11})$

مبدا اور منحنی متقاربوں کے ایک ہی زاویہ میں واقع ہیں۔ ولا پر مقطوعے ہیں
۱۲۔ ۱۲ اور و ما پر ۱۵ منحنی نقاط $(۲, ۲۱۶۹۷۷)$ $(۲, ۱۶۷۷)$ $(۵, ۲۱۶۹۷۷)$

$(۵, ۳۴۳)$ $(۲, ۹۶۲۲)$ $(۲, ۲۶۹)$ $(۵, ۱۰۶۹)$ $(۵, ۳۴۳)$ میں سے گذرتا ہے۔

۱۹۔ دو خطوط مستقیم لا $۱ + ۱ = ۰$ لا $۱ + ۱ = ۰$ جو ایک دوسرے کو نقطہ $(۲, ۱)$ پر قطع کرتے ہیں۔

۲۰۔ مکانی، محور $۲ - ۱۲ = ۱۲ + ۱۲ = ۰$ رأس پر کا ماس $۳ - ۱۲ = ۱۲ + ۱۲ = ۰$

وتر خاص $== \frac{1}{13}$ منحنی رأس پر کے ماس کے مبدا والی جانب

واقع ہے۔ ولا پر مقطوعے ہیں۔ ۳۲۵ اور و ما پر ۲۵۸۹ منحنی نقاط

$(۲, ۱۶۷۷)$ $(۲, ۱۶۷۷)$ $(۵, ۲۱۶۹۷۷)$ میں سے گذرتا ہے۔

۳۱۔ دائرہ مرکز $(۵, ۳)$ اور نصف قطر $۶ =$ ولا پر مقطوعے

$۳۲ = ۲۰ + ۱۲$ اور و ما پر $== ۳۲ + ۳۲$

۳۲۔ قائم زائد مرکز $(۴, ۱۶۷۷)$ محور $۳ - ۱۲ = ۱۲ + ۱۲ = ۰$ لا $۱۲ + ۱۲ = ۰$

نیم محور $== ۱۲ + ۱۲$ متقارب ہیں $۲ - ۱۲ = ۱۲ + ۱۲ = ۰$ ولا پر

مقطوعے خیالی ہیں اور و ما پر $== ۳۲۵ - ۳۵$ منحنی نقاط $(۱, ۲۱۶۹۷۷)$

$(۱, ۲۱۶۹۷۷)$ $(۲, ۲۱۶۹۷۷)$ $(۱, ۲۱۶۹۷۷)$ $(۱, ۲۱۶۹۷۷)$ میں سے گذرتا ہے۔

- ۲۳۔ دو متوازی خطوط مستقیم ۲-لا-۳-۳۵=، ۲-لا-۳-۳۵+۱۵=۱۵۵۔
 ولا پر مقطوعے = ۱۵۷-۱۵۷ اور و ما پر = ۱۵۵-۱۵۵
- ۲۴۔ مکانی، محور ۳+لا+۳-۳=، رأس پر کاماس ۸-لا-۶-۴=،
 وتر خاص = ۳، منحنی رأس پر کے ماس کے مبدأ والی جانب واقع ہے۔
 ولا پر مقطوعے ہیں ۲۶۹-۱۵۸، و ما پر = ۲۷۴-۸۷،
 منحنی نقاط (۱۷۶، ۱)، (۱۵۸-۱)، (۱۵۳۸-۲)، (۱۷۴-۲)، (۱۷۸۹-۲) (۳-۱۳۶)، (۳-۲۷۴) میں سے گذرتا ہے۔
- ۲۵۔ دو خطوط مستقیم ۵+لا+۳-۳=، ۳-لا-۷+۲= جو ایک دوسرے
 کو نقطہ (۱۳، ۱۹) پر قطع کرتے ہیں۔ ولا پر مقطوعے ہیں ۳-۲،
 اور و ما پر = ۳، ۲۔
- ۲۶۔ دو خیالی متوازی خطوط مستقیم ۲+لا+۶+۵=، ۲۳-
 ۲۷۔ ناقص، مرکز (۱۳، ۵)، محور ۲-لا-۳+۱=، ۳+لا+۱=،
 نیم محوروں کے طول = ۱، ۲، ولا پر مقطوعے = ۱۵۸، ۱۱۸ اور و ما پر
 = ۱۷۹-۱۷۹
- ۲۸۔ قائم زائد، متقارب ۲+لا+۳=، ۲-لا-۳=، مرکز (۱۳، ۱)،
 محور ۳+لا+۱=، ۳-۳=، نیم محوروں کے طول = ۳، ۴،
 ولا پر مقطوعے خیالی، و ما پر = ۱۷۵-۱۷۵، منحنی نقاط
 (۲-۱۷۵، ۲)، (۲-۱۷۵)، (۱۷۵-۳)، (۱۷۵-۳)، (۱۷۵-۳)، (۱۷۵-۳)،
 (۳-۱۷۵)، (۳-۱۷۵) میں سے گذرتا ہے۔
- ۲۹۔ مکانی، محور ۷+لا+۱=، رأس پر کاماس ۹-لا-۷+۱=،
 وتر خاص = ۱، ۸۸=، منحنی اور مبدأ رأس پر کے ماس کی متقابل
 جانبوں میں واقع ہیں۔ ر لا اور و ما پر مقطوعے خیالی ہیں، منحنی نقاط

- (۱۹۱) (۱۵۲) (۱۹۵) (۱۵۳) میں سے گذرتا ہے۔
 ۳۰۔ دو متوازی خطوط مستقیم لا + ۶۲ = ۱ + ۶۲ = ۶۳ + ۶۲ = ۱۲۵، ولا پر
 منقطع = ۱ - ۲ اور وما پر منقطع = ۱ - ۱
 ۳۱۔ قائم زائد، مرکز مبدا، محور ۱۵ لا + ۸ = ۸ لا - ۱۵ = ۱۰
 نصف محوروں کا طول = ۱، متعارف ہیں ۶ = ۲۳ لا، ۶ = ۲۳ لا
 ولا پر منقطع خیالی ہیں، وما پر = ۱، ۳۴ ±، منحنی نقاط (۱، ۳۴) (۳، ۴۷)
 (۱ - ۳) (۳، ۴۷) (۱ - ۴۵) (۱ - ۴۵) میں سے گذرتا ہے۔
 ۳۲۔ زائد مرکز (۱ - ۲) محور ۳ لا + ۶۲ = ۴ + ۶۲ = ۶۶ لا - ۳ = ۶۳
 نیم قاطع محور = ۱، نیم مزدوج محور = ۲، متعارف ہیں ۷ لا - ۴ = ۱ - ۱ = ۰
 لا - ۶۸ = ۱۵ = ۰ ولا پر منقطع = ۱۵، ۴۹ = ۱۵، ۳۴
 وما پر = ۳۵ = ۲۵۵، منحنی نقاط (۱ - ۲) (۱، ۱۹۴) (۱ - ۳) (۳، ۲۷)
 (۱ - ۳) (۳، ۲۷) (۱ - ۴۲) (۲ - ۴۲) (۲ - ۴۲) (۲ - ۴۲) میں سے گذرتا ہے۔
 ۳۳۔ ناقص، مرکز (۳۱۲ - ۳۱۲ - ۲ - ۳۱۲) یعنی (۱۹۶ - ۱۹۶) (۱۹۶ - ۱۹۶)
 محور لا + ۳۱۲ + ۶ = ۳۱۲ لا - ۸ = ۰، نصف محور = ۵ اور ۳
 ولا پر منقطع خیالی، وما پر = ۶، ۹۱ - ۶، ۹۹، منحنی نقاط
 (۲ - ۴) (۴، ۹۳) (۲ - ۱۵۶) (۱ - ۶۱۱) (۱ - ۱۱۲) (۱ - ۱۱۲)
 (۲ - ۴) (۴، ۹۳) (۲ - ۱۳۴) (۴ - ۸۲۱) (۴ - ۲۳۳) (۴ - ۲۳۳)
 (۲ - ۴) (۴، ۹۳) (۲ - ۱۳۴) (۴ - ۸۲۱) (۴ - ۲۳۳) (۴ - ۲۳۳) میں سے گذرتا ہے۔
 ۳۴۔ ناقص، مرکز (۱، ۱) محور لا - ۳۱۲ + ۶ = ۱ - ۳۱۲ = ۳۱۲ لا + ۶
 - (۳۱۲ + ۱) = ۰، نصف محوروں کے طول = ۳۱۲، ولا پر منقطع = ۲، ۴
 ۱ - ۴ اور وما پر منقطع = ۲، ۰۲ - ۳۱ - ۱
 ۳۵۔ ناقص، مرکز (۸، ۸) محور ۲، ۴ لا - ۶ = ۱۵، ۳۱۲ = ۰ اور

۴۱۴۔ ۵۔ لا + ما - ۳۱۲ = ۷۰۰، نیم محوروں کے طول = ۲۵۶، ۸۱۶ = ۲۵۶
 لاک کا محور لا = ۱۴ پر ماس ہے اور ما کا محور ما = ۷ پر ماس ہے۔
 ۳۶۔ ناقص، مرکز (۸، ۱)، محور ہیں (۲۱ + ۱) لا + ما - (۶ - ۲۱) = ۰
 اور لا - (۱ + ۲۱) ما + ۹ + ۲۱ = ۰، نیم محوروں کے طول = ۷، ۳۹ = ۷
 ۳۷۔ ۶۔ لا پر مقطوع خیالی ہیں، و ما پر = ۱۵۲، ۱۲۵، منحنی
 نقاط (۲، ۱۷)، (۳، ۱۴)، (۲، ۱۴)، (۱، ۱۴) میں سے گزرتا ہے۔
 ۳۷۔ ناقص، محور ۳ لا - ما + ۳ = ۰، لا + ما = ۰، مرکز (۹، ۳) = ۰
 نصف محوروں کے طول = ۱، ۲، لا پر مقطوع = ۰، ۵۴، ۲ = ۰ اور
 و ما پر مقطوع = ۰، ۲ = ۱۵۴

آزمائشی پرچہ ۳ (صفحہ ۱۸۵)

- ۱۔ دفات ۹۴ - ۹۲
- ۲۔ ۸۵ لا + ۳۰ لا + ما + ۴۵ = ۰، ۳۸ لا - ما + ۶۶ = ۰، ۳۵ = ۰
- اور ۴۵ لا - ۳۰ لا + ما + ۸۵ = ۰، ۱۲ لا - ما + ۱۱۶ = ۰، ۳۲۰ = ۰
- ۱۰۔ ۷ = ۰، ۱۰ = ۰، ۲ = ۰، ۲ = ۰، ۲ = ۰، ۲ = ۰، ۲ = ۰، ۲ = ۰

باب دوازدهم

(صفحات ۱۸۷ - ۲۲۷)

$$۳ - ۳ لا + ما - ۴ = ۰ \quad ۴ - لا + ما - ۳ = ۰ \quad ۵ - لا + ما - ۲ = ۰$$

$$۵ - لا = ۳، ۳ = ما = ۳۱۲، ۹ - (۱ - \frac{۱}{۵}) - (\frac{۵}{۳})$$

$$۱۳ - ۵ = ۰ اور مسن ۱ = \frac{۱}{۳} محور کے ساتھ - (۰، ۲) - (۱، ۰) - (۲، ۰)$$

$$۱۴ - خط ہے لا + ۵ = ۰، منحنی مکانی ہے، (۲، \frac{۳}{۲}) - (\frac{۳}{۲}, ۲)$$

$$۴۴ - \sqrt{۳۲} - لا = ۶ = \pm \sqrt{۳۲} \quad ۴۵ - \frac{۱}{۴} = \sqrt{۱۶} + ۳ = ب$$

$$۴۹ - و م + ۲ و ل ع + ب ع = .$$

$$۵۰ - (۱) - ۲۶۶ - ۶۲۱ \quad (۲) - ۳۵۲ - ۱۶ \quad (۳) - ۴۱۲ - ۱۵۹۸$$

$$۵۳ - لاجم طہ + ماحجب طہ = و (۱ + ججم طہ)$$

$$۵۴ - \frac{طہ طہ}{ق} = \frac{۱}{۴} (طہ + طہ)$$

$$۵۶ - (۱، ۲) \frac{۱}{۴} \sqrt{۲} \quad ۵۷ - ۴ - لا = ۲ و لا = و ن$$

$$۵۸ - مس = \frac{۱}{۴} \sqrt{۲}$$

$$۶۱ - جب و لا ب تو دو عمودی ماس نہیں کہیں سکتے۔$$

$$۶۲ - ۴ = \left(\frac{ق}{ق} + \frac{ق}{ق} + ۲ \right) و لا$$

$$۶۵ - \frac{۲ لا لا}{لا + لا} = \frac{۲ طہ طہ}{طہ + طہ}$$

$$۶۸ - لا = ۳ + ۹ = ۱۲ \quad (۲ - \frac{۱۵}{۲})$$

$$۷۵ - لا مس = ۴ + ۲ و لا (مس = ۲ + ۲) + و اس = ۷$$

باب سیمزدہم

(صفحات ۲۲۸ - ۲۵۸)

$$۱ - (۱) ۳ لا + ۶ + ۲ = ۱۱ \quad (۲) ۲ لا + ۶ + ۱ = ۱۱$$

$$۹ - ۲ (۱ + م م) + م م = ۱۱ - و ل + ب ب = ۱۱$$

$$۱۶ - ۱ = ۱۵ \pm \frac{ب}{۱} لا$$

$$۱۹ - ج = ۵۱، عود = \frac{۴}{۱۱}، جب = ۳۵ = \frac{۴}{۱۱}$$

$$۲۲ - ۱۸، ۲۵، ۲۵$$

$$۲۰ - ۳۱ \pm ۳۱، ۳۱$$

$$۲۳ - ۲۹، ۳۱، ۳۲$$

$$۲۵ - \frac{۱}{۴} لا - ۱ = ۱، ۳ لا - ۲ = ۱، ۲ لا + ۲ = ۱، ۲ لا + ۲ = ۱، ۲ لا + ۲ = ۱$$

$$۱۱ + ۱۱ = ۲۲$$

$$۲۶ - لا + ۲ لا - ۱ = ۱، ۲ لا + ۲ لا - ۱ = ۱، ۲ لا + ۲ لا - ۱ = ۱$$

$$۳۱ - ۵۲، ۵۴$$

$$۲۸ - ۳۱ + ۱ = ۱$$

$$۳۲ - ج = ۲۱، ج = \frac{۱}{۴}، جب = \left(\frac{۱}{۴}\right)$$

$$۳۳ - ۱ = ۳۲، \left(\frac{۳}{۴}\right) = ۳۲ - ۱ = ۳۲، \left(\frac{۳}{۴}\right) = ۳۲ - ۱ = ۳۲$$

$$۳۶ - ۲ + ۱ = ۳۵$$

$$۳۸ - لا + ۲ لا + ۲ = ۳۸ - ج = ۳۸$$

$$۴۰ - (ج = ۲۱) (ج = ۲۱) (ج = ۲۱) (ج = ۲۱) (ج = ۲۱)$$

$$۴۱ - (ج = ۲۱) (ج = ۲۱) (ج = ۲۱) (ج = ۲۱) (ج = ۲۱)$$

$$۴۲ - ۱ + ۲ = ۴۱، ۴۲ - ۱ + ۲ = ۴۱، ۴۲ - ۱ + ۲ = ۴۱$$

$$۴۴ - ۱ + ۲ = ۴۳$$

$$۴۵ - لا + ۱ = ۴۴$$

$$۴۶ - ۱ + ۲ = ۴۵، ۴۶ - ۱ + ۲ = ۴۵، ۴۶ - ۱ + ۲ = ۴۵$$

$$۴۸ - لا + ۲ = ۴۷، لا + ۲ = ۴۷، لا + ۲ = ۴۷$$

ان تمام خطوط کی جو معلومہ متوازی خطوط مستقیم کو طائیں ایک ایسا خط تصنیف کرتا ہے جو ان معلومہ خطوط کے متوازی ہو اور ان کے عین درمیان میں

$$۲۴- \text{وگ} / (\text{و-ب}) \pm \text{ب} / (\text{و-ب}) - \text{وگ} / (\text{و-ب})$$

$$۲۵- \text{لا} (۱- \frac{۲}{۳}) \text{ ما} (۱- \frac{۲}{۳}) \text{ ب} (۱- \frac{۲}{۳}) - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸$$

$$۲۷- \text{ما} = \text{لا} (۱- \frac{۲}{۳})$$

$$۲۹- (۱) \text{ محدود مقدار} = \text{صفر}، \text{ایسا خط دائره لا} = \text{ما} = \text{وگ} \text{ کا عا د نہیں ہو سکتا۔}$$

$$۳۰- \frac{\text{و}}{\text{ب}} - \frac{\text{ب}}{\text{م}} = (\text{و} + \text{ب}) - ۳۱ - \text{ما} = \text{لا} (۱- \frac{۲}{۳})$$

$$۳۳- \text{ما} = \text{لا} (۱- \frac{۲}{۳})$$

پرچہ امتحان ۴ (صفحہ ۲۷۴)

$$۱- \text{لا} (\frac{۱}{۲} \text{ م ق} - \text{گ}) + (\frac{۱}{۲} \text{ م ت} + \text{باق} + \text{ت}) - \text{گ} + \text{ت} + \text{ق}$$

$$- \text{ج} =$$

$$۳- \text{لا} - \text{ما} + \text{لا} + \text{و} = ۳ - ۱۰ + ۶ + ۲۵ =$$

$$۵- ۳ \text{ لا} - ۴ \text{ لا} + ۶ + ۲ - ۳ - ۳ = ۴$$

باب پانزدہم

(صفحات ۲۷۶-۲۹۸)

$$۱- \text{لا} + ۶ - ۲ = ۳ - ۱۰ + ۶ + ۲ = ۱ - \text{گ} + \text{لا} + \text{ت} + \text{ج} =$$

$$۵- \text{علا} - ۱۱ - \frac{۹}{۲} - \frac{۱۲}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$۱۳- - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱۷ - \text{ب} - ۲ \text{ م ل م} + \text{م} + \text{ل م} = \text{ل ب} - ۲$$

$$۲۳ - \frac{لا(۱-۳)}{ب} + \frac{لا(۱+۳)}{ب} = ۲ = \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = \frac{لا}{ب} (۱+۳) = \frac{لا}{ب} (۱+۳)$$

$$۳۴ - \text{محوروں کے سرے} \quad ۳۸ - \{ -1 \pm \sqrt{۱-۴} \} = \{ -1 \pm \sqrt{۱-۴} \} = \{ -1 \pm \sqrt{۱-۴} \} = \{ -1 \pm \sqrt{۱-۴} \}$$

$$۴۲ - ما - م لا لا = (لا + لا) مس اعد ۴۹ - ۲ (لا + لا) = (لا + لا) = (لا + لا)$$

$$۵۲ - \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$$

$$۵۹ - لا + لا مم (عد - بہ) = ما - ب مم (عد - بہ) =$$

$$۶۳ - (لا - لا) (لا + لا) = (لا - لا) (لا + لا) = (لا - لا) (لا + لا) =$$

باب ہفتم

(صفحات ۳۳۴-۳۵۰)

$$۵ - \frac{۳}{۴} یا \frac{۱}{۴} \quad ۱۱ - \text{دائرہ} \quad ۱۴ - لا = \frac{لا}{ب} = \frac{لا}{ب} = \frac{لا}{ب}$$

۱۷ - وتر خاص اور کوئی دو ماسکی وتر جو اس سے مساوی زاوے بنائیں۔

$$۲۰ - (لا - لا) (لا + لا) = لا + لا = ۱ \quad ۲۳ - \text{رحم طہ} = لا \quad \text{خط مستقیم جو محور پر عمود ہے}$$

آزمائشی پرچہ ۵ (صفحہ ۳۵۰)

$$۳ - (\frac{۵}{۴}, \frac{۳}{۴})$$

باب ہشتم

(صفحات ۳۵۲-۳۶۹)

$$۴ - لا + لا + لا + لا = ما = ۴ \quad ۵ - ج س - ج س =$$

$$۶۳ - \frac{لا}{رجم\text{طہ}} + \frac{با}{ب\text{جب}\text{طہ}} = ۱$$

باب نوزدہم

صفحات (۳۸۰-۳۹۶)

$$۲ - \frac{۱}{اب} \text{ محدودوں کے محوروں پر } ۳ - ما + ۱۶ = لا = ۰$$

$$۷ - ما + ۴ = لا = ۴ \quad ۸ - (لا - ما) = ۴ \quad ۹ - ما + ۴ = لا$$

$$۱۲ - (لا + ما - ج) = ۴ \quad ۱۳ - (ما - ۲ب) = ۰ \text{ جہاں ب دائرہ کا نصف قطر ہے۔}$$

$$۱۴ - \frac{لا}{۹} + \frac{با}{۸} = \frac{۱}{۸} \quad ۱۵ - (لا - ب) + (ما - ج) = لا$$

$$۲۲ - \frac{لا}{(ب + \frac{۱}{۲})} + \frac{با}{(ا + \frac{۱}{۲})} = ۱$$

باب بستم

صفحات (۳۹۷-۴۲۲)

$$۲ - \text{پہلا اور دوسرا نقطہ موسیقی ہیں تیسرے اور چوتھے کے ساتھ}$$

$$۳ - \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۷}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۱۱}, \frac{۱}{۱۲}, \frac{۱}{۱۳}, \frac{۱}{۱۴}, \frac{۱}{۱۵}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۱۷}, \frac{۱}{۱۸}, \frac{۱}{۱۹}, \frac{۱}{۲۰}$$

$$۸ - \frac{۱}{۵} \quad ۹ - ۵$$

$$۱۰ - لا + لا + لا = ۱ \quad ۱۱ - لا = \frac{۱}{۲} \quad ۱۲ - (۵ \pm ۷)$$

$$۱۹ - ۴ \quad ۲۳ - ۲ - ۲ = ۰$$

۲۔ اگر قاعدہ کو محور لا مانا جائے اور قاعدہ کے نقطہ تنصیف کو مبدا تو

ز = $\frac{1}{p}$ اور $\frac{1}{p} \pm 1$ کے ہیں (جہاں $\frac{1}{p} \pm 1$ ج)۔

۷۔ دئے ہوئے خط کو محور لا مانو اور معلومہ دائرے کے مرکز میں سے جو عمود اس معلومہ خط پر کھینچا جائے اس کو محور ما، اس طرح دائرہ کی مساوات اس شکل کی ہوگی

لا + (ب - ج) = ج ، مطلوبہ طریق دو مکانی ہیں

لا- ۲ (ب ± ج) + ا - ب - ج = .

$$= 6 + 9 \left(1 + \frac{1}{4} \right) = 15.75$$

پرچہ سوالات ۲ (صفحہ ۳۵)

$$- \text{دائرة } 6 + 6 - (6 + 6 - 6) = 6 + 6 - 6 = 6$$

جہاں (لا، با)، (لا، پا)، (لا، لم) مثلث کے رأس ہیں۔

۸۔ مرتب کو محور مانو اور ماسکے محور لا پر جو جس کا فاصلہ مرتب سے u ہو، طریق مطلوب M ۔ m لا۔ $u + v = 0$ ۔ ہے جہاں m اس زاویہ کا ماس ہے جو معلومہ خط محور u کے ساتھ بناتا ہے۔

پرچہ سوالات ۳ (صفحہ ۴۳)

۱۔ ب = ۴، ج = ۲، د = ۲، ع = ۲، د = ۴، ف = ۲

۲-۴ (۳.۶) ۳-۴

۴۔ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = a + b + c$

۷۔ ۱/۴ اب جب (عہ۔ بہ)

$$۱۰۔ ۵ لا \pm ۶ ب - ۱ = ۱ ما \pm ۱ ب (۱ - \frac{۶}{۵} ب)$$

پرچہ سوالات ۴ (صفحہ ۴۳۹)

$$۱۔ (۵ - \frac{۴}{۳} ب) لا - ۸ لا + (۵ - \frac{۴}{۳} ب) ما = ۱۰ = ۲ ب یا \frac{۱}{۳} ب$$

۱۰۔ ایک ضلع کو محور لا مانو، شلت کے راس کو مبدأ، تب طریق ہوگا
لا (م + ن جم ع) + مان جب ع = $\frac{۱}{۳} ج$

پرچہ سوالات ۵ (صفحہ ۴۴۰)

$$۱۔ \frac{۴ ج - ۲ ب}{ج} - ۲ لا + ما - ۵ د لا + \frac{(۵ جم ع \pm ۲ ما)}{جب ع} + ۴ د =$$

$$۲۔ لا + ما = \frac{۴ ب}{۱ + ۲ ب} - ۶ ب لا جب ج = ۲ جم ج جہاں ج مستقل$$

$$۸۔ لا + ما = ۳۹ لا - ۱۵ ما + ۳۲ =$$

۹۔ دیے ہوئے نقطہ کو مبدأ مانو، دائرہ اگر لا + ما ۲ گ لا + ۲ ف ما ج =
ہو تو فاف ہوگا لا (ج - ۲ ف) + ۲ گ لا + ما (ج - ۲ گ) + ۲ ج گ لا + ۲ ف ما
+ ج =

$$۱۰۔ ما - ۴ د لا + ما + ۲ د =$$

پرچہ سوالات ۶ (صفحہ ۴۴۲)

۱۔ ا ب کو محور لا اور اس کے نقطہ تنصیف کو مبدأ مانو، اس طرح ج کا
طریق ہوگا ۸ لا + ۴ ج لا - ما =

$$۲۔ \frac{۱}{۳} (۱۱ - ۳۱۵ - ۵) ج - ۳ لا + ب ما + لا ب =$$

$$۳ - (۲ - ۳) \text{ لاء } لا + ما = ۱$$

$$۱۰ - لا - ما - لا + ب = ۱$$

پرچہ سوالات ۱۰ (صفحہ ۴۴۸)

$$۱ - لا - ب - ما = ۱ \text{، } لا - لا - ب + ما = ۱ \text{، } ب + لا + ما = ۱ \text{، } ب + (لا + ب)$$

$$\text{نقطہ تقاطع ہے } \left\{ \frac{۱}{۲} (لا + ب) \text{، } \frac{۱}{۲} (ب + لا) \right\}$$

$$۲ - لا (لا + لا) (لا - لا) + ج (لا - لا) + ع (لا - لا) + ب (لا - لا)$$

$$+ د (لا - لا) + ف (لا - لا)$$

$$= (لا + ب) (لا - لا) + (ج + د) (لا - لا) + (ع + ف) (لا - لا)$$

$$+ (لا - لا) (لا - لا) + (لا - لا) (لا - لا)$$

جہاں (لا + ب) (ج + د) (ع + ف) مرکز ہیں۔

$$۸ - لا + ما - (لا + ب) لا + (ج - لا) = ۱ \text{، } جہاں تین$$

نقطے (لا) (ب) (ج) ہیں۔

پرچہ سوالات ۱۱ (صفحہ ۴۴۹)

$$۱ - ج + اور ج + ب کو محور مانو اور فرض کرو کہ ج = ۱ = ۱ ج + ب = ۱$$

$$\text{طریق ہے } \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{ب} = ۱$$

$$۲ - \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۵} = \infty$$

فہرست اصطلاحات

Abridged notation

مختصر تر قلم

Abscissa

فصلہ

Anharmonic ratio

غیر موسیقی نسبت

Asymptotes

متقارب

Auxiliary circle

امدادی یا معاون دائرہ

Axis

محور

Cartesian (Coordinates)

کارٹیزی (مختصات)

Complete quadrilateral

مکمل ذواربعا الاصلاع

Concurrency

تراکز

Confocal conics

ہم ماسک مخروطی تراشیں

Conjugate diameters

مزدوج قطر

Coordinates

محدد

Corresponding Points

متناظر نقطے

Cross ratio

چیبی نسبت

Director Circle

مرتب دائرہ

Directrix

مرتب

Eccentricity

خروج المکز

Ellipse

قطع ناقص

Envelope

لفاف

Equilateral hyperbola

قائم الزاؤ

Focus

ماسک

Harmonic Conjugates

موسیقی مزدوج

Hyperbola	قطع زائد
Infinity	لاتناهی
Invariants	غیر متغیر
Inversion	تقلیب
Involution	برسج
Latus rectum	وتر خاص
Limiting Points	انتهائی نقطه
Major axis	محور اعظم
Minor axis	محور اصغر
Normal	عمود
Notation	ترتیم، طریق کتابت
Oblique axes	مائل محور
Ordinate	معیّن
Parabola ✓	قطع مکانی
Parameter	مبدل
Pencil	پنل
Perpendicular	عمود
Polar Coordinates	قطبی محدّد
Projection	تظلیل
Quadrilateral	ذو اربعه الاضلاع
Radical axis	بنیادی محور
Radius Vector	سمتی نیم قطر
Tangent	ماس
Ultimate intersections	انتهائی تقاطع
Vectorial angle	سمتی زاویه

